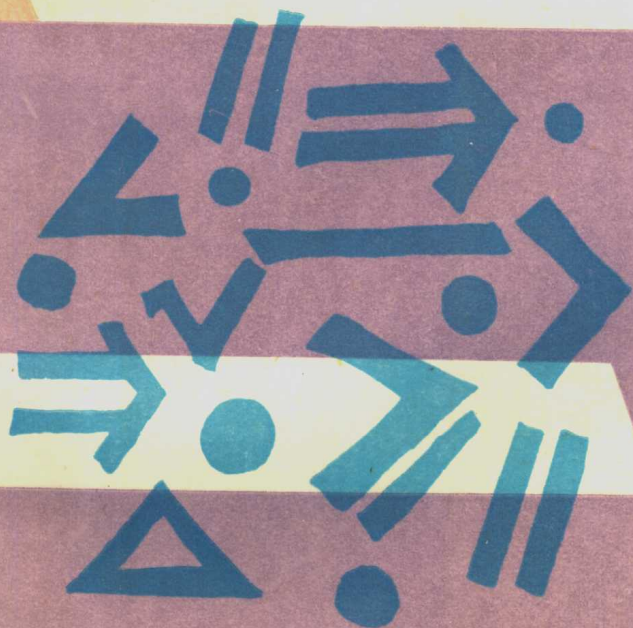


北京教育出版社

# 初中数学学习 200问

梁寿山 陈铭华 赵秀春 吴祈英 何慕贤



# 初中数学学习200问

梁寿山 陈铭华 何慕贤  
赵秀春 吴祈英

北京教育出版社

(京)新登字202号

初中数学学习 200 问

CHUZHONG SHUXUE XUEXI ERBAIWEN

梁寿山 陈铭华 何慕贤  
赵秀春 吴祈英

\*

北京教育出版社出版

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码: 100011

北京出版社总发行

新华书店北京发行所经销

香河县第二印刷厂印刷

\*

187 × 1092 毫米 32 开本 13.375 印张 290000 字

1993 年 3 月第 1 版 1993 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—6000

ISBN 7-5303-0436-4/G·411

定 价: 5.50 元

## 前 言

数学是一门基础课。随着科学技术的发展，数学的重要性被越来越多的人所认识。为此，我们遵照初中数学教材和教学大纲的要求，结合多年的教学经验，编写了《初中数学学习200问》，以供广大初中生课外阅读。

本书不同于一般的练习和总复习，它将我们多年教学中初中生经常提到的数学问题，归纳精选为200问，按初中数学内在结构体系，分为十三个大的类型。在解答每个问题时，对题意作了认真分析，有关基本概念的理解和运用，在书中亦有扼要说明，而且着重于认识和分析问题的规律性讲述，使之有助于读者开拓思路，培养其举一反三，触类旁通的能力，懂得如何对问题进行多方面、多角度的分析，学到能使问题化难为易，避免出错的解题方法和技巧。

在编写本书的过程中，我们力求做到内容系统，所列问题典型，解答能够准确。但由于水平有限，书中难免有差错和不妥之处，我们恳请广大读者批评指正。

北京市第二中学：梁寿山 陈铭华 何慕贤  
赵秀春 吴沂英

1992年6月

# 目 录

## 一 实数——数学的基础.....( 1 )

1. 什么样的数叫实数? .....( 1 )
2. 为什么说 $\sqrt{2}$ 是无理数? .....( 1 )
3. 数轴上有表示无理数的点吗? .....( 2 )
4. 如何证明 $\sqrt{3}$ 是无理数? .....( 3 )
5. 为什么奇数的平方一定是奇数? .....( 3 )
6. 数 $5K-1$  ( $K$ 为整数) 除以5, 余数是几? .....( 5 )
7.  $|a|$ 与 $a$ 哪个大? .....( 6 )
8. 实数 $a$ ,  $a^2 \geq 0$ 有什么应用? .....( 9 )

## 二 变化无穷的代数式.....( 13 )

9.  $(a+b)^6$ 和 $(a+b)^4$ 的展开式分别是什么? .....( 13 )
10.  $(a+b)^8$ 的展开式是什么, 联系上一个问题, 有什么规律? .....( 14 )
11. 什么叫做代数式的恒等变形? .....( 15 )
12. 如何用 $\alpha$ 、 $\beta$ 的和与积表示关于 $\alpha$ 、 $\beta$ 的对称式? .....( 17 )
13. 若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 均为实数,  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ 会是负数吗? .....( 20 )
14. 如何判断关于 $x$ 的多项式是否含因式 $x-a$ ? .....( 23 )

15. 对多项式进行因式分解时,怎样才算“分完”  
了? .....(25)
16. 换元法在因式分解中有什么应用? .....(27)
17. 什么叫做待定系数法? .....(29)
18. 待定系数法在因式分解中有什么应用? .....(31)
19. 怎样把繁分式较快地化简? .....(35)
20.  $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$  错在哪里? .....(37)
21. 如何识别同类根式? .....(41)

### 三 方程的理论、解法和应用 .....(44)

22. 一元一次方程一定有一解吗? .....(44)
23. 怎样解含字母系数的一元一次方程? .....(45)
24. 一个二元一次方程有几组解? 为什么? .....(46)
25. 二元一次方程组的解有几种情况? .....(47)
26. 公式变形可以看作解方程吗? .....(49)
27. 解一元二次方程只会用公式法行吗? .....(50)
28. 解方程  $(3x+1)(x-1) = (2x+3)(x-1)$   
时,为什么不能约去  $(x-1)$ ? .....(53)
29. 解分式方程为什么要验根? 怎样验根? .....(53)
30. 解一元二次方程为什么不必验根? .....(55)
31. 解无理方程为什么必须验根? .....(56)
32. 解字母系数的一元二次方程要注意什么? .....(58)
33. 如果知道一元二次方程的两个根能确定方程  
吗? .....(59)
34. 为什么要研究一元二次方程的根的判别式?  
.....(61)
35. 一元二次方程根的判别式为什么能判别实根

- 的情况? ..... ( 64 )
36. 可化为一元二次方程的分式方程的实根情况  
如何判断? ..... ( 66 )
37. 怎样判别有一个二元一次方程的二元二次方  
程组的实解情况? ..... ( 69 )
38. 一元二次方程判别式等于0时,为什么不说有  
一个实根,而强调有两个相等实根? ..... ( 71 )
39. 有一个一次方程的二元二次方程组什么时候  
会出现增解? 怎样避免? ..... ( 73 )
40. 二元二次方程组有哪些常见类型? 基本解法  
是什么? ..... ( 75 )
41. 用解一元二次方程的方法能解其它方程吗?  
..... ( 80 )
42. 含绝对值符号的方程怎么解? ..... ( 82 )
43. 用方程组怎么求 $7+2\sqrt{10}$ 的平方根? ..... ( 84 )
44. 什么是不定方程? 怎么解? ..... ( 87 )
45. 不定方程有什么应用? ..... ( 88 )
46. “秦王暗点兵”是怎么回事?能用方程解吗?  
..... ( 90 )
47. 有一个公共根的两个一元二次方程有什么关  
系? ..... ( 92 )
48. 怎么解一元二次方程中有一个公根的问题?  
..... ( 93 )
49. 一元二次方程中根与系数的关系是怎么推出  
来的? ..... ( 94 )
50. 一元二次方程的根与系数关系有什么应用?  
..... ( 95 )

51. 不解方程, 怎样判断一元二次方程的实根的正负? .....(102)
52. 根与系数关系的公式只有一元二次方程有吗? .....(103)
53. 一元一次方程的应用题有什么特点? .....(105)
54. 解应用题时列方程好, 还是列方程组好? .....(107)
55. 列代数方程解的简单应用题主要有哪些类型? .....(109)
56. 关于数的问题怎么列方程? .....(112)
57. 平面几何中的图形问题能用方程解吗? .....(113)
58. 什么是增长率? 有关增长率的应用题怎么解? .....(115)
59. 关于浓度的应用问题怎么布列方程? .....(116)
60. “相遇”和“追及”问题所列方程有什么区别? .....(118)
61. “时钟”问题怎么解? .....(120)

#### 四 初等数学的核心——函数 .....(123)

62. 为什么要引入平面直角坐标系? .....(123)
63. 什么是函数概念的三要素? .....(125)
64. 怎样确定函数中自变量的取值范围? .....(126)
65. 怎样表示函数? .....(129)
66. 什么是分段函数? .....(131)
67. 怎样画函数的图象? .....(132)
68.  $k$ 和 $b$ 怎样决定直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的位置? .....(133)
69. 解析式 $x = a$ 和 $y = b$ 对应的图形分别是什么? .....(135)



70. 二次函数解析式常用形式有几种? .....(136)
71. 如何确定二次函数解析式? .....(137)
72. 怎样计算抛物线在 $x$ 轴上截得的弦长? .....(141)
73. 抛物线 $y = ax^2$ 怎样变换为抛物线  
 $y = ax^2 + bx + c$ ? .....(142)
74. 系数 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的取值怎样影响抛物线  
 $y = ax^2 + bx + c$ 的形状及位置? .....(144)
75. 怎样求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最大值或  
 最小值? .....(146)
76. 当自变量 $x$ 的取值范围不是全体实数时, 怎  
 样求函数 $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的最大值  
 或最小值? .....(150)
77. 怎样解求二次函数最大值或最小值的应用  
 题? .....(153)
78. 当函数解析式中含有字母系数时, 你会对字  
 母进行讨论吗? .....(157)
79. 当函数解析式中含有绝对值符号时, 怎样画  
 出它的图象? .....(160)
80. 怎样确定抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线  
 $y = kx + m$ 的位置关系? .....(163)
81. 你会利用函数图象来解某些有关方程或不等  
 式的问题吗? .....(166)
- 五 应用广泛的不等式**.....(168)
82. 初中阶段应掌握不等式的哪些性质? .....(168)
83. 如何解一元一次不等式? .....(171)
84. 如何解不等式组? .....(174)

85. 如何解一元二次不等式? .....(177)
86. 一元二次不等式有何应用? .....(180)
87. 如何解形如  $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$  的分式不等式? .....(184)
88. 怎样确定  $ax^2+bx+c$  的符号? .....(186)
89. 二次三项式  $ax^2+bx+c$  的值的符号在解不等式中有何应用? .....(188)
90. 如何解某些高次不等式? .....(189)
91. 不等式  $|x| < a$  ( $a > 0$ ) 的解集是什么? .....(192)
92.  $a > 0$  时, 为什么有  $|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2$ ,  
 $|x| > a \Leftrightarrow x^2 > a^2$ . 有什么应用? .....(193)
93. 如何解含绝对值的不等式? .....(196)
94. 解不等式在根式中有什么应用? .....(198)
95. 解不等式在研究方程中有什么应用? .....(200)
96. 解不等式在函数中有什么应用? .....(202)

## 六 简洁的指数式 .....(204)

97. 指数式在运算中有什么应用? .....(204)
98. 当  $m, n$  均为有理数时,  $(a^m)^n = a^{mn}$  对吗? .....(206)
99. 为什么零的零指数幂没有意义? .....(206)
100. 为什么零的负指数幂没有意义? .....(208)

## 七 三角函数的广泛应用 .....(209)

101. 怎样理解三角函数的定义? .....(209)
102.  $0^\circ \sim 180^\circ$  角的三角函数有哪些性质? .....(211)
103. 应掌握的三角函数关系式有哪些? .....(212)
104. 怎样利用诱导公式解决计算问题? .....(214)
105. 已知角  $\alpha$  的一个三角函数值, 怎样求其它各

- 三角函数值 .....(215)
106. 怎样利用同角三角函数关系式解决求值问题?.....(216)
107. 已知 $\sin\alpha$ 、 $\cos\alpha$ 的值,能确定 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 和 $\sin\alpha - \cos\alpha$ 的值吗?.....(219)
108. 怎样证明三角恒等式?.....(221)
109. 在解三角题过程中,你是否对符号问题给予了足够的重视? .....(222)
110. 在三角中怎样用换元法解题?.....(224)
111. 由 $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ 乘积的符号能判断 $\triangle ABC$ 的形状吗?.....(225)
112. 怎样证明正弦定理?.....(225)
113. 怎样利用正弦定理解斜三角形?.....(227)
114. 已知三角形的两边及其中一边的对角,怎样解三角形?.....(228)
115. 什么情况下可利用余弦定理解三角形?.....(231)
116. 你会判断这些三角形的形状吗?.....(232)
117. 怎样求船和灯塔的距离?.....(234)
118. 你会利用测角器和皮尺测出气球的高吗?.....(234)
119. 在三角形中,三条边长的比等于三个角的比吗?.....(235)
120. 如何求三角式的最大值和最小值?.....(237)

## 八 图形的基础——相交线与平行线.....(240)

121. 平面几何是一门什么学科?为什么要学习平面几何?.....(240)
122. 什么是线段、射线、直线?如何表示?.....(241)

123. 几何课本中为什么要介绍两种角的定义?用什么方法来表示角较好?.....(242)
124. 度量角的单位是什么?度、分、秒如何互化?.....(243)
125. 怎么正确区分互余和互补的概念?.....(246)
126. 什么是对顶角?对顶角为什么相等?.....(247)
127. 怎样区别相交、斜线、互相垂直、垂线、垂足、点到直线的距离的含义?.....(248)
128. “三线八角”是指哪三条线?哪八个角?.....(250)
129. 怎样应用平行线的判定方法来证题?.....(251)
130. 命题与定理有什么联系和区别?.....(253)
131. 如何着手证明题?.....(254)
132. 怎样恰当应用角平分线的三种表示法?.....(258)

## 九 三角形的性质.....(261)

133. 如何找全等三角形的对应边和对应角?.....(261)
134. 判定两个三角形全等有几种方法?为什么角、角、角与边、边、角不能判定两个三角形全等?.....(263)
135. 怎样正确运用等腰三角形的性质定理和判定定理?.....(265)
136. 三角形边角不等关系证明的思路方法是什么?.....(266)
137. 如何解文字型的几何题?.....(270)
138. 如何作含有多个条件、多个结论的命题的逆命题?.....(271)
139. 轴对称图形与中心对称图形有什么区别和

- 联系?.....(273)
140. 应用基本作图如何解有关作图题?.....(274)
141. 三角形中经常添的是哪些辅助线?.....(277)
142. 添辅助线时应注意什么?.....(282)
143. 如何证三角形三条边上的垂直平分线交于一点?.....(283)
144. 如何证三角形三条角平分线交于一点?.....(284)
145. 如何证明三角形三条边上的高交于一点?.....(285)

#### **十、四边形的特点及相互关系.....(287)**

146. 如何推导多边形的内角和与外角和?.....(287)
147. 怎样计算多边形对角线的条数?.....(289)
148. 怎样掌握平行四边形的性质和判定方法?.....(290)
149. 证明一个四边形是矩形有几种途径?.....(293)
150. 证明一个四边形是菱形有几种途径?.....(295)
151. 正方形有什么特点?如何判定?.....(297)
152. 等腰梯形的性质是什么?怎样判定?.....(300)
153. 梯形常用的辅助线有哪些?.....(303)
154. 如何应用三角形、梯形的中位线有关性质来解题?.....(306)
155. 如何证明线段相等?.....(310)
156. 如何证明角相等?.....(313)
157. 如何证明线段与角的和、差、倍分关系?.....(315)
158. 如何证明线段与角的不等问题?.....(319)
159. 在平面几何中应该掌握的基本图形有哪些?.....(321)
160. 三角形及四边形的面积公式是什么?等积变形的作图如何进行?.....(324)

|                                                                  |       |
|------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>十一 相似理论及相似形</b> .....                                         | (330) |
| 161. 你会设“K”吗? .....                                              | (330) |
| 162. 为什么要重视平行线分线段成比例定理的学习?.....                                  | (332) |
| 163. 你会“转移”比例吗?——平行线分线段成比例定理的重要应用。.....                          | (334) |
| 164. 三角形内(外)角平分线性质定理的证明给了我们什么启示?.....                            | (336) |
| 165. 三角形角平分线性质定理的应用?.....                                        | (338) |
| 166. 如何判定两个三角形相似?——平行线与相似三角形。.....                               | (340) |
| 167. 如何判定两个三角形相似?——相交线与相似三角形。.....                               | (343) |
| 168. 如何判定两个三角形相似?——旋转与相似三角形。.....                                | (345) |
| 169. 射影定理有哪些主要用途?.....                                           | (346) |
| 170. 三角形中的三条中线为什么交于一点和如何证明重心定理?.....                             | (349) |
| 171. 什么是同一法?.....                                                | (350) |
| 172. 怎样证明线段成比例?.....                                             | (352) |
| 173. 你能用三角形的面积公式证明线段成比例吗?.....                                   | (355) |
| 174. 你会证明 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 型的问题吗? ..... | (357) |
| 175. 如何利用线段成比例证明线段相等?.....                                       | (360) |
| 176. 相似三角形与角相等有什么关系?.....                                        | (362) |

## 十二 与圆相关的概念与证明.....(365)

177. 垂径定理的逆定理有多少?.....(365)
178.  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$  的含义是什么?.....(367)
179. 怎样证明与圆有关的不等关系?.....(368)
180. 哪些角与圆有关及怎样应用?.....(370)
181. 反证法在几何中如何应用?.....(372)
182. 怎样证明四点共圆? (一).....(374)
183. 怎样证明四点共圆? (二).....(376)
184. 四点共圆有哪些应用?.....(377)
185. 直线和圆的位置关系的定理及其逆定理为  
什么能用等价符号, 即“ $\Leftrightarrow$ ”?.....(380)
186. 怎样判定直线和圆相切?.....(382)
187. 相交弦定理、切割线定理及其推论有无内  
在联系?.....(383)
188. 怎样证明与圆有关的线段成比例(一)?——  
基础题的证明思路。.....(385)
189. 怎样证明与圆有关的线段成比例(二)?——  
较复杂题的证明思路。.....(387)
190. 什么样的四边形有内切圆?.....(389)
191. 如何判定圆与圆的位置关系?.....(391)
192. 什么是定值与最值问题?.....(393)

## 十三 正多边形计算、作图及其它.....(396)

193. 正多边形外接圆半径与边长、边心距.....之  
间有什么关系?.....(396)
194. 什么是“倍边公式”及怎样应用?.....(399)

195. 正五边形作圆应该怎样证明?.....(401)
196. 什么是代数作图法?.....(403)
197. 命题的四种形式及其关系是什么?.....(406)
198. 怎样判定互为逆否命题是等价命题?.....(408)
199. 怎样求轨迹?.....(409)
200. 什么是交轨法作图?.....(411)



## 一 实数——数学的基础

### 1. 什么样的数叫实数?

有理数和无理数统称实数。

整数与分数统称有理数，因为整数可看成是分母为1的分数，所以有理数就是分数。也可以这样说：形如 $\frac{p}{q}$ （ $p, q$ 是整数，且 $q \neq 0$ ）的数叫做有理数。

在初中阶段，我们会把分数化成有限小数或无限循环小数，也会把有限小数化成分数。学了高中数学后，我们进一步会把任何一个无限循环小数化为分数。所以有理数一定是有限小数或无限循环小数。

无限不循环小数叫做无理数。显然，无理数不能用 $\frac{p}{q}$ （ $p, q$ 是整数，且 $q \neq 0$ ）的形式来表示。

综上所述，实数就是分数（有限小数或无限循环小数）和无限不循环小数。初中所学的数学内容，都在实数范围内研究。

### 2. 为什么说 $\sqrt{2}$ 是无理数?

我们知道，有理数都可以表示成 $\frac{p}{q}$ （ $p, q$ 是整数，且 $q \neq 0$ ）的形式。

要证明 $\sqrt{2}$ 是无理数，首先我们应知道 $\sqrt{2}$ 是实数中平