交通系统中等专业学校试用教材

应用数学

上册

金岩 编写　李玉亚 主审

人民交通出版社

交通系统中等专业学校试用教材

Yingyong Shuxue

应 用 数 学

上 册

金 岩 编写
李玉亚 主审

人 民 交 通 出 版 社

内 容 提 要

本书分上、下两册。上册包括第一篇和第二篇共九章，介绍概率论与数理统计的基本知识。下册包括第三篇和第四篇共十章，其中第三篇介绍线性代数；第四篇介绍运输管理最优化的数学理论与方法——线性规划的几种不同解法及图论的基本概念，排队论，对策论。排队论和对策论部分仅供学有余力者选用，书中用“* *”号标出；下册第四、五章，可根据各校的具体情况任选一章，余下者则为带“*”号章节。

本书可供中等专业学校作为基础数学教材，也可供专科学校及大专院校干部专修科选用。

交通系统中等专业学校试用教材
应 用 数 学
上 册
金 岩 编写
李玉亚 主审
人民交通出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
人民交通出版社印刷厂印
开本：787×1092 1/16 印张：10.75 字数：264千
1986年12月 第1版
1986年12月 第1版 第1次印刷
印数：0001—6,050 册 定价：1.60元

编者的话

本书是受交通部中专系统公路运输管理专业教学联络网（管理专业委员会的前身）委托，根据1982年交通部教育局审订的交通中专《应用数学教学大纲（试行草案）》编写的。作为运输管理专业的技术基础课，本着基础课为培养专业技术人才服务的精神，从公路汽车运输管理人员所应具备的数学基础知识的实际需要出发，本教材主要讲授概率论与数理统计和运输管理最优化的数学理论与方法的基本知识。

全书分上、下两册。上册包括第一篇和第二篇共九章，介绍概率论与数理统计的基本概念和主要计算技巧；同时，通过一定量的例、习题，说明概率论与数理统计在运输管理中的应用。下册包括第三篇和第四篇共十章，其中第三篇是线性代数。第四篇线性规划部分着重介绍当前运筹学在运输管理中使用最成功的方法——线性规划的几种不同解法及图论的基本概念；排队论和对策论属于选学部分（用“＊＊”号标出），分别介绍排队论和对策论的有关基本知识。

本教材可供招收初中毕业生三、四年制及招收高中毕业生二年制的中等专业学校的管理专业选用；也可供目前从事公路交通管理工作而数学基础知识较好的同志自学之用；如果把“＊”号和“＊＊”号的章节内容与其它章节内容适当调整，尚可做高等专科学校管理专业的试用教材。以“搞调度、管理工作”为培养目标的专业，对上册中带“＊”号的章节可作为选修内容；而以“搞计统、财会工作”为培养目标的专业，对下册中带“＊”号的章节可作为选修内容。其中带“＊＊”号的章节只供学有余力的学生选用。全教材总授课时数为156学时，其中上册授课时数为72学时（“＊”号内容另加10学时），下册授课时数为74学时（“＊”号内容另加10学时）。

本教材由交通部呼和浩特交通学校金岩同志编写，参加编写工作的还有江西省交通学校刘勇同志。其中概率论数理统计和线性代数、线性规划由金岩同志编写，排队论和对策论由刘勇同志编写。

吉林工学院的李玉亚副教授和西安公路学院运管系数学教研室李秉周主任分别任本书上、下册的主审。主审的二位同志认真负责，对原稿提出了许多宝贵意见，并进行了修改，对此，编者表示深切的谢意。

在编写、修改期间，中国科学院系统所的董泽清副研究员、吉林省交通学校的刘允中副研究员和呼和浩特交通学校运管专业张学禹主任对于本教材的内容提了宝贵的建设性和指导性意见，并对编写工作给予了大力的帮助。广州市交通学校的赖木荣、吴家蓊老师，安徽省交通学校的周春泉老师，江西省交通学校的丁青老师，陕西省交通学校的廖美君老师，呼和浩特交通学校的沈钟毓、邹豪思、乌云老师以及吉林省、贵州省等20余所交通学校的有关老师，对于原稿进行了认真的审阅、试用，衷恳地提出了许多宝贵意见和建议，对于修改工作起了极大的推动作用。对于以上诸位老师的诚挚帮助，谨此一并深致谢意。

本教材由于编者水平所限，错误或不妥之处一定不少，诚望读者批评指正。

编　者

目　录

第一篇　概率论基本知识

第一章　概率论的基本概念……1

§ 1.1　事件及其关系……1

§ 1.2　概率的定义……5

习题一……11

第二章　概率的基本运算……13

§ 2.1　概率加法定理……14

§ 2.2　概率乘法定理……16

§ 2.3　全概率公式……18

§ 2.4　贝叶斯公式……21

§ 2.5　随机事件的独立性……23

§ 2.6　重复独立试验贝努里公式……26

习题二……29

第三章　随机变量的分布及其数字特征……32

§ 3.1　随机变量……32

§ 3.2　离散型随机变量的分布……33

§ 3.3　连续型随机变量的分布……35

§ 3.4　二维随机向量及其分布函数……40

§ 3.5　随机变量函数的分布……47

§ 3.6　数学期望……53

§ 3.7　随机变量的方差……58

§ 3.8　大数定律……61

习题三……64

第四章　介绍几种常用的分布……70

§ 4.1　二项式分布……71

§ 4.2　泊松分布……73

§ 4.3　正态分布……75

习题四……80

第二篇　介绍几种常用数理统计方法

第五章　基本统计模型……83

§ 5.1　数理统计简介……83

§ 5.2　总体与样本……84
§ 5.3　样本分布……85
§ 5.4　样本均值和方差……87
习题五……89
第六章　参数估计……90
§ 6.1　问题的提出……90
§ 6.2　参数的估值……90
§ 6.3　置信概率与置信区间……93
习题六……97
第七章　显著性检验……99
§ 7.1　问题的提出……99
§ 7.2　显著性检验的基本原理……99
§ 7.3　平均数的显著性检验……101
§ 7.4　平均数差异的显著性检验……102
§ 7.5　方差检验……104
§ 7.6　大样本的显著性检验……105
习题七……107
第八章　方差分析……109
§ 8.1　方差分析基本思想……109
§ 8.2　方差分析及其假设检验的理论根据……110
§ 8.3　一元方差分析计算举例……113
§ 8.4　两因素无重复观测值的方差分析……115
习题八……120
第九章　回归分析……121
§ 9.1　问题的提出……122
§ 9.2　回归直线的求法……122
§ 9.3　相关系数及其检验……126
§ 9.4　用回归方程进行预测……128
§ 9.5　回归分析计算的简化……129
*§ 9.6　一元非线性回归及多元线性回归……132
习题九……135
习题答案……137
数值表附录……150
参考书目……165

第一篇　概率论基本知识

在自然界中广泛存在着一类所谓随机现象，实践证明，研究了大量随机现象后，通常总揭示出一种完全确定的规律性，也就是大量随机现象所特有的一种规律性。概率论与数理统计就是一门研究随机现象的数量规律的科学。由于随机现象是普遍存在的，这就使得概率论与数理统计的方法具有极为普遍的意义。

第一篇着重介绍以下几个基本内容：

一、概率论的基本概念；

二、概率的基本运算；

三、随机变量的分布及其数字特征；

四、介绍几种常用的分布。

第一章　概率论的基本概念

概率论是研究随机现象（偶然现象）的数量规律的一个数学分支，而随机现象即事件的研究正是揭示这种规律性的基础，随机事件的发生的可能性大小——“概率”，又是最基本的规律，为此这一章首先给出随机事件和概率的概念，这也是学好概率论的基础。

§1.1　事件及其关系

一、事　　件

当我们多次观察自然现象后，会发现许多事情在一定的条件下，必然会发生。例如在没有外力的作用条件下，作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动，又如在标准大气压下 0 ℃的纯水加热到 100℃ 时，必然会沸腾等等。这种在一定条件下，必然会发生的事情称为**必然事件**；反之，那种在一定条件下必然不发生的事情就称为**不可能事件**。通常以U表示必然事件，以V表示不可能事件。

从所举的例子中可以看出，必然事件和不可能事件有着很紧密的联系。事实上，如果在一定的条件下，某个事情是必然事件，那么在同样的条件下，这事情的反面就必然是不可能事件；反过来也一样。

但是，在自然现象中，除了上面提到的必然事件和不可能事件外，也还存在着另一类与此有本质不同的事情。这种事情在一定条件下可能发生也可能不发生，这种事情我们称为**随机事件简称为事件**，通常用A，B，C，…等表示随机事件。为了说明随机事件在自然现象中是广泛存在着的，我们来看下面的一些例子。

【例 1】　“在 6 ～ 8 月间某河流的最高水位小于 5 m”便是一个随机事件。因为我们无法断言在 6 ～ 8 月间该河流的最高水位是小于 5 m 还是超过 5 m。这种事情可能发生也可能

不发生，因而是一随机事件。

【例 2】 “在一分钟内，一个电话交换台至少接到15次呼唤”也是一个随机事件。因为在一分钟内，可能接到不止15次呼唤，也可能接到正好15次或不足15次呼唤等等。

【例 3】 “在抽查其工厂生产的10件产品时，发现有一件次品”是一随机事件。因为抽查的结果可能正好只发现一件次品，也可能没有发现次品或发现的次品不止一件。

类似的例子，还可以举出很多。从上面所举的一些例子中，我们可以看到，事件确实是广泛存在于自然现象中，对于随机事件，由于人们不能事先断定它是否发生，因此，从表面上看，好象是不可捉摸的，纯粹是偶然性起支配作用的，而没有什么规律性的东西。其实并不然，实践告诉我们，在相同的条件下（例如投掷同一颗均匀的骰子）对某一随机现象进行大量试验、观察，总能揭示出某一随机事件（例如投掷如上的骰子出现一点）的特定规律性，即所谓**统计规律性**。对这些事件的规律性的研究是非常必要的。例如，对江河每年最高水位的研究将有助于水坝等工程的设计，电话交换台一分钟内接到呼唤次数的研究将有助于决定应该设置多少线路等等。

二、基本事件

有的事件较复杂，有的事件却很简单，一般说来，复杂事件往往可以分解成同一随机现象下的简单的事件。例如在一批产品中任意抽取三件产品的质量情况是一个随机现象，“至少有一件是正品”就是一个事件，但这个事件比较复杂，它包括了“有一件是正品”，“有二件是正品”，“有三件是正品”，这三个事件所描述的情况，就比较简单，而且这三个事件中的每一个都不能再分解了。因为任意抽出三件产品的质量情况这个随机现象，有而且仅有下列几种结果（或事件）：

“全部是次品”；

“有一件是正品”；

“有二件是正品”；

“有三件是正品”。

每抽取三件产品的质量情况，必是也只能是这四个事件中的一个事件。我们把具有上述性质的事件叫做**基本事件**，并说这个随机现象是由四个基本事件构成的。

有了上面的说明，我们可以给基本事件下个不太严格的定义。

随机试验（或随机现象）的每个可能结果称为一个**基本事件**。而基本事件的全体称为**基本事件集**，通常用符号 E 表示，每一个基本事件称为集合 E 的一个元素。对于任一随机现象来讲，它的基本事件集 E 都是一个必然事件。

为了加深对基本事件的理解，我们看下面的例子。

【例 4】 如果随机试验是向桌面上投掷两枚圆净无缺的硬币，则有四个可能的结果：（正、正），（正、反），（反、正），（反、反）。若用 L_{11}，L_{12}，L_{21}，L_{22} 表示上述四个结果，则基本事件集 E 由四个基本事件构成，可写成

$$E=\{L_{11},L_{12},L_{21},L_{22}\}$$

基本事件是事件中的一种，一般事件（或者说复杂事件）总是由若干个基本事件共同组成的。假如在上述的随机试验中，我们要研究“至少有一个出现反面”这一随机事件，用 A 表示，则事件 A 就是由基本事件（正、反），（反、正），（反、反）共同组成的，即

$$A=\{L_{12},L_{21},L_{22}\}$$

不难理解，事件 $A=\{L_{12},L_{21},L_{22}\}$ 的出现就等于说基本事件 L_{12},L_{21},L_{22} 之一出现；反过来，基本事件 L_{12}，L_{21}，L_{22} 之一出现，事件 A 就出现。

我们只是一个个地来研究事件是不够的，在实际生活中，往往要求同时研究几个同样条件下的事件以及他们之间的联系等等。例如在检查某些圆柱形的产品时，要求它的长度和直径都符合规格才算合格，这时我们要考虑“产品合格”，“产品不合格”，“直径合格”，“直径不合格”，“长度合格”，“长度不合格”，“直径合格但长度不合格”等等这类事件，显然，这些事件相互之间是有联系的，这就提示我们，在考虑任何一个随机事件时，总要同时考虑与之联系的种种事件以及这些事件之间的关系。详细地分析事件之间的种种关系，会帮助我们更深刻地认识事件的本质。

三、事件间的关系和运算

（1）**如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 A 是事件 B 的特款或称 B 包含 A**，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$，如图1-1所示。例如“直径不合格”，必然导致“产品不合格”，所以“直径不合格”这一事件是“产品不合格”的特款。

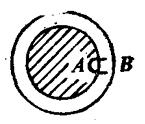

图 1-1

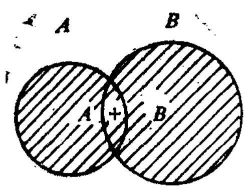

图 1-2

如果 $A\subset B$，$B\subset A$ 同时成立，则称 A 与 B **等价**或相等，记作 $A=B$，等价的两个事件我们看作是一样的。

（2）**事件 A 与 B 至少一个发生而构成的事件，称为事件 A 与 B 的和**，记作 $A+B(A\cup B)$，如图1-2所示。例如：“产品不合格”便是“直径不合格”与“长度不合格”两事件的和。它可以推广到事件为有限个的情形。例如“一分钟内接到不多于15次呼唤”这一事件便是“一分钟内接到1次呼唤”，“一分钟内接到2次呼唤”，……，“一分钟内接到15次呼唤”及“一分钟内没有接到呼唤”等事件的和。一般尚可以推广到事件为**可列个**的情形：如果 A 的发生，等价于 A_1，A_2，…，A_n，…中至少一个发生，则称事件 A 是事件 A_1，A_2，…，A_n，…的和，记作 $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ $\left(A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$。

（3）**由事件 A 与 B 同时发生而构成的事件称为事件 A 与 B 的交**（积），记作 $A\cap B$，简记作 AB，如图1-3所示。例如“产品合格”便是“直径合格”和“长度合格”的交。类似地，可以定义可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的交，记作 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，它表示事件 A_1，A_2，…，

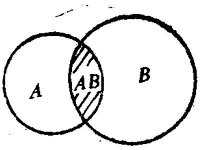

图 1-3

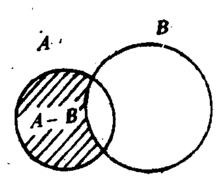

图 1-4

A_n，…同时发生而构成的事件。

（4）**如果A的发生，必然导致B的不发生**（此时如果B发生，当然也导致A的不发生），**则称A与B是互不相容的事件**。例如，在抛掷硬币时，“出现正面”记为事件A，“出现反面”记为事件B，则在一次抛掷中要么出现A，要么出现B，这时A与B就是互不相容事件。互不相容事件也就是不可能同时发生的事件，即$AB=V$。

（5）**事件A发生且事件B不发生所组成的事件称为事件A与B的差**，记作$A-B$，如图1-4所示。例如，“直径合格但长度不合格”便是“直径合格”与“长度合格”这两事件的差。

（6）“产品合格”与“产品不合格”、“直径合格”与“直径不合格”、“一分钟内接到呼唤”与“一分钟内没有接到呼唤”等等事件，它们两两之间是相互对立的。类似的例子还可以举出很多。两事件若存在上述关系，即，**若事件A、B满足关系 $A+B=U$ 且 $AB=V$，则称A、B互为对立事件或互为逆事件**。A的对立事件记为$\bar{A}$，根据其定义显然有 $A+\bar{A}=U$，$A\bar{A}=V$。

在以上的几种关系中，由于有$A-B=A\bar{B}$，因而事件之差用的不很多。

按以上关于事件和、积等事件定义，很容易推知：若A、B、C为任意随机事件，则得事件间的运算规律如下：

（1）$AB=BA$

（2）$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$

（3）$A(B+C)=AB+AC$

（4）$A+A=A \quad A+V=A$

（5）$AA=A$，$AV=V$

（6）$AB+A\bar{B}=A$

（7）$A+A\bar{B}=AB+A\bar{B}+A\bar{B}=A$等等。

作为例子，我们来证明

（6）$AB+A\bar{B}=A$

证明：

(a)若一基本事件属于$AB+A\bar{B}$则必有此基本事件或属于AB或属于$A\bar{B}$。

若属于AB则定属于A；若属于$A\bar{B}$则也定属于A。由此得属于 $AB+A\bar{B}$ 的基本事件定属于A，于是：

$$AB+A\bar{B}\subset A$$

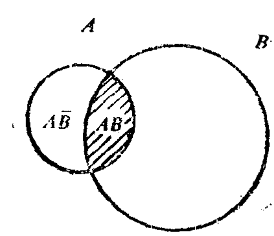

图 1-5

(b)反之，若一基本事件属于A，如图（1-5）示，则此事件或属于AB或属于$A\bar{B}$，即此事件定属于$AB+A\bar{B}$，于是有：

$$AB+A\bar{B}\supset A$$

由(a)，(b)得：

$$AB+\bar{A}B=A$$

证毕。

其余几种情况，读者可仿此自己试证。

下面举例说明如何从定义出发表示事件间的关系及如何运用事件的运算规律，

【例 5】 事件A、B，C表示从三套不同的全集中至少取出一本书的事件，每一套全集各有三本书以上。事件A_i和B_j分别表示从第一套全集中取出i本书，从第二套中取出j本书，

(i，$j=1$，2，3)。试表示出如下的事件：

(a)从一套全集中至少取出1本书；

(b)从三套全集中各至少取出1本书；

(c)至少从第一套中取出1本书，从第二套中取出3本书；

(d)从第一、二套全集中各取出2本书；

(e)至少从第一套中取3本、从第二套中取1本，而从第三套中一定要至少取一本书。

解：(a)从事件和的定义出发，此事件为和事件$A+B+C$；

(b)从事件积的定义出发，此事件为ABC；

(c)从事件和的定义出发，此事件为A_1+B_3；

(d)同(b)这是事件A_2B_2；

(e)根据事件和及事件积的定义，此事件为$(A_3+B_1)C$。

【例6】 试简化公式$A=(B+C)(B+\bar{C})(\bar{B}+C)$。

解：按运算规律(3)，(5)，(4)，(1)和对立事件的性质有

$$\begin{aligned}&(B+C)(B+\bar{C})(\bar{B}+C)\\=&[(B+C)B+(B+C)\bar{C}](\bar{B}+C)\\=&(B+BC+B\bar{C})(\bar{B}+C)\\=&(B+BC+B\bar{C})\bar{B}+(B+BC+B\bar{C})C\\=&BC\end{aligned}$$

$\therefore\quad A=BC$

§1.2 概率的定义

上节中我们讨论了随机事件及其相互关系。对一随机事件A或者它的对立事件$\bar{A}$，在一次试验中不可能同时出现，即在一次试验中，要么出现A，要么出现$\bar{A}$，那么事件A出现的可能性大呢？还是事件$\bar{A}$出现的可能性大呢？这个问题在第一节中没有解决。然而，了解一个事件在某次试验中出现的可能性的大小对我们是有实际意义的。例如甲乙两个工人使用同样的机器生产，如果甲出废品的比率大约是1%，而乙出废品的比率大约是2%，那么我们就可以说甲的技术比乙高一些。而这种比率的意义是什么呢？这一节我们就来解决这样的问题。

一、概率的古典定义

先看两个具体的例子。

【例1】 设有50张考签，分别加以编号，1，2，…，50，一学生任意抽取一张进行考试，问这学生抽到10的倍数号的可能性有多大？

解：从50张考签中任意抽一张，则每一张考签被抽到的可能性都是一样的，此时试验的结果显然共有50个，即“抽到1号考签”，“抽到2号考签”，…，“抽到50号考签”等50个，而“抽到10的倍数号考签”的结果则是“抽到10号考签”，“抽到20号考签”，…，“抽到50号考签”等这5个结果。那么抽到10的倍数号的考签的可能性就是$\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$。

【例2】 现有150个电灯泡，其中有2个是废品，若从150个电灯泡中任取一个，问恰好

取到废品的可能性多大？

解：从150个灯泡中任取一个，则每一个灯泡都有被取到的可能性，显然这种试验的总结果是有150个，而取到一个灯泡恰好是废品就只能从2个废灯泡中任取其一，因而其结果是有2个。所以取一个灯泡恰好是废品的可能性就是$\frac{2}{150}=\frac{1}{75}$。

在以上的两个例子中，我们凭借常识，求出了事件出现的可能性的数字表征，也就是事件的概率。为了总结出概率的概念，让我们对上面两个例子仔细分析一下。

第一，试验结果的总数，**即基本事件总数是有限的**，在例1中是50，在例2中是150；第二，在例1和例2中，我们都假设了**每一基本事件出现的机会是一样的**；第三，所谓事件的可能性的数字表征在例1中是$\frac{5}{50}\left(化简得\frac{1}{10}\right)$，在例2中是$\frac{2}{150}\left(化简得\frac{1}{75}\right)$，这都是具有要求条件的基本事件数目与所有基本事件的总数之比。对随机现象的研究最初就是在这样的两个条件下进行的。

（1）在一次试验中的可能结果只有有限个，也就是我们观察的随机现象的基本事件的总数是有限的；

（2）每一事件发生的可能性是相等的。

满足以上两个条件的随机现象模型，称为**古典概型**。

概率的古典定义：在古典概型中，如果总的基本事件数为n，事件A所描述的内容有其中m个基本事件，则称比值$\frac{m}{n}$为事件A的概率，记作

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

下面我们举几个计算古典概型概率的例子。

【例 3】 从0，1，2，…，9十个数字中任取一个数字，求取得奇数数字的概率。

解：设用“A表示取得的数是奇数”的事件。显然基本事件总数$n=10$，而A所包含的基本事件数$m=5$；所以所求概率$P(A)=\frac{5}{10}=0.5$。

【例 4】 一袋内有5个白球与3个黑球。从其中任取两个球，求所取出的两个球都是白球的概率。

解：设用“A表示取出的两个球都是白球”的事件。则基本事件总数$n=C_8^2=28$，而A所包含的基本事件数$m=C_5^2=10$，所以，所求的概率为

$$P(A)=\frac{10}{28}=0.357$$

【例 5】 盒中有100个螺钉，其中有90个是合格的，有10个是次品，从中任意抽取10个，问这10个都是合格品的概率是多少？

解：设用“A表示抽到10个都是合格品”的事件。则基本事件的总数$n=C_{100}^{10}$ A所包含的基本事件数$m=C_{90}^{10}$，于是，所求概率为

$$P(A)=\frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}=0.3305$$

从概率的古典定义可直接推出任一事件A的概率有下列性质：

性质1 事件A的概率$P(A)$必在闭区间[0,1]中，即

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

因为事件A所包含的基本事件数m不会大于基本事件的总数n，也不会小于零，即

$$0\leqslant m\leqslant n$$

各项同除以n，即得

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

性质2 必然事件U的概率等于1，即$P(U)=1$。

因为必然事件U在每一次试验中必然发生，也就是U所描述的内容包含了所有的基本事件，即$m=n$，所以有

$$P(U)=1$$

性质3 不可能事件V的概率等于零。即

$$P(V)=0$$

因为不可能事件V在每一次试验中都不发生，也就是V所描述的内容不包含基本事件，即$m=0$，所以有

$$P(V)=0$$

性质4 对立事件的概率之和等于1，即

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

若事件A和$\bar{A}$为对立事件，且事件A包含的基本事件为m，则事件$\bar{A}$所包含的基本事件数应为$n-m$，所以有

$$P(A)=\frac{m}{n};\quad P(\bar{A})=\frac{n-m}{n}$$

由此可得：

$$P(A)+P(\bar{A})=\frac{m}{n}+\frac{n-m}{n}=1。$$

这个性质在概率的计算中很有用。下面举例说明之。

【例6】 在一副去掉大小王的52张扑克牌中任意抽取13张，问其中至少有一张是8点的概率是多少？

解： 设用“A表示至少有一张是8点”的事件

事件A表示至少有一张是8点，那么它包括了13张牌中有一张，有二张，有三张和有四张是8点的四种情况，要想求出$P(A)$，就必须求出在这四种情况下的概率，这样做很繁琐。但是根据性质4，我们若能求出$\bar{A}$的概率，则$P(A)$就容易求得。

我们知道事件A是至少有一张是8点，那么事件$\bar{A}$就表示“一张8点也没有”的事件。52张牌中任意抽取13张的组合方法共有C_{52}^{13}种，即$n=C_{52}^{13}$，而13张牌中一张8点也没有的组合方法是C_{48}^{13}，即$m=C_{48}^{13}$，所以，

$$P(\bar{A})=\frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}}=0.304$$

再由性质 4 可得$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.304=0.696$

由例 6 可以看出，当我们计算某一事件的概率时，有时通过计算它的对立事件的概率，然后由性质 4 而得所求概率可能简单些。这种计算技巧在概率的计算中经常会遇到。

概率的古典定义很早就被人们发现，解决了很多问题，至今用途很广。但是这一定义却存在着很大的局限性，这首先是因为古典概型只考虑基本事件是有限的情况，然而实际中却要考虑基本事件是无限的情况。例如在单位时间电话交换台接到呼唤这一随机现象中，就包含有“接到一次呼唤”，“接到二次呼唤”，“接到 5 次以上呼唤”，…，等等，无限多个事件，因而这种随机现象就不能用古典概型来描述。古典概型的另一局限性是它可描述的一些事件要具有某种对称性，以及由此而具有的等可能性，然而在我们实际生活中遇到的更多的却是没有对称性的情况，例如：“接到一次呼唤”与“接到二次呼唤”的可能性是不等的。在如上的情况下古典定义就不适用了。为了克服上述的受相当程度局限的缺点，就必须扩大概率论知识的应用范围，导出新的定义——概率的统计定义。

二、概率的统计定义

为了提出问题，我们先看两个例子。

【例 7】 检查大批的产品，当被检查的产品长度介于13.60m到 13.90m 内时，则产品是合格的，否则为次品。我们分别抽取产品的 5 件、10件、60件、150件、600件、900件、1200件、1800件来检查，其情况如表1-1所示。

表1-1

抽取件数	5	10	60	150	600	900	1200	1800
合格产品数	5	7	53	131	548	820	1091	1631
合格频率	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

$$合格频率=\frac{合格数}{抽取件数}$$

【例 8】 表1-2是抛掷硬币的实验记录，其中m表示出现正面的次数，n表示抛掷硬币的

表1-2

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	$\frac{m}{n}$	m	$\frac{m}{n}$	m	$\frac{m}{n}$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502

次数，$\frac{m}{n}$表示出现正面的频率。

下面，我们来分析一下这两个例子。

为了统一起见，我们把例7中的产品检验也看作是一个试验，每批有多少件就看作是多少次试验，这样一来在例7和例8中的试验，每一次都有两种可能的结果，即“合格”与“不合格”，出现“正面”与“反面”。而且我们研究的是“合格”与“出现正面”。我们把相同条件下n次重复试验中某事件出现的次数称为频数，记作ν，并把事件的频数与试验的总次数之比$\frac{\nu}{n}$（n为试验总次数），称为在n次试验中事件出现的频率。

从表1-1中可以看到，当产品试验的次数，即每批的件数增大时，合格的频率稳定在0.9左右，根据这样的趋势，我们有理由认为，整批产品的合格频率应和0.9相差无几。从表1-2中可以看到，当试验次数逐步增大时，出现正面的频率，稳定在0.5左右。

由上面二例，揭出了随机事件的一个极重要的特性——**频率的稳定性**。而且这种稳定性是事件本身内在的，它不会因人而异。我们看到，在少数次的试验中，事件发生的频率有较大的波动，但在大数次的试验中，事件发生的频率虽然仍有微小的波动，却总是稳定在某一固定常数附近。随机事件频率的稳定性，对事件发生的可能性大小提供了可以比较的依据。在大数次的试验中，一种结果发生的频率高，自然以这个结果为内容的事件发生的可能性就大一些。我们就拿频率所靠近的那个固定常数作为衡量事件发生的可能性大小的尺度，这个数就称为事件的概率。

为了把问题说得具体些，假定一试验在相同的条件下可以无限次地重复，每一次试验的结果可能出现若干类，且出现每一种结果的频率都将稳定在某一固定常数p附近。现给出概率的**统计定义**如下：

在相同的条件下，共进行了n次重复试验，事件A发生的频率$W(A)=\frac{\nu}{n}$。当n充分大时，$W(A)$便以某常数$p(0\leqslant p\leqslant 1)$为中心做离差不大的摆动$\left(\text{即 }\frac{\nu}{n}\text{ 呈现出稳定性}\right)$。称$p$为事件$A$的概率，仍记作$P(A)=p$，即

$$P(A)=p\approx\frac{\nu}{n} \tag{1-2}$$

由于事件A的概率近似地等于事件A的频率，在前面介绍过的概率的四个性质，由概率的统计定义也可以直接推出。这里不再叙述。

理解概率的统计定义必须要把概率与频率两个基本概念区分开，否则将会导致一些错误的结论。

（1）随机事件的频率是与我们所进行的试验有关的，而随机事件的概率却是完全客观地存在着的。在实际进行的试验中，随机事件的频率可以看作是它的概率的随机表现。随机事件的概率表明，试验中综合条件与随机事件之间有完全确定的特殊的联系，它从数量上说明了必然性与偶然性的辩证的统一。

（2）随机事件的概率反映了大量现象中的某种客观属性，这种客观属性是与我们如何认识主体是无关的。不应该把概率看作是具有这种属性的主体对个别现象的信念程度。例如我们已知抛掷硬币的大量次试验“出现正面”的概率是0.5，但是不能因此认为抛掷二次时就

会出现一正面，一反面。有时一个人说某事件“可能发生”或“很少可能发生”，这仅表示说话的人对该事件发生的可能性大小的一个判断而已。因为一个现象不是发生就是不发生，所以就个别现象来谈概率是没有任何现实意义的。

（3）直接估计某一事件的概率是非常困难的，甚至是不可能的，仅在比较简单的情况下才可以直接计算随机事件的概率。通常我们把很多次试验中随机事件A的频率$\frac{v}{n}$当作概率$P(A)$的近似值，一般说来，概率$P(A)$这个单凭经验的估值，当试验次数愈多时就愈准确。相反地，如果已知事件A的概率，当试验次数很大时我们就能预测事件A将要发生的频数。

我们看到概率的统计定义虽然不再受n为有限及试验事件的等可能性的限制，但却是很不确切的，在很大程度上是凭直观的，只要仔细分析一下就会发现其中有不少问题。因为统计定义的主要依据是在试验次数充分大时，频率所呈现出来的稳定性这一事实，然而究竟次数应大到怎样的程度，以及所谓的稳定性又应如何理解，却没有确切的说明。这里的稳定性，并非为通常的数学分析中那样频率以概率p为极限的意思，而只是指随着试验和观察次数的增加，频率以越来越大的可能性接近于概率，这里，“越来越大的可能性”又涉及到另外一个概率，这从逻辑上讲是循环定义，因而是不合理的。

于是，建立一个一般的概型以便更广泛而确切地描述随机现象，从而更好地满足自然科学提出来的要求就显得十分必要了。

*三、概率的公理化定义

为了建立一般概型的概率的理论，从而克服其古典定义及统计定义的缺点，有必要把概率的概念在前面两种定义的基础上作进一步的深化，使之便于推导数学公式。

我们采取几何学中把客观实在的对象所具有的那种特性的抽象规定为几何公理，而后使得几何对象“点”、“线”、“平面”都满足这一组公理，进而建立几何学中的一系列的概念的办法。从上两种定义中我们看到概率概念确实是现实世界里面出现的某种规律性的真实反映。在给出公理之前首先说明事件体的概念。

如果集合S满足下述条件：

（1）$U\in S$；

（2）若$A_n\in S(n=1,2,\cdots)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in S$；

（3）若$A\in S$，则$\bar{A}\in S$。

则称S为**一事件体**

现设S是一事件体，A是S中一个事件：即A是S中的任一子集，如果p满足下述三个条件，则称之为事件体S上的一个概率函数。

（1）对S的每一事件A，对应一个数$P(A)$，且$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

（2）$P(U)=1$；

（3）如果A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$是S中的互不相容的可列个事件，即$A_iA_j=V(i\neq j=1,2,\cdots,n,\cdots)$则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$——这也叫概率的完全可加性。

有了上述的三条基本公理，其它的一些定理全可以按逻辑建立起来。

比如在前面证明过的概率的四个基本性质，全可以由上述三条进行推证：

性质1　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$　这正是公理1。

性质2　$P(U)=1$　这正是公理2。

性质3　$P(V)=0$

证明：$\because$　$U=V+U$

　　$\therefore$　$P(U)=P(V)+P(U)$　　（公理3）

但$P(U)=1$　　（公理2）

$\therefore$　$1=P(V)+1$　　于是得

　$P(V)=0$

性质4　$P(\bar{A})=1-P(A)$

证明：$\because$　$A+\bar{A}=U$

　　$\therefore$　$P(A+\bar{A})=P(U)=1$

　　而$P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$

　　即$P(A)+P(\bar{A})=1$

　　$\therefore$　$P(\bar{A})=1-P(A)$

有了这样的公理化定义之后，今后再提到概率这个词的时候，应该理解为它是定义在事件体上的一个函数，它的取值范围是闭区间〔0，1〕，对必然事件它取值是1，对于互不相容的和事件具有概率的完全可加性；在古典概型中它的表达式是$\frac{m}{n}$，在频率直接可测的概型中它取值为试验次数充分大时的频率的稳定值。

习　题　一

1.如果做一次抛掷两颗均匀对称的骰子的试验，试写出两颗骰子点数搭配情况的基本事件集E。又若用A表示“点数之和小于5”的事件，写出A中所含基本事件。

2.已知10件产品中有3件次品，每次从该10件中任取1件（取后不放回），直到将3件次品都取出为止。试写出抽取次数的基本事件集E。又若用A表示至多抽取8次即将3件次品抽出，写出A所包含的基本事件。

3.设A、B表示随机事件，用文字写出下述每个事件的含义。

（1）$\bar{A}+B$　　（2）$\bar{A}+\bar{B}$　　（3）AB

（4）$\bar{A}B$　　（5）$\bar{A}\bar{B}$　　（6）$\bar{A}A$

4.抽查5件产品，设A表示“至少有1件次品”，B表示“次品不少于2件”，问$\bar{A}$，$\bar{B}$分别表示什么事件？

5.在图书馆中任取一本书，设A表示“取到数学书”；B表示“取到中文版书”；C表示“取到70年后出版的书”。试问：

（1）$AB\bar{C}$表示什么事件？

（2）在什么条件下有$ABC=A$？

（3）$\bar{C}\subset B$表示什么意思？

（4）若$\bar{A}=B$，是否意味着：馆中所有数学书都不是中文版的？

*6.设A、B、C表示随机事件