中学理科学习指导丛书

北京市海淀区教师进修学校主编

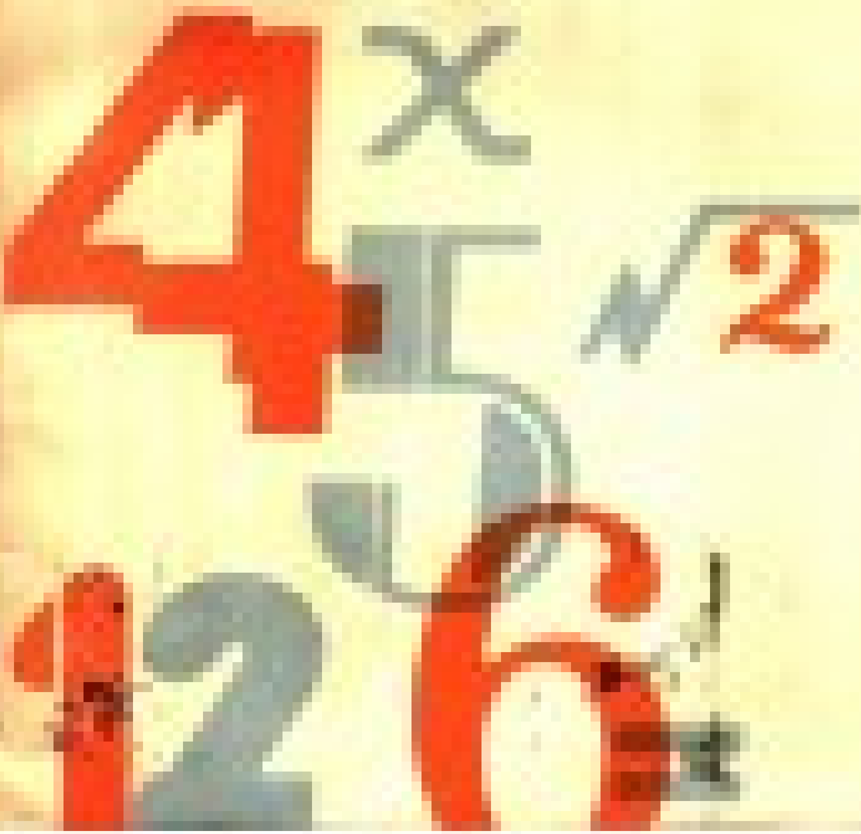
重庆出版社

高二代数

辅导与练习

高二代数

辅导与练习



中学理科学习指导丛书

高二代数辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重 庆 出 版 社

一九八五年·重庆

编　者

北京市十九中	段发善
北京市花园村中学	陶大裕
北京市二十中	范登辰
北京市北大附中	陈剑刚
北京市海淀区教师进修学校	张士充　赵大悌

审定　张士充　赵大悌

责任编辑　尹明善

高二代数辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
新华书店重庆发行所发行
达县新华印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张9　字数204千
1985年7月第一版　1985年7月第一次印刷
印数：1—936,200

书号：7114·302　定价0.96元

前　　言

长期以来，我们感到：学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料，教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这个问题，我们组织了一些有教学经验的教师编写了这套丛书。

通过教学实践，我们认识到：

(1) 只有把知识的结构分析清楚了，知识才易于学生理解、记忆和运用，从而掌握知识的整体。

(2) 打好基础，是学生学好全部知识的前提．在基础知识中，重点和难点掌握不好，是有些学生学习不好的原因之一。

(3) 引导学生对所学过的主要题型做到心中有数，同时又掌握各级题型的解题规律，是帮助学生消化知识提高解题能力的有效途径。

(4) 对于学习较好的学生，在学好基础知识的前提下，要不断提高他们综合运用知识，以及把知识向深、广两个方面进行适当引申的能力。这不但是可以的，而且是应该的。

(5) 知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固。

基于以上认识，本书在编写时，各章都包含以下几个部分：

（1）结构分析：有些章分析的较简单，可以在学习开始时看，有些则分析得较深入，可以在学完全章后再看。

（2）重点和难点分析：说明重点内容的重要性在哪里，特别是如何通过它们贯通全章内容；说明难点之所以困难的原因，特别是通过解决难点能学到哪些思考方法，解题技巧，和促进哪些能力的增长。

（3）各级题型：配以典型的例题，并说明解题规律。

（4）自我检查题：在每单元之后，配备知识面尽量全，并具有一定综合性，用以检查本单元学习的一套题目，以帮助学生了解自己学习后的收获与存在的问题。

（5）启发与体会：着重介绍教师的经验和体会，教科书上一般不讲的思路、观点、方法，适当启发学生对所学知识作更深入的思考。

本书尽量作到以上各项中的要求；希望既紧密配合教材，又不重复教材。但是限于编者水平，未必都能做到，不免会出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给予批评和指正。

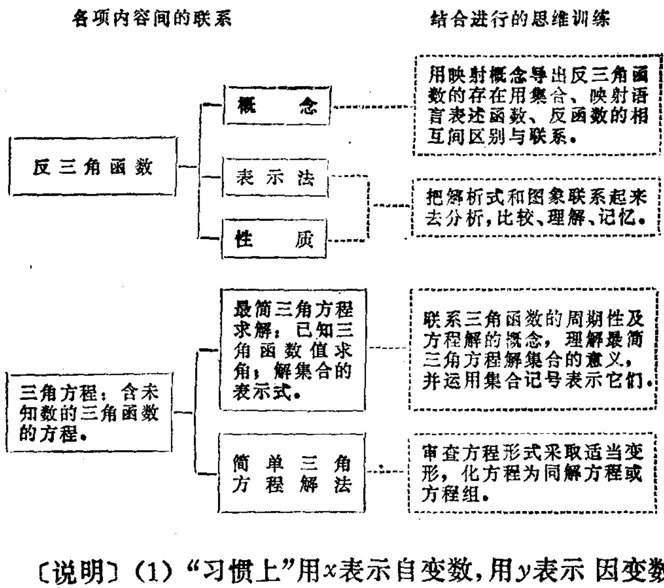
北京市海淀区教师进修学校

1985年1月

目　　录

第一章　反三角函数和简单三角方程

一　结构分析



〔说明〕（1）“习惯上”用x表示自变数，用y表示因变数，是因为我们总把函数的定义域用横轴（x-轴）上的点集表示，值域用纵轴（y-轴）上的点集表示。这样，就便于比较不同函数的图象；例如，把函数及其反函数的定义域同用x-轴上的

点集表示，则看出两图象关于直线$y=x$对称。

（2）反正弦、反正切函数为增函数，且为奇函数，即有性质$f(-x)=-f(x)$；反余弦、反余切函数为减函数，且有性质$f(-x)=\pi-f(x)$（如$\operatorname{arc}\cos(-x)=\pi-\operatorname{arc}\cos x$，$\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-x)=\pi-\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x$）；反余弦、反余切函数的这个性质说明什么呢？把它改写成$f(-x)-\frac{\pi}{2}=-\left[f(x)-\frac{\pi}{2}\right]$，再把表示奇函数的关系式改写成$f(-x)-0=-[f(x)-0]$，将两者比较，能得到什么结论呢？（结合图象来想想！）。你能（用分析法）证明$\operatorname{arc}\cos x-\frac{\pi}{2}$是奇函数吗？

（3）最简三角方程如$\sin x=a$，其中a表示已知数，x表示未知数，$\sin x$是未知数的三角（正弦）函数。求解这种（最简）三角方程，相当于过去学过的“已知三角函数的值求角”。“求角”这种说法，同学们比较易于想象；但更确切地说，应是“求角所对应的数值”，如采用弧度制则是弧度数；解集合是实数集（不是角的集合）。若用集合、映射的语言来说“解最简三角方程$\sin x=a$”，即是对函数$\sin x$作为从定义域到值域的映射，已知其象集合中元素（值域中函数值）如$a=1$，求所对应的原象集合中元素（定义域中自变数值）如$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in z$。这很象求函数$\sin x$的反函数的值，或求逆映射的象；但$\sin x$，$-\infty<x<+\infty$不是单调函数，所对应的映射不是一一映射，不存在逆映射，反函数。只有当把定义域局限在$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin x$才有反函数；此时求解$\sin x=1$，就可

以先求反正弦函数arc $\sin(1)$的值$\left(\frac{\pi}{2}\right)$，再根据$\sin x$的周期性得到方程 $\sin x=1$ 的解集，并写为$\{x|x=2k\pi+\text{arc}\sin(1),\ k\in z\}$。据此，$\sin x=-1$的解集则可写为$\{x|x=2k\pi+\text{arc}\sin(-1),\ k\in z\}$。统一的写为$\{x|x=2k\pi+\text{arc}\sin a,\ k\in z\}$，表示$\sin x=a$当$|a|=1$时的解集合。类似的，可得$\sin x=a$，当$|a|<1$时的解集合的表示式$\{x|x=k\pi+(-1)^k\text{arc}\sin a,\ k\in z\}$。

二 重点、难点分析

本章的重点是反三角函数的定义和性质以及最简三角方程的解法，其中反三角函数概念的建立以及符号的确定是难点。

. 反三角函数概念

(1) 反函数的定义是建立反三角函数的基础

我们在前面已经学了反函数的定义，这个定义是：如果确定函数$y=f(x)$的映射$f: A\to B$是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射，那么这个映射的逆映射$f^{-1}: B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数。习惯上，自变量(定义域中的元素)总用x表示，函数(值域中的元素)总用y表示，所以，将$x=f^{-1}(y)$改记为$y=f^{-1}(x)$(此时$x\in B$，$y\in A$)。根据这个定义，只有当$y=f(x)$所确定的对应关系是从定义域到值域的一一映射时，它才有反函数，这个反函数就是

逆映射$f^{-1}: B \to A$所确定以B为定义域A为值域的函数。所以，函数和它的反函数是"定义域与值域互换，对应关系逆转"的两个不同而又相互联系的函数。对于有反函数且有解析式的某些函数，由函数求反函数的步骤是先由解析式$y=f(x)$解出$x=f^{-1}(y)$，目的在于得到逆对应的解析式$f^{-1}(y)$；此时y表示原来的函数的值域中即反函数的定义域中的元素；为了总用x表示任何函数的定义域中的元素，再改记为$f^{-1}(x)$。

（2）确定各个三角函数的映射不是从定义域到值域的一一映射，因此，在整个定义域上没有反函数。这是为什么？请你仔细观察下面的各个图形：图1-1到图1-4，并回答下列两个问题：

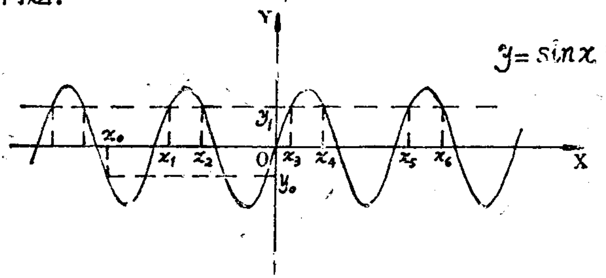


图1-1

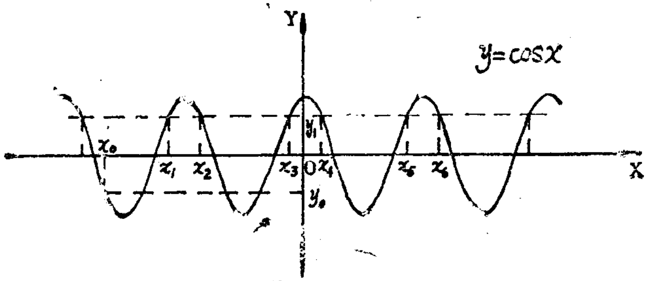


图1-2

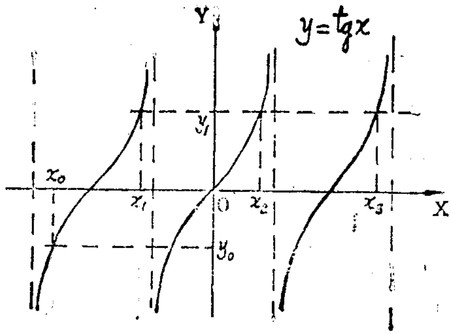


图1-3

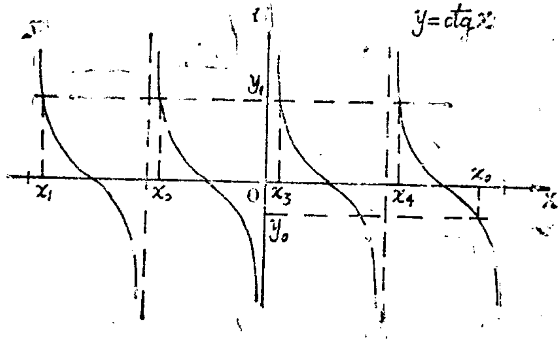


图1-4

① 对于各三角函数定义域中的每一个元素，在值域中有多少个象？

② 对于值域中的每一个元素，在定义域中有多少个原象？

从以上各图中可以看出：对于定义域中的每一个元素，比如$x=x_0$(它表示角)，在值域中只有唯一的象$y=y_0$(它表示三角函数值)，但是，反过来对于值域中的每一个元素，

比如$y=y_1$，在定义域中有无穷多个原象$x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots\cdots$这种现象出现的原因就是因为三角函数不是单调的而是周期函数，自变量x在变化过程中，每增(减)一定的值时，对应的函数值便重复一次，因此，当给定一个函数值时，自变量x就有无穷多个值和它对应，这种情况我们在学习已知三角函数值求角时已经熟悉了，它说明各三角函数都不是从定义域到值域的一一映射。

（3）要想建立三角函数的反函数，必须在定义域上适当选取一个子集，使得各三角函数成为从这子集到值域的一一映射，当然对不同的三角函数所选取的子集是不同的。

那么，这样的子集应该怎样选取呢？我们一般是根据以下几点要求来选取：

① 在这个子集上，三角函数是单调函数；

② 在这个子集上，三角函数可取得它能够取得的一切值；

③ 在这个子集上，包括一切锐角。

只要满足了前二条就能达到“一一映射”的目的，而第三条只是为了研究问题的方便。

函数$y=\sin x$定义域是R，$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$是它的一个子集，值域是$[-1, 1]$，在这个子集上的图象如图1-5所示，从这图可以看出：$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的、连续的、函数$y$可以取得$[-1, 1]$上的一切值，这就保证了对于$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上的每一个$x$的值，在$[-1, 1]$上都有唯一的值

和它对应，而且不同的x值对应不同的y值；反过来，对于$[-1, 1]$上每一个y值，在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上只有唯一的$x$值和它对应，这就说明$y=\sin x$是从$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上到$[-1, 1]$上的一一映射，因而具备了建立反函数的条件。

与此类似，根据上面所提的三点要求，我们在$y=\cos x$、$y=\mathrm{tg}x$、$y=\mathrm{ctg}x$的定义域上分别选定子集$[0, \pi]$、$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$、$(0, \pi)$，使得：

$y=\cos x$是从$[0, \pi]$上到$[-1, 1]$上的一一映射，如图1-6；

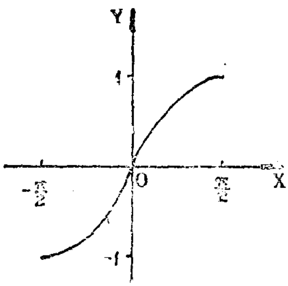


图1-5

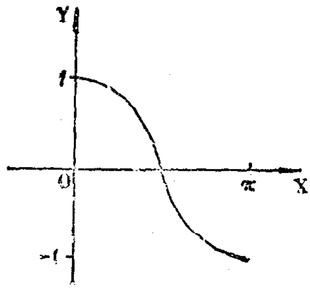


图1-6

$y=\mathrm{tg}x$是从$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内到$R$上的一一映射，如图1-7；

$y=\mathrm{ctg}x$是从$(0, \pi)$内到R上的一一映射，如图1-8。这就具备了建立各自的反函数的条件。

(4) 反三角函数的建立及它们的符号$\arcsin x$、$\arccos x$、

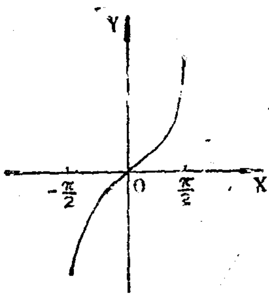


图1-7

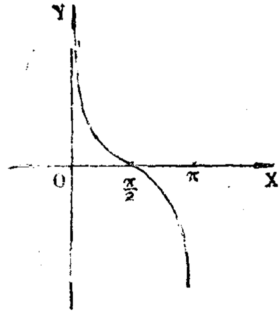


图1-8

arc tg$x$、arc ctg$x$的意义。

根据逆映射和反函数的定义，按下列表中步骤来建立反正弦函数：

步　　骤	对应关系	定　义　域	值　　域
一一映射 $f(x)$	$x \to y = \sin x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$y \in [-1, 1]$
逆映射 $f^{-}(y)$	$y \to x = \arcsin y$	$y \in [-1, 1]$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
习惯形式 $f^{-1}(x)$	$x \to y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

上面表中的逆映射 $f^{-1}(y)$ 所确定的函数关系式 $x = \arcsin y$ 就是 $y = \sin x$ 的反函数，y是自变量，x是y的函数。由于$y = \sin x$是超越函数，我们不可能象代数函数(比如$y = kx + b$)那样将x从中解出来表示为一个以y为自变量的函数关系式，因此，只能用一个符号来表示这个反函数，这个