极限运算的方法和技巧

朱匀华

中学生读物

广东科技出版社

中学生读物

Jixian Yunsuan de Fangfa he Jiqiao

极限运算的方法和技巧

朱 匀 华

广东科技出版社

极限运算的方法和技巧

朱匀华

责任编辑　余芷君

*

广东科技出版社出版发行

广东省新华书店经销

广东第二新华印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　6.375印张　130,000字

1988年12月第一版　1988年12月第1次印刷

印数1－1,250册

ISBN 7－5359－0150－6

O·12　定价2.05元

内容简介

极限是中学数学中比较难掌握的内容之一．本书从指导学习的角度，通俗地讲述了极限概念，阐述了极限运算的一般方法和常用技巧，以帮助读者掌握三个基本方面(基本概念、基本方法和基本技巧)．

技巧的灵活运用是极限运算的重要环节．本书着重介绍了极限运算的四种常用技巧，并选编了许多典型例题，重在思路分析，揭示解题规律，以提高读者灵活运算的能力．

本书内容简明扼要，通俗易懂，文字叙述详细，便于自学．本书是以高中学生为主要对象的课外读物，它也适合中专学生和数学爱好者阅读，也可供中等学校的数学教师和职工学校、业余学校的学生参考．

写在前面

在1981至1983年间，笔者受中国数学会广东分会的委托，向部分中学教师和中学生作了数次关于《极限运算的方法和技巧》的专题讲座，这本小册子就是根据当时的讲稿改写而成的.

培养学生的思维能力，培养学生分析问题和解决问题的能力，这是中学数学教学的目的之一、本着这样的宗旨，书中针对初学者的困难，集中阐述了初等微积分中极限运算的一般方法和常用技巧，并注重解题的思路分析，以帮助读者提高灵活运算的能力.

本书除引言和结束语外分为四个部分，内容如下:

第一部分阐述了极限的概念，注重从直观描述到精确定义的分析，并着重介绍了利用定义验证极限的方法.

第二部分是纵的线索，它阐述了极限运算的一般方法.

第三部分是横的线索，它阐述了极限运算的常用技巧. 第二、第三部分是本书的重点，叙述详细，举例较多，着重通过例题的分析，揭示解题的规律.

第四部分综合了比较困难的一类问题——不定式的极限计算，除归纳常见类型的初等解法外，还扼要地介绍无穷小代换法则和洛必达法则. 虽然后两个内容超出中学数学的范围，但它们能起化难为易的作用，可以扩大学生的数学视野.

本书每个部分都编有适量的习题，并附答案或提示，供读者练习和研究.

本书可作为高中学生的课外读物，并适合中专学生以及有志于自学数学的青年和数学爱好者阅读，也可供中等学校的数学教师和职工学校、业余学校的学生参考.

在本书编写过程中，广州市执信中学叶世雄校长和原广东拖拉机厂职工大学陈竞芬老师提出了许多宝贵意见和积极建议，在此一并表示衷心的感谢！

最后，对于这本书中的缺点和错误，殷切希望得到读者的批评和指正.

朱匀华

1983年7月于康乐园

1987年7月修订

目　录

引言　从龟兔赛跑的诡辩谈起

同学们！你们听过一个关于龟和兔赛跑的数学诡辩问题吗？这个诡辩问题是这样的：

假定兔子在乌龟后面10米，它们同时出发，兔子的速度是乌龟速度的10倍，但是兔子永远追不上乌龟．为什么呢？这是因为：当兔子跑了10米时，乌龟爬了1米；当兔子又追了1米时，乌龟又爬了$\frac{1}{10}$米；当兔子又追过$\frac{1}{10}$米时，乌龟又再爬了$\frac{1}{100}$米；当兔子又追过$\frac{1}{100}$米时，乌龟又再爬行了$\frac{1}{1000}$米；……．这样不断地追下去，乌龟总是在兔子的前面，兔子永远追不上乌龟．

当然，说兔子永远追不上乌龟，谁都不会相信．可是你们要指明它的错误在哪里却是不容易的．你们知道这个诡辩问题的要害在哪里吗？用什么方法可以驳倒这个诡辩呢？如果你们想了解其中的奥妙，科学地驳倒这个诡辩，就要懂得极限的概念，还要掌握极限运算的方法．本书第二部分对这个问题进行了剖析，给你们一个完整的解答．

极限方法是人们从有限中认识无限，从近似中认识精确的一种数学方法．极限是微积分的基础部分，极限运算又是微积分的基本运算之一．学过极限的同学都会知道，计算极限是需要掌握一定的方法和技巧的．比如，下面这样一个根号重迭的有趣数列：

$$a_1=\sqrt{2},$$

$$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$a_4=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

……

$$a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{层根号}},$$

……

你们可曾想出应当用什么方法求这个数列的极限呢？在计算极限的过程中，需要运用什么技巧呢？读完这本书后，你们就可以在本书的第二部分和第三部分找到两个技巧不同的解答方法了.

在学习极限时，你们可能觉得极限运算的规律不好掌握.诚然，微积分中的一些极限计算问题，要用很巧妙的方法或很高的技巧才能解决，但大多数极限计算问题都有一定的规律可循.象刚才谈到的这个数列，尽管它根号重迭，但只要你了解了这一类极限的运算规律后，就不会感到伤脑筋而无从下手了.

今天，微积分这门学科已经成为自然科学和工程技术中广泛应用的一种基本数学工具了.不仅学数学的需要它，学物理、学化学、学工程的需要它，学天文、学地理、学生物的需要它，甚至学农、学医、学经济、学哲学的也要用到它.因此，我们学好微积分的基础——极限，熟练地掌握极限运算的方法和技巧，不但对于学好微积分来说是必须的，而且对于学好现代科学技术知识来说也是重要的.

学数学跟干任何事情一样，都是有规律性的，摸到了规律就容易掌握.应当如何掌握极限运算的一般方法和常用技巧呢？这本小册子可能给你们一些帮助.

第一部分　极限定义和验证极限的方法

极限概念是微积分中最基本和最重要的概念．微积分就是以极限作为基本工具，来研究函数的微分与积分的理论和应用的一门学科．在微积分中几乎所有的基本概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限来描述的．因此，很好地理解极限概念，是学好微积分的一个关键．

本书只谈到学习初等微积分所必须的两种极限，即数列极限和函数极限．

§1.1数列的极限

早在两千年前人类就有了朴素的极限观念，但直到19世纪，极限概念才得到严格的叙述．可见，极限概念的形成经历了漫长的岁月．

在中学课本里，引进了严格叙述的数列极限定义．由于这个定义比较抽象，不易理解，以致一些初学者感到困难．然而，难和易是相对的，如果我们在学习过程中能够注意这一个定义怎样从实例抽象出来，并注意到极限概念的三个方面：直观描述、精确定义和几何解释．那么，我们就能较为清楚地理解数列极限的概念．下面就先从这三个方面来分析，然后再谈到数列极限的验证方法．

一、直观描述

什么是数列的极限呢？请先看下面两个实例.

例1 一个弹性球从高处自由下落，每次落地后都反弹起来. 假设弹性球起初的高度是1米，在不断反弹的过程中，弹性球每一次落地后，能反弹到原来高度的十分之九. 试问弹性球落地 n 次后，反弹的高度是多少？又弹性球的落地次数 n 无限增大时，它反弹的高度怎样变化？

我们来考察，这个弹性球在不断反弹的过程中，它的反弹高度如何随着落地次数的增加而改变. 因为弹性球每落地一次后，能反弹到原来高度的十分之九. 所以弹性球第1次落地后，反弹的高度是

$$a_1=\frac{9}{10}=0.9(\text{米}),$$

弹性球第2次落地后，反弹高度是0.9米的十分之九，因而反弹的高度是

$$a_2=0.9\times\frac{9}{10}=0.9^2(\text{米}),$$

依此类推，由于弹性球在不断反弹的过程中，每落地一次后，能反弹的高度都是上一次高度的十分之九，因而弹性球第 n 次落地后，反弹的高度是

$$a_n=0.9^{n-1}\times\frac{9}{10}=0.9^n(\text{米}). \tag{1-1}$$

这个式子反映了弹性球的反弹高度如何随着落地次数增加而改变的变化规律，它具有这样的变化趋势：

当落地次数 n 无限增大时，弹性球反弹的高度 0.9^n 无限趋近于常数0.

在这种情况下我们就说，当落地次数 n 趋向于无穷大时，弹性球反弹的高度0.9^n以 0 为极限，并记为

$$\lim_{n\to\infty}0.9^n=0.$$

这个式子读作“当 n 趋向于无穷大时，0.9^n的极限等于 0”．符号“$\to$”表示“趋向于”，“∞”表示“无穷大”，“$n\to\infty$”表示“n 沿着自然数1，2，…无限增大”的变化过程．

如果撇开例 1 的实际意义，而把弹性球每落地一次后，它反弹的高度数值依次排列起来，那么可以得到一个数列

$$0.9,\ 0.9^2,\ \cdots,\ 0.9^n,\ \cdots; \tag{1-2}$$

这个数列的通项公式就是(1-1)式．我们看到这个数列中的项具有这样的变化趋势：当项数 n 无限增大时，项0.9^n无限趋近于常数 0．这时我们就说数列(1-2)以 0 为极限．

例 2　两千年前，我国的惠施在庄子的《天下篇》中有一句名言：“一尺之棰，日取其半，万世不竭．”试分析这句古语．

这句古语的意思是说：“有一根一尺长的木棒，每天截下前一天留下来的一半，永远也截不完．”

我们来考察，每天所剩余的木棒长度如何随着天数的变化而改变．因为日取其半，所以第 1 天剩余的木棒长度为

$$a_1=\frac{1}{2}\ （尺），$$

第 2 天截下$\frac{1}{2}$尺的一半，所以剩余的木棒长度为

$$a_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ （尺），$$

依此类推，第 n 天剩余的木棒长度为

$$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^n}\ （尺）. \tag{1-3}$$

这个式子反映了每天所剩余的木棒长度如何随着天数的增加而改变的变化规律，它具有这样的变化趋势：

当天数 n 无限增大时，剩余的木棒长度$\frac{1}{2^n}$无限趋近于常数0．

在这种情况下我们就说，当天数 n 趋向于无穷大时，剩余的木棒长度$\frac{1}{2^n}$以 0 为极限．并记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

我们又从另一方面来考察，截下的木棒总长度如何随着天数的变化而改变．第 1 天截下的木棒总长度为

$$b_1=\frac{1}{2}\ (\text{尺});$$

到第 2 天截下的木棒总长度为

$$b_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ (\text{尺});$$

依此类推，到第 n 天截下的木棒总长度为

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\\&=1-\frac{1}{2^n}\ (\text{尺}).\end{aligned}\tag{1-4}$$

这个式子就反映了截下的木棒总长度如何随着天数的增加而改变的变化规律，它具有这样的变化趋势：

当天数 n 无限增大时，截下的木棒总长度$(1-\frac{1}{2^n})$无限趋近于常数1．

在这种情况下我们就说，当天数 n 趋向于无穷大时，截下

的木棒总长度$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$以 1 为极限. 并记为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

如果撇开例 2 的实际意义，而把每天所剩余的木棒长度数值与截下的木棒总长度数值分别依次排列起来，那么可以得到两个数列:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots. \tag{1-5}$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \cdots,\ \left(1-\frac{1}{2^n}\right),\ \cdots. \tag{1-6}$$

这时(1-3)式和(1-4)式就分别是数列(1-5)和(1-6)的通项公式. 我们看到这两个数列中的项具有这样的变化趋势: 当项数 n 无限增大时，数列(1-5)中的项$\frac{1}{2^n}$无限趋近于常数 0，而数列(1-6)中的项$(1-\frac{1}{2^n})$无限趋近于常数 1. 这时我们就说数列(1-5)以 0 为极限，数列(1-6)以 1 为极限.

一般地说，如果数列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

中的项具有这样的变化趋势: 当 n 无限增大时，项 a_n 无限趋近于某一个常数A，那么我们就说，数列$\{a_n\}$以常数 A 为极限. 且记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A.$$

上面关于数列极限概念的描述，只能算是直观的描述，这样描述的定义在运用极限进行推理时是会碰到困难的，况且利用直观描述来判断，也容易发生错误(关于这一点，读

者从第四小节的例子中，将会看到），所以还必须对数列极限作确切的刻划，把直观描述上升为严格叙述的精确定义.

二、精确定义

上面关于数列极限的直观描述中，有一个涉及到极限本质的问题，这就是："当 n 无限增大时，a_n 无限趋近于常数 A" 的真正含义是什么？弄清这点是掌握数列极限概念的关键.

用句通俗的话来说，"当 n 无限增大时，a_n 无限趋近于常数 A" 的意思是："a_n 可以任意地靠近 A，希望要多近就能有多近." 说得详细些，它指的是："a_n 可以任意地靠近 A，希望要多近就能有多近，只要 n 充分大时，就可以达到我们希望的那样近." 换句话说，就是指："距离 $|a_n-A|$ 可以任意地小，希望要多小就能有多小，只要 n 充分大时，就可以达到我们希望的那样小."

现拿数列(1-6)来说，若取0.1作标准，那么只要项数 $n>3$，就有

$$|a_n-1|=\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{10}=0.1;$$

如果认为0.1还不够小，要选0.01作标准，那么只要 $n>6$，就有

$$|a_n-1|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}=0.01;$$

如果嫌0.01仍不够小，要选更小的0.001作标准，那么只要 $n>9$，就有

$$|a_n-1|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1000}=0.001;$$

如果想选再小的0.0001作标准，那么也只要 $n>13$，就有

$$|a_n-1|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{10000}=0.0001;$$

……

总之，任意给出一个无论多么小的正数 ε 作标准，只要这个 ε 一经给定，那么对数列(1-6)来说，总可以确定一项(设为第 N 项)，使得随后的所有项(即满足 $n>N$ 的一切 a_n)，都有

$$|a_n-1|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

上述过程可以概括在如下的表格中:

给定正数	可以确定一个项数	使得当…时	恒　有
0.1	3	$n>3$	$\|a_n-1\|<0.1$
0.01	6	$n>6$	$\|a_n-1\|<0.01$
0.001	9	$n>9$	$\|a_n-1\|<0.001$
0.0001	13	$n>13$	$\|a_n-1\|<0.0001$
…	…	…	…
ε	N	$n>N$	$\|a_n-1\|<\varepsilon$

上面表格中的最后一行是很关键的，它把数列(1-6)“无限趋近于 1 ”的本质确切地刻划出来了，把它概括为一般情形，就抽象出用 ε 和 N 描述的数列极限的精确定义(简称为“$\varepsilon-N$”定义).

定义一 设有数列$\{a_n\}$，而A是一个常数．如果任意给定一个无论多么小的正数ε，都存在一个正整数N，使得当$n>N$时，恒有

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

成立，则称数列$\{a_n\}$以常数A为极限，且记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \quad 或 \quad a_n\to A \quad (n\to\infty).$$

初学极限时，不但要从字面上看懂这个定义，而且要从实质上理解这个定义．这个定义有三个要素：

(1)正数ε；

(2)正整数N；

(3)不等式$|a_n-A|<\varepsilon \quad (n>N)$．

首先，定义中的正数ε是一个距离指标，用来刻划a_n与A的接近程度．正数ε具有二重性：一是任意性，即ε可以任意选取，由此保证了a_n与A可以接近到任何程度，这样才能刻划a_n无限趋近于A；二是相对固定性，ε虽然可以任意给定，但一经给定就相对固定下来，作为一个固定的正数看待．

其次，定义中的正整数N是一个特定的项数，它是在ε固定后确定的，而又只能在ε给定后才能确定，它依赖于ε，大体说来，ε变小，N就变大．我们还要注意，对一个固定的ε来说，合乎定义要求的正整数N不是唯一的．比如，前面所说的例子，当$n>3$时，有$|a_n-1|<0.1$成立，这时取$N=3$．若不取$N=3$，而改取$N=4$，则当$n>4$时，更有$|a_n-1|<0.1$成立．总之，改取比3大的正整数作为N都可以，我们所关心的不是正整数N的大小，而是正整数N是否存在．