中学教师参考读物

$A \cup B$

集合与概率

甘肃人民出版社

封面设计：魏福坤

中学教师参考读物
集合与概率
刘 耀
甘肃人民出版社出版
（兰州庆阳路230号）
甘肃省新华书店发行 兰州新华印刷厂印刷
开本787×1092 1／32 印张4 字数84,000
1981年1月第1版 1981年1月第1次印刷
印数：1—3,600
书号：13096·58 定价：0.35元

前　言

为适应中学数学教学的需要，这本小册子简要地对集合与概率的基本知识做了介绍。主要内容是集合的概念与运算关系，概率的概念，事件的运算及其相应的概率，随机变数及几个重要的分布。从这本小册子中还可以看出集合这一概念不仅与概率论关系密切，而且与传统的初等数学有密切关系。本书的目的是帮助中学数学老师进一步理解和掌握新编教材中的这一部分内容，便于教学。

集合是近代数学的一个基本概念，把它渗透到传统数学的教学中，可以更深刻地理解所述问题的本质，看出不同部分内容的联系，缩小初等数学与高等数学之间的距离。概率论产生于17世纪中叶，但长时期里限于初等概率的范围，所用数学也只局限于排列组合等初等数学的内容。进入20世纪以后，概率论确立了公理化体系，以更抽象的数学内容作为其理论基础，使得概率论这门数学学科有了很大的发展。随着科学技术的进步，概率论及其有关的数学分支发展和应用都很为人们所重视，它们在自然科学（如物理、化学、地质、地理、生物、天文、气象等），技术学科（如通讯、计算、自动控制等），经济管理，国防，人口调查，社会保险，生物遗传，系统工程等方面都有广泛的应用。

用集合的观点来讲概率，就更容易明白随机事件之间的关系。由于这两部分内容都是中学数学教材新增加的，我们把它放在一本小册子里穿插讲授。因为集合与概率又是两个学科，讲法上又保持相对独立，对于只想学一点集合论知识的同志，可以只看第二、四两节。

由于我的编写水平有限，对于书中的缺点错误，希望广大读者给予批评指正。

编　者　一九八〇年四月

目　录

§ 1 从两类现象谈起

1. 必然现象与偶然现象

早晨起来，尽管天是阴的，不用看也知道太阳是从东方升起的。可见，“太阳从东边出来”，这是必然的事。自然现象中有许多现象，是完全可以预言其结果的，叫必然现象。例如纯净的水，在一个大气压下，温度是 0 ℃时必然结冰，在20℃时必然不结冰，在100℃时必然沸腾，在80℃时必然不沸腾；异性的两种电荷必然相吸；树上的苹果，当果蒂断开时，必然落向地面，绝不会飞上高空；一个符合数学定义的圆（即平面上与定点等距离的点的轨迹），若它的半径为R，所围面积必然为πR^2；两个三角形，如果有三条边对应相等，这两个三角形必然全等；任一个三角形，测量其两边的长，相加，其和必然比第三边测得的长为大（假设测量是准确的），等等。

是不是一切现象，都是在一定条件下可以准确地预言其结果呢？不是的。例如明天早晨八点钟兰州刮不刮风？抛起一个镍币究竟那一面落地时朝上？一粒种子落在土壤中，是不是发芽？某公共车站，在明天九点钟的时候有多少人在排队等候上车？某跳高运动员，在某一次比赛中，其成绩将是多少？在未来的一年里，我国将发生多少次 5 级以上的地震？最大的震级将是多少？一颗炮弹射出去，是不是将恰好射中目标？等等现象，都不可能事前完全准确地预言其结果。这

是另一类现象，叫偶然现象．偶然现象是大量存在的．

2．偶然性中有必然的规律

是不是偶然现象就是完全杂乱无章的呢？并不是，偶然之中存在着必然的规律．俗话说："天有不测风云"．这话只说对了一半．对的是，天气现象是具有偶然性的，有"不测"的一面．但它又是有规律的，随着科学技术的发展，天气又可以预报得愈来愈准，说明"不测"之中有"可测"，就是说偶然之中又有必然的规律性存在．下面用几个例子来说明偶然现象中确实存在着必然的规律．

例1.1 如果掷一个镍币，是有国徽的一面（以后简称"正面"）朝上，还是没有国徽的一面（以后简称"反面"）朝上？在一次投掷中，它是完全偶然的，究竟哪一面朝上没有确切的把握去预言．但是，有人试验了上万次，出"正面"的次数用试验的总次数去除，其商（叫出正面的频率）总是接近1/2．另一人去试验，也是如此，频率不会出现偏离1/2较大的情形．这个1/2是一个确定的数，它是"必然"的东西．这说明，在投掷镍币的试验里，一次投掷，那一面将朝上是偶然的，但投掷次数很大时，某一面朝上的频率却显示出有一定的规律性，即偶然之中有必然．

例1.2 一个产妇，生下的将是男孩，还是女孩？有偶然性．但是许多国家的统计资料都证明，出生婴儿中，男婴或女婴的频率总是很稳定的．例如日本昭和43年到46年四年婴儿性别调查统计表如下：

从表中可以看出，男婴占的比例总是稳定在0.517左右．为什么不出现这一年男婴占80%，另一年男婴占30%的摆

年份	人　　数	男　婴　数	频　率	女　婴　数	频　率
43	1871839	967996	0.517	903843	0.483
44	1889815	977687	0.517	912128	0.483
45	1934239	1000403	0.517	933836	0.483
46	2000973	1032937	0.516	968036	0.484

动情形，而总是稳定在0.517左右呢？这表明在大量婴儿性别的统计中是确实有必然的规律性存在着。

例1.3 分子物理学认为装有气体的密闭容器，由于气体分子的杂乱运动，撞击器壁，对器壁产生压力．就一个分子来说，它在某一时刻，碰不碰器壁，即使碰到，又是以什么样的速度，什么样的方向撞击器壁，都完全是偶然的。但是，为什么在温度不变的条件下，容器器壁所受到的压力总是恒定的，而不是时高时低呢？原因是容器中分子的个数极大，尽管一个分子的运动是完全无规律可循的，但极大量分子表现出来的总的撞击效果——压力——却总是稳定的．这也证明偶然性中存在着必然的规律．

从上面三个例子还可以看出，偶然现象的必然规律是通过所谓"大量现象"的某种"平均"表现出来的。例如投掷镍币"很多"次，统计"很多"婴儿的性别，分子个数"很多"等等。

3. 概率论是研究偶然现象中必然规律性的数学学科

偶然现象中有必然的规律，从数量的角度研究这些规律性的一个数学分支就是概率论。

概率论的应用是广泛的．例如，生产队留下的种子，经过一个冬天，其发芽率是多大呢？如果不做试验，把发芽率低的种子播种下去，就会造成大量缺苗现象．如何试验呢？不能把全部种子拿来试一试，这样做就没有种子了，应该用尽量少的种子做试验，而又能有足够的把握了解种子的发芽率，这就需要概率论．象这种所谓破坏性的试验（即经过试验就破坏了试验对象的试验），如检验灯泡的使用寿命、钢板的强度、布的耐磨性等，都需要利用概率论的知识，用少量试验得到的“信息”去推断总体的特征．即使不是破坏性试验的问题，也往往需要以尽量少的试验达到做试验的目的．例如调查全国粮食的产量，全国人民收入的情况等，如果把全国的耕地，每亩每亩的去统计，把全国的每个人的收入一一去了解，那工作量就太大了．再如农业上一个优良品种的试验或一套耕做方法的试验，做一次试验就需要一年的时间，时间不允许做很多次试验，这些都可以利用概率论和数理统计的知识，通过尽量少的试验而达到试验的目的．

概率论既然是以偶然现象为其研究对象的，是不是就不精确呢？也不是．有些问题正是为了要求的更精确才借助概率论．例如测量，测量的精度关键是仪器的精度，但仪器解决不了诸如测量时光线的明暗，测量者的情绪等大量偶然因素造成的误差．为了测量的更精确，就需要通过概率论的知识去消除偶然因素造成的误差．随着科学技术日新月异的发展，概率论的应用范围也日益扩充，如在洪水、地震、虫情、天气的统计预报，机器的可靠性的研究，生产管理，药物疗效的实验等方面的应用．我们这里介绍的只是一点入门的知识，想要深入研究的读者，可以阅读概率论和数理统计的专著．

§ 2 集合与对应

没有学过集合概念的人，以为集合很抽象。其实我们经常都在和“集合”打交道。就象1，2，3一样，到处都碰到这些普通的数字。数学是高度抽象的学科，难道1，2，3就不抽象吗？最初人们只看到牛、羊、果子，逐渐能比较出多的牛，少的牛，大概那位创造1头牛，2头牛概念的人，就算世界上第一位数学家了吧！从1头牛，1只羊，1只果子，到数字1，抽掉了具体实物，只剩下1这个量，这还不是高度的抽象吗？为什么我们今天不觉得它抽象呢？因为太熟悉了。人从两岁起，就开始学数数，就和1，2，3打交道，所以不觉得抽象。数学上的集合，就是日常生活中“一群什么”的抽象。学校里的学生，分为“男生”，“女生”，“高中学生”，“初中学生”；教室里的东西，分“桌子”，“凳子”，“黑板”；考试成绩分“优秀”，“良好”，“及格”，“不及格”等等，这都是集合。

象数字一样，抽象了的数，可以运算。3加2等于5，不管是3只羊加2只羊，还是3个果子加2个果子，数量的结果都是5。而且，运算有运算的一套规律，如交换律，结合律，分配律等等。同样，抽象出集合的概念，集合也有运算关系，也有自己的规律。例如，初一开的课程是：{语文、数学、英语、生物、历史、地理、政治}七门，初二开的课程是：{语文、化学、政治、英语、数学}五门，那么初一，初二合起来开的是那几门课呢？从课程的门数上讲，显然不

是 7 + 5 = 12门课，因为有 4 门课是重复的。我们把初一，初二开的课程看作两个集合，两个年级合起来开的课程也是个集合，这个集合是前两个集合的合并，暂时可看作相加，即

{语文、数学、英语、生物、历史、地理、政治}
+{语文、化学、英语、数学、政治}
={语文、数学、英语、生物、历史、地理、政治、化学}。

可见，集合有集合的特点，它讲的合并和算术的加法并不相同，有必要把集合这一概念更深一步的进行讨论。

1. 集合的概念

{某校高一、二班的学生}是由该班的一个个学生组成的；化学上的{卤族元素}是由氟、氯、溴、碘等化学元素组成的；{红星生产队的羊}，{东风号货轮某次装载的货物}，{某剧团今晚上演的节目}等，不论"一群什么"，都是由该群的一个个成员组成的。借用化学上"元素"这一名词，我们把所研究对象的基本成员叫元素，一群元素的总体叫集合。

叙述一个集合，应能明确这个集合是由哪些元素组成的，即元素指什么，这个集合包含哪些元素，不包含哪些元素，叙述的含糊了，这个所谓的集合也就没什么意义了。例如说{一群羊}，元素指羊，是明确的，但这{一群羊}究竟是指的哪些羊呢？无法判定具体的一只羊，是这{一群羊}的羊，还是不是这{一群羊}的羊。所以{一群羊}不是集合，而{红星生产队的羊}指出了具体的羊群，是集合。

元素、集合是原始概念，它是实际中大量具体事物的概

括．但如何给集合下一个科学的定义，至今仍是个难题．所以讲解时，注意要通过较多的例子，使学生思想上能理解元素、集合指的是什么，并能应用这些概念去解决实际问题．

例2.1 就实数而论，每个具体的实数做为一个元素，{自然数}（即所有一个个自然数的总体，以下类同），{整数}，{有理数}，{正数}，{0}（即只包含0这一个元素），{介于a和b之间的数}，{0和1}，{奇数}，{素数}，{实数}等都是集合．

例2.2 就四边形而论，每个具体的四边形做为元素，{平行四边形}（即所有具体的平行四边形的总体，以下类同），{梯形}，{菱形}，{正方形}等都是集合．

例2.3 就地球表面而论，表面上每一个"地方"（抽象地说，地球表面上每一个点）作为元素，{温带}（即在温带的所有"地方"之总体），{海洋}，{陆地}，{亚洲}，{中国}，{兰州}等都是集合．

例2.4 考查某块农田中某种害虫的情况，把一平方米面积中这种害虫的"条数"做为元素，（即，是0条，是1条，是2条，……）那么，{有0条}，{有5条}，{不超过10条}，{5条到8条之间}，{50条以上}等都是集合．

例2.5 考试按百分制评分，把考试的分数作为元素，{50分以下}，{90分以上}，{76分到89分之间}，{100分}等都是集合．

具体就某个班学生考试，研究的是各个学生的成绩，把具体的学生当作元素，按成绩分成一些集合，如{100分的学生}，{76分到89分的学生}等，和前述的集合是含义不同的

集合.

从这些例子可以看出，讨论集合要明确范围和对象，你研究的是某校的学生，该校的学生，而且只限于该校的学生是元素，{初中学生}，{初一、三班学生}是集合，{全校的学生}也是集合，而且是“最大”的集合，叫全集. 全集就是包含全部元素的集合. 如果你要研究该校各班的状况，可以把每个班当作一个元素，如“初一、三班”是一个元素，{初一各班}，{初中各班}，{高中各班}，{全校各班}等都是集合，这里的元素是“班”，而不是“学生”.

全集也就是研究的最大范围，你研究该校各班，范围就是该校，别的学校的班级不属于讨论的对象.

从集合含义的实质可以看出，集合着眼于它包含哪些元素，而不考虑元素在集合中摆在什么位置，也不应有重复元素.

例如：{白菜，萝卜}和{萝卜，白菜}是同一集合，而写成{萝卜，白菜，萝卜}则不妥当.

2. 集合的表示方法

用字母代表数字，使算术发展为代数，而且把许多共同的性质一目了然地刻画出来. 如加法交换律，可用简单的式子表示：

$$a+b=b+a$$

公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$就表示了一切二项式平方的展开，而不局限于两个具体数和的平方. 同样，在集合理论中，我们也用字母表示集合. 一般用大写的拉丁字母，如A,B,C等表示集合，而用小写字母，如a，b，c，x，y等表示

元素．用字母表示，便于运算的书写，例如以A表示集 合：{语文、数学、英语、地理、历史、政治、生物}，以B表 示集合：{语文、数学、化学、英语、政治}，那么前面说的这两个集合相加，就可以表示为A＋B。

如果组成集合的元素不多，通常用列举法表示，即用大括号，括号里列出全部元素．如象前面说的{白菜，萝卜}就是用的列举法，读作：白菜，萝卜这个集合．

有的集合，虽然组成它的元素很多，但规律性强，有时也可用列举法表示．例如{自然数}这个集合，包含无穷多个元素，可以写成：

$$\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$$

习惯上用N代表{自然数}这一集合．

如果这个集合只有一个元素组成，叫单元素集合．例如数集{0}，{1}，考试成绩{60分}，田里每平方米某种害虫的条数是{5条}等，都是单元素集合．要注意单元素集合和那个元素本身的含义是不同的，一个是集合，一个是元素．如{1}表示含数1的集合，1表示元素1，是实数．从运算关系看，$1+1=2$，而$\{1\}+\{1\}=\{1\}$．

集合的另一种表示法叫描述法．因为一个集合，往往是具有一定特性的元素组成的，把这个特性指出来，就可以明确这个集合，就是描述法．例如，{偶数}，{素数}，{初中各班}等就是用的描述法．

一个集合，元素的特点如果能用数学的式子来描述，往往采用大括号中加一冒号 ：（或划一竖线），冒号前面写上元素的符号，冒号后面写上该元素满足的条件的方式来表示。这种描述的方法在数学上用的更多一些。

例2.6 写出方程$x^2-5x+6=0$的解的集合。

如果把方程的两个解（$x_1=2$，$x_2=3$）解出来，这个方程解的集合可以用列举法来表示，就是$\{2,3\}$。

这种表示法，优点是：解是什么，一目了然。缺点是看不出2，3具有什么特性。

用描述法，这个方程解的集合可以写成

$\{x: x^2-5x+6=0\}$　　（或$\{x|x^2-5x+6=0\}$）

读作：满足条件$x^2-5x+6=0$的x的集合。

描述法大括号中的冒号（或竖线）前面的x指这个集合的元素的记号，冒号（或竖线）后面的方程，表示这个元素x满足的条件。当然这种表示法，解是什么不清楚，它的重点是指方程$x^2-5x+6=0$的全部解。可见，代数中讲方程的解，就是集合，所谓同解方程，就是解的集合相同的方程。

例2.7 写出平面上单位圆内点的集合。

如果在平面上建立直角坐标系，以圆心为原点，半径为1的圆所包围的点的集合可以表示为：

$\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$　（或$\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$）

冒号前面的(x,y)指平面上点的坐标，代表平面上一个点，即一个元素，冒号后面的式子，表示这个点的坐标满足的条件。

单位圆周上的点的集合，表示为

$\{(x,y): x^2+y^2=1\}$

可见，平面解析几何中所讲的曲线，就是满足某一方程的平面上点的集合。

例2.8 偶数集，即全体偶数所组成的集合，记为

$\{2n: n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots\}$

或 {2n∶n为整数}　　（读作：偶数集）

例2.9　介于0和1之间的一切实数．

这个集合指不小于0且不大于1的一切实数，记为

{x：$0 \leqslant x \leqslant 1$}，读作：介于0和1之间的实数．或读作：满足不等式组$0 \leqslant x \leqslant 1$的$x$的集合．

全集用I来表示．全体整数组成的集合，即{整数}，习惯上用J代表．全体实数组成的集合，即{实数}，习惯上用R代表．

3．集合的包含关系

集合之间的差异，首先是集合的元素所代表的对象可能不同．元素所代表的是"实数"，是"羊"，还是考试的"分数"可能不同．如果元素所表示的对象是相同的，例如实数．那么，两个集合的差异就在于它们各自包含的具体元素可能不同，如{0，1}和{1，2，3}是两个不同的集合．

如果集合A包含元素x，就记为$x \in A$（读作：x属于A），表示x是A的元素．例如$3 \in N$，即说明3属于自然数集；$-5 \in J$，即指-5是整数．

如果集合A不包含元素x，即x不是A的元素，记为$x \notin A$，或$x \overline{\in} A$，读作：x不属于A，例如：$-3 \notin N$，$1/2 \notin J$．

符号$\in$，$\notin$是讲元素属于，还是不属于集合，或者说，集合包含还是不包含这个元素．

集合与集合之间也可能有包含关系．例如：{高中学生}就包含{高一学生}；{中国各省、市、自治区}就包含{台湾省}；J就包含N，R又包含J，直观上可以形象地用平面图形来表示集合的包含关系，例如图1中所表示的集合A就包含集合B．

集合A包含集合B，是指集合B的元素一定是集合A的元素。

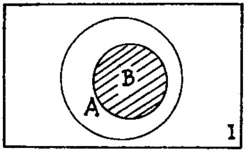
图1　　A⊇B

定义2.1　若$x\in B$，则$x\in A$，叫集合A包含集合B．记为　$A\supseteq B$，或$B\subseteq A$，读作：A包含B，或读作：B被A所包含．

这个定义是说，凡B中的元素，也一定是A中的元素．当然，反过来就不一定了，A中的元素可以不是B中的元素．

记号⊇和∈含义不同，前者是指两个集合之间的包含关系，后者是指元素属于集合的问题．

$B\subseteq A$，是说集合B是集合A的一部分，B是集合，又是集合A的一部分，叫A的子集．

定义2.2　若$B\subseteq A$，则称B为A的子集．

例如：N是J的子集；{菱形}是{平行四边形}的子集；$\{(x,y):x^2+y^2=1\}$是$\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$的子集；{80分以上}是{60分以上}的子集．

从集合包含的定义可以看出，A也可以说是A自己的子集，即$A\subseteq A$．因为，"若$x\in A$，则$x\in A$"这个命题总是对的，所以$A\subseteq A$．这种记法和不等号的记法类似，说$3\leqslant 3$，并不错．但是，更重要的是那些和A不同的A的子集．即B是A的子集，但在A中至少有一个元素是不属于B的，叫B是A的真子集，记为$B\subset A$．（读作：A严格包含B．或读作：B是A的真子集．）

例2.10　{某校高一男生}是{某校高一学生}的子集．如果该校高一有女生，那么，{某校高一学生}这个集合，至少