立体几何例题和习题

高考复习参考丛书

高考复习参考丛书

立体几何例题和习题

孙金铭　王志亭　苏继昌

甘肃人民出版社

封面设计　陆惟宁

高考复习参考丛书

立体几何例题和习题

孙金铭　王志孚　苏继昌

甘肃人民出版社出版

（兰州庆阳路230号）

甘肃省新华书店发行　　天水新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张4.25　字数90,000

1980年3月第1版　　1980年3月第1次印刷

印数1——120,300

书号[illegible]96·56　　定价：0.31元

出版说明

《高考复习参考丛书》是为了帮助参加高考的青年复习时参考用的，也可作为在校高中学生课外阅读和社会青年自学的参考读物。

这套丛书，主要是根据教育部新编中学各学科教学大纲（征求意见稿）的要求，并参考近两年来全国高考复习大纲和全国高考试题而编写的，将按高中各学科分政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理、英语等几个方面分册陆续编辑、出版。在编写体例上，有的本子以解题为主，有的本子则以讲述基础知识为主，附有部分题解。

我们编辑、出版这类读物还没有经验，缺点和错误在所难免，希望广大读者提出指正意见，以便不断修改，使其日臻完善。

前　言

本书根据教育部中学数学教学大纲（草案）的立体几何部分编写而成。全书共分三章，分别选编了立体几何基础知识、多面体和旋转体三方面的例题，并做了解答。在编写过程中，根据编者的教学实践，力求选题典型，解法简捷，有的题给出了多种解法。例题之间有一些文字叙述，主要是解法分析，指出题与题之间的联系，并把某些立体几何的问题同平面几何加以对照，以利加深理解。每章前面都有内容概述和解题要点，后面附有练习题。

由于我们思想和业务水平低，加之时间仓促，书中存在缺点错误，望广大读者批评指正。

编　者

1979年12月

目　　录

第一章　直线与平面

立体几何是研究空间图形的形状、大小和各种位置关系的科学。由于空间图形的各部分不全在同一个平面内，所以它们比平面图形的位置关系更为复杂。在“直线与平面”这一章内，主要使学生建立正确的空间概念，明确空间图形的各种位置关系（一般地归结为直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系）及其判定，培养学生的空间想象能力和逻辑推理能力，为系统地研究后面两个部分在理论上打下基础。

学习立体几何应以平面几何为基础。解立体几何的题，往往是从立体图形转化为解决平面图形的问题，因此对平面几何有关定理和性质必须熟悉。此外，在立体几何中有许多定理和平面几何相类似，只要我们把平面几何中定理的点换作直线，所有的直线或某几条直线换作平面，就可以得到相类似的立体几何定理。例如平面几何中“一直线垂直于两条平行线中的一条，也必定垂直于另一条”，立体几何中类似地有“一直线（或一平面）垂直于两个平行平面中的一个，也必定垂直于另一个”。但也有不类似的，例如平面几何中“两直线都垂直于第三条直线，那末这两条直线互相平行”。我们把直线都换成平面，就成了“两平面都垂直于第三个平面，那末这两个平面互相平行”，显然不成立。因此，我们在学习中，要仔细推敲，认真分析，加以类比，联系记忆，

这样学习才能有所收益。

看空间图形或作图时，不能全凭直觉，而应该根据题意，领会图形的实况（必要时要作出简单的模型，加以想像），再和画出的图形对比，这样就不致发生误解或错误。

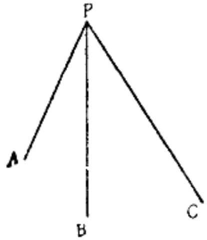

图 1—1

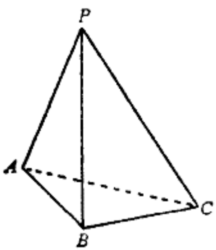

图 1—2

一般来讲，平面本来是可以向四面无限伸展出去的，但为了表示它的存在，通常就用平行四边形来表示。如三面角上的三个面，虽然各有两条直线的边界，但如果画成图1—1的形状，就不易辨认它是一个三面角，必须画成图1—2的形状，才能显示出三面角的三个平面。图中AC必须画成虚线，表示被平面PAB和PBC所遮蔽。(这里的虚线和平面几何中的虚线有完全不同的意义，在平面几何中，虚线是作为辅助线而出现的）如果画成实线，就会误认为是平面的四边形和它的两条对角线，而不是立体图形了。

对于空间图形的作图，有如下的规定：

1.如果已知确定一个平面的位置条件（例如不在一条直线上的三个已知点），这平面就认为是可以作成的，题1、题2的平面就是这样确定的。

2.如果已知两条相交的平面，它们的交线就认为是可以

作的，例如题4、题7的交线就是这样确定的。

3.如果已知空间的一个平面，就认为在这个平面内能完成平面几何中所能完成的一切作图．例如题30中有这样的作图。

除要弄清直线、平面的各种位置关系的重要定理外，还特别要注意区分下面的各种重要的定义和有关概念：

1.异面直线和异面直线所成的角；

2.两直线互相垂直；

3.一点到一平面的垂线和斜线的长度；

4.距离——两点之间的距离；点到直线、点到平面的距离；直线到直线、直线到平面的距离；平面到平面的距离；

5.直线和平面所成的角；

6.二面角的平面角；

7.多面角的二面角和多面角的面角.

直线与平面以及平面与平面都只具有三种位置关系，就是重合、相交和平行.至于直线和平面垂直，平面与平面垂直，只不过是相交的特殊情况．在解立体几何题的时候，首先要确定这些关系，否则就无从下手．同时，应注意只有将所有的位置关系加以讨论，才能得到完整的结论（例如题7就考虑到了各种情况），否则，就会引出错误的结果。

三垂线定理和它的逆定理的应用很广泛，这一方面选的题较多．我们应用三垂线定理可以判定不相交两直线的垂直．如图1—3，已知平面N内的一条直线a，垂直于斜线PA

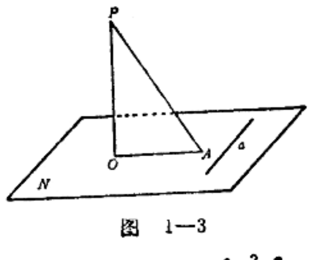

图 1—3

在平面N内的射影AO，那末a⊥PA，而a和PA并不相交。此外，我们还可以应用三垂线定理判定图形的形状，特别是判定直角三角形。如图1—4，VA垂直于平面M，ABCD是平面M内的正方形，根据三垂线定理就可以判定∠VBC＝∠VDC＝90°，而△VBC和△VDC都是直角三角形。

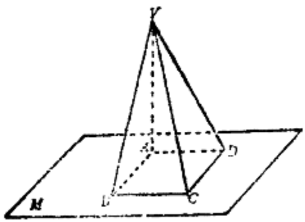

图 1—4

由于多面角总能分成若干个三面角，因此我们也选了少数三面角的问题，请读者分析研究。

题1 如圆周上三点在已知平面N上，求证圆周也在这个平面N上。

证 根据定义，圆周是平面上的曲线，设它所在的平面为M。已知此圆周和平面N有三个公共点，故此三点也在平面M上。就是说平面N与平面M有不在一直线上的三个公共点。故两个平面重合。因此，这圆周在平面N上。

题2 求作已知平面（如图1—5中的P）和不在这平面内的已知直线l的公共点。

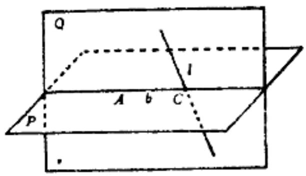

图 1—5

作法 在平面P内任意取一点A，过A点和直线l作平面Q（已知确定平面位置的条件，这平面就认为是可以作成的）。平面Q和平面P有公共点A，所以相交于过A点的直线b（已知两个相交的平面，它们的交线就认为是可以作成

的）．在平面Q内求直线l和b的交点C（已知一个平面，就可以在这平面内完成平面几何的作图），即为所求。

证 由作法可知，点C在直线l上；同时它又在直线b上，而b在平面P上，所以点C在平面P上。故C为P与l的公共点。

讨论 如果能求得直线l和b的交点C，这就是我们所求作的点。如果l // b，就不能求得a和b的交点，那末本题无解。

题3 两个三角形ABC及A′B′C′位于不平行的平面上，且各对应点的联线通过同一个点。试证对应边延长线的三交点在同一直线上（代沙格定理）．

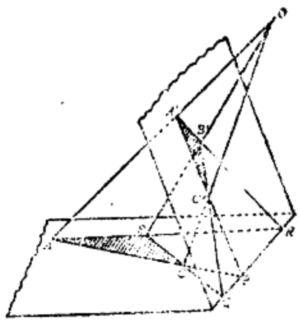

图 1—6

证 如图1—6所示，直线AA′、BB′及CC′交于同一点O，直线AB及A′B′在平面OAB上，故它们相交于某一点R。同理，AC及A′C′交于点P，BC及B′C′交于点Q。由于点P、Q、R在△ABC及△A′B′C′的各边的延长线上，因此它们中的每一个点为这两个三角形所公有，所以均在这两个三角形所在平面的交线上。也就是说，点P、Q、R在一直线上。

题4 a和b是两条异面直线，求证过a而平行于b的平面必与过b而平行于a的平面平行。

证1 如图1—7所示，过直线a上一点A作一直线b′平行于b，过直线b上一点B作一直线a′平行于a，过两相交直

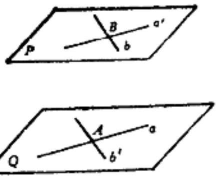

图 1—7

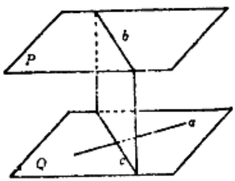

图 1—8

线a及b′作一平面Q，过b及a′作一平面P，因为一个平面上的两相交直线平行于另一平面上的两相交直线，所以它们所在的平面是互相平行的。

证2 如图1—8所示，过b任作一平面交平面Q于直线c。

∵ 平面Q∥b，

∴ c∥b。

∵ 平面P过b，

∴ c∥平面P。

由于a、c都在平面Q内，a、c可能相交或平行.若a∥c，将导致a∥b，这样与已知矛盾。所以a、c只能相交。

∵ a∥平面P，　　∴ 平面Q∥平面P。

证3 设平面P、Q不平行，则这两个平面可能重合或相交。如两平面重合，则a、b在一个平面上，与已知矛盾。

如果平面P、Q相交,则它们必有一交线AB.这样,a∥平面P，b∥平面Q，可知a∥AB∥b，这又与已知矛盾。

∴平面P∥平面Q。

注意 判定两个平面平行，必须是一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面；如果仅仅是一个平面内的两条直线都平行于另一个平面,这两个平面就不一定平行.题4的证1就是利用这个思想在异面直线a和b上分别作b′和a′的。题4的证3是立体几何中常用的反证法。运用反证法的要点是否定结论，举出其他情况，引出矛盾来达到证明的目的。

这种证法比较简便，但必须认真研究，才能熟练掌握。

题5 不全在同一平面内的若干线段，首尾相接，并且最后一条的尾端与最初一条的首端重合，这样组成的图形叫做空间多边形。求证顺次连结空间四边形 ABCD 的各边中点，必成一个平行四边形。

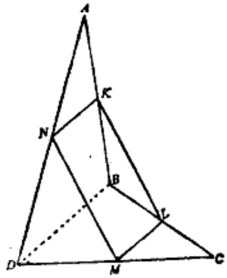

图 1—9

证 如图1—9所示，KN是△ABD两腰中点的连线，

$\therefore$ $KN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$。LM是△CBD两腰中点的连线，

$\therefore$ $LM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$。

$\therefore$ $KN \mathrel{\underline{\parallel}} LM$，连结KL、NM，则KNML是一个平行四边形。

题6 求证空间四边形的对角线中点的连线被四边形的对边中点连线平分。

已知 在图1—10中，ABCD是空间四边形，M及N分别是对角线AC和 BD 的中点，K和L分别是边DA和 BC的中点。

求证 KL和MN 相交，且等分MN.

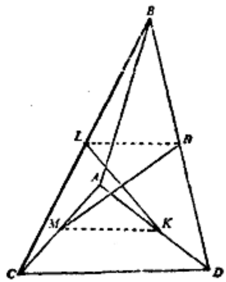

图 1—10

证 连结LN、MK。LN是△BCD两腰中点的连线，

$\therefore$ $LN \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}CD$，MK是△ACD两腰中点的连线，

$\therefore$ $MK \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}CD$。

$\therefore$ $LN \perp\!\!\!\!= MK$.

可见点K、L、M及N在同一个平面上，且为平行四边形KMLN的顶点，线段KL和MN是平行四边形的对角线，它们必相交且互相平分.

题7　若两相交平面被第三平面所截，则三平面两两间的三条交线必过同一点或相互平行或重合.

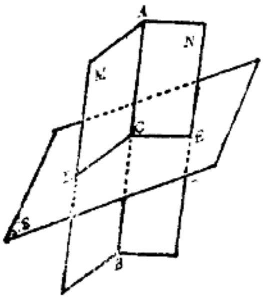

图　1—11

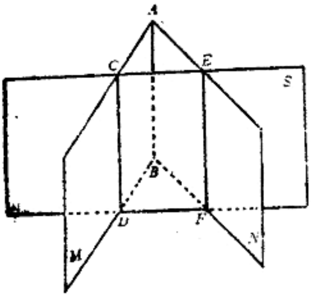

图　1—12

已知　如图1—11所示，平面M、N为相交的两平面，且被平面S所截.

求证　它们的三交线相交于一点或平行或重合.

证　设AB为平面M与N的交线，则第三截面S和AB的关系有以下三种可能：

若平面S和AB相交于C，则三交线相交于一点C（如图1—11）.

若平面S与AB平行，则平面S和平面M、N的交线CD、EF都与AB平行. 这时候三交线相互平行（图1—12）.

若平面过两平面的交线

AB，则三平面相交于一直线AB，即三交线重合于一直线AB。

题8 两条异面直线分别垂直于相交的二平面，则异面直线的公垂线平行于相交平面的交线。

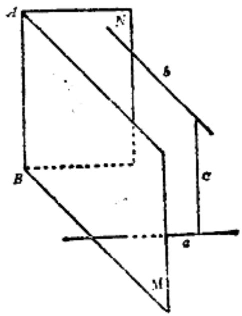

图 1—13

已知 图1—13中，a、b为异面直线，c为其公垂线，a⊥平面M，b⊥平面N，AB为M、N的交线。

求证 c∥AB。

证 ∵平面M⊥a，c⊥a，

∴ c∥平面M。

∵ 平面N⊥b，c⊥b。

∴ c∥平面N。

∴ c∥AB（一条直线分别与两个相交平面平行，这直线必与它们的交线平行）。

题9 线段AB及CD为异面直线，试证：若AC＝CB，AD＝DB，则直线AB与CD互相垂直。

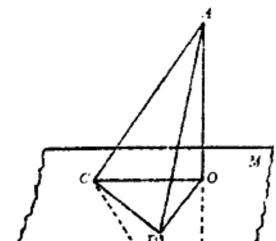

图 1—14

证 如图1—14所示，过直线CD和线段AB的中点O作一平面M。∵AC＝BC，所以CO为等腰△ACB的底边AB上的中线，CO⊥AB。同理DO⊥AB。所以AB垂直于平

面M上的二直线CO及DO，根据关于平面的垂线定理，AB与第三条直线CD互相垂直。

注意 在证一条直线与平面垂直时，决不可只证这条直线与平面内的一条直线或两条平行直线垂直，而必须如题9那样，证得这条直线与平面内的两条相交直线都垂直。

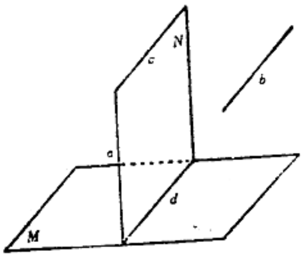

图 1—15

题10 a和b是二异面直线，$a\perp b$，$a\perp$平面M。

求证 $b\parallel$平面M。

证 如图1—15所示，过直线a上任一点作直线$c\parallel b$，过直线a和c作平面N交平面M于d，则$a\perp d$。

$\because$ $c\parallel b$，$a\perp b$，$\therefore$ $a\perp c$，$\therefore$ $c\parallel d$，

但 $c\parallel b$，$\therefore$ $b\parallel d$。

$\therefore$ $b\parallel$平面M。

题11 空间有三条异面直线，求作一直线与其中两异面直线相交，并与第三直线平行。

已知 a、b、c为三异面直线。

求作 一直线与a、b相交，且与c平行。

作法 如图1—16所示，过a作平面$N\parallel c$，过b作平面$M\parallel c$。如果平面M、N不平行，则其交线AB即为所求。

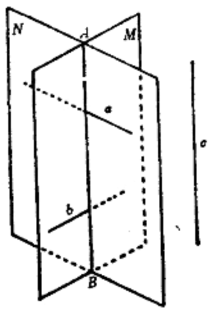

图 1—16

证 因为直线c同时平行于两相交的平面M、N，所以c必平行于它们的交线AB。又因为a、b、c为异面直线，a、b必与交线AB相交。如若不然，a∥AB，则由c∥AB得出a∥c，这和题设矛盾，故知直线AB为所求作的直线。

讨论 过a及过b所作平行于c的两个平面，如果相交，则如上所说，有一解；若这两个平面平行，就没有交线，则本题无解，如图1—17。

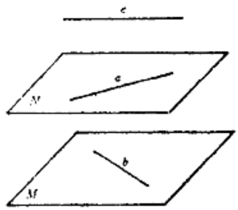

图 1—17

题12 证明过线段中点且与其垂直的平面是与线段两端等距的点的轨迹。

已知 C为线段AB的中点，平面N垂直于线段AB，C在N上。

求证 平面N是与线段AB两端等距离的点的轨迹。

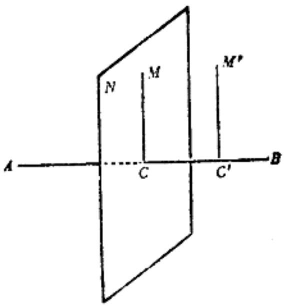

图 1—18

证 如图1—18所示，在平面N上取任意一点M，连结MC，则MC⊥AB，所以M在AB的垂直平分线上。因此，平面N上任一点M与线段AB的两端等距。

现在我们要证明不在平面N上的任一点M′，不为这轨迹所有。作M′C′⊥AB，则点C′不合于点C。由射影AC′≠C′B，可得出斜线AM′≠M′B，即平面N外的一切点，距线