实用概率与数理统计

王学仁 编著

云南人民出版社

实用概率与数理统计

王学仁　编著

云南人民出版社

一九八三年·昆明

封面设计：苏江华

责任编辑：学 惠

实用概率与数理统计

王学仁 编著

*

云南人民出版社出版

（昆明市书林街100号）

云南新华印刷三厂印刷 云南省新华书店发行

*

开本：787×1092 1/32 印张：6.75 字数：150,000

1983年9月第一版 1983年9月第一次印刷

印数：1－3,150

统一书号：7116·953 定价：0.74元

前　言

在向“四化”进军的今天，“概率论与数理统计”的应用日愈广泛和深入。无论在天文、气象、水文、地质、工农业生产、公用事业以及医疗卫生事业中，或者在科学实验和全面质量管理中，概率统计方法已经成为数据处理和数量化的必不可少的有力工具。目前许多人都在学习概率论与数理统计的知识。高等工科院校把概率论列为基础部分的教学内容，并在工程数学中开设了“概率论与数理统计”课程；教育部制定的新的《中学教学大纲》中也增加了概率论的内容；各系统全面质量管理学习班都把“概率论与数理统计”列为学习的主要内容。

为满足我省中学教师、电大师生及一些工矿技术人员的要求，编写了这本《实用概率与数理统计》小册子，以供参考。编写中力求系统、深入浅出、通俗易懂。为使读者能够学习和掌握这门学科的知识，并结合自己的实际加以应用，编写时还特别注意到以下几点：

（1）尽量用初等数学工具进行基本概念的阐述和基本方法的介绍，使一般具有高中数学基础的读者努力一下便能看懂；

（2）本书第三章所介绍的都是目前在许多方面很实用的一些数理统计方法，并给出了相应的实例，目的是以解决问题为主，学了就能用；而不着重数学理论推导；

（3）为使读者概念清晰，线索清楚，本书力求用简练的例题予读者以直观的印象，并开门见山地把问题的实质讲清楚；

（4）鉴于概率统计的解题方法与其它数学学科比较，有其独特之处，初学者往往感到做题困难，因之，本书各章各节精选了大量例题，每章还备有不少练习题，以便读者更快地熟悉和掌握概率统计方法。

由于水平所限，错误是难免的，恳请读者不吝赐教，以便日后改正。

王学仁

1980年10月

目　录

第一章　概率的基本概念与计算

§1　随机事件及其概率

1.1 随机事件

我们在实际生活中所看到的事件，一般可以概括为两种类型：一类叫做必然事件，一类叫做随机事件。

必然事件就是在一定条件下必然发生或者必然不发生的事件。例如在一个大气压下水的温度达到100℃时水沸腾。这里，"一个大气压和水的温度达到100℃"是条件，"水沸腾"是事件。每当条件实现时，事件必然发生，这种事件就是必然事件；有的事件在一定条件下必然不发生，例如"在一个大气压下水温是50℃"的条件下，"水沸腾"这个事件便必然不能发生，我们把这种每当条件实现时必然不发生的事件称为不可能事件。事实上，必然事件和不可能事件之间有着很密切的联系，它们的发生与不发生都是必然的，每当条件实现时我们便能完全肯定该事件是否发生。

随机事件是在条件实现时可能发生也可能不发生的事件。例如：

（1）某战士在距离目标200公尺处用步枪射击，"命中"便是一个随机事件。因为在距离200公尺条件下，"射中目标"这个事件可能发生也可能不发生。

（2）1985年6月1日"昆明地区下雨"这个事件是一

个随机事件。因为到那日昆明地区可能是雨天，也可能是晴天或阴天。

（3）在大量产品中，随便抽取10件产品（条件），“其中恰有一件废品”这个事件可能发生也可能不发生，故是一个随机事件。

类似的例子很多，不再一一列举。总之，随机事件广泛存在于自然界中，它们与必然事件有本质的不同，对于这类事件的研究是非常必要的。例如对未来降雨量的研究有助于气象预报，对于产品废品率的研究有助于了解生产情况进一步改进生产。

从上述随机事件的例子中，我们可以看出随机事件的发生与否表现有一定的偶然性，也即在少数几次试验中看不出它的规律性，但在大量次数的试验中随机事件的规律性就显现出来了。譬如“击中目标”这个随机事件，在一次射击中我们不能肯定它是否发生，由于受着气温、风向，枪和子弹的质量、瞄准情况等许多复杂因素的影响，它发生与否带有一定的偶然性；可是在大量射击中，在大量带有偶然性的结果中，“击中目标”这个随机事件的规律性就显现出来了，由命中的频繁程度可以看出该同志的技术水平。这就是说，偶然性中包含有必然性。因此，随机事件决不是毫无规律不可捉摸的事件，只不过它的规律要在大量试验中才能够表现出来。下面我们就通过概率来研究这种规律。

1.2 随机事件的概率

为了说明随机事件的规律性，我们来看两个例子。

例1 作掷分币的试验，掷一次算一次试验，规定有国徽的一面算正面，我们用A表示“出正面”这个事件，当我们作一次或少量的试验时，分币有时出正面，有时出反面，出正面

的次数多少不一，好象没有什么规律。但当我们进行大量试验时，事件A发生的规律性就表现出来了。

下面是一份试验统计资料，表中的频率是这样定义的：进行n次试验（本例是掷n次分币），事件A发生了k次（出正面k次）。$\frac{k}{n}$叫做事件A的频率。即

$$频率=\frac{事件A出现的次数}{试验总次数}$$

（表1—1）

试验回数	掷分币总次数	出正面次数	出正面的频率
第一回	4040	2048	0.5080
第二回	12000	6019	0.5016
第三回	24000	12012	0.5005

由（表1—1）可见，不同的试验得出的频率不同，但它们相差不多，都与0.5很接近。当试验次数越大时，所得频率与0.5越接近。这就是说，在大量试验中出正面这个随机事件的频率具有稳定性，稳定在0.5附近，当试验次数越大时稳定性越加强。

例2 某工厂对每天产品的质量进行检查。办法是从每天所生产的产品中抽取一部分样品来检查，统计其中合格品的个数。下面是一份统计资料：

（表1—2）

月＼日	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3	9/3	10/3
抽取的总数量	400	450	370	380	470	360	390	435	425	410
合格品的数量	380	432	353	363	445	330	372	415	406	392
合格品的频率	95%	96%	95%	95.4%	94.7%	95.2%	95.3%	95.5%	95.6%	95.5%

从（表1—2）也可看出，例2中“抽到合格品”这个事件的频率是稳定的，稳定在95%附近。

无数实际经验告诉我们，在大量试验中任何一个随机事件的频率都具有稳定性，它必然稳定在某个数的附近，不管是谁去做试验，只要条件相同，稳定性决不会改变。所以频率稳定性是随机事件本身所固有的一种属性，我们正是利用它来衡量随机事件发生的规律，因此，为了从数量上表现随机事件发生的可能性大小，我们引入概率的概念。

定义：在一定条件下进行大量试验时，随机事件A的频率必然稳定在某一个数的附近，这个数就叫做事件A的概率，记作P(A)。

概率有两方面的涵意，一方面它反应在大量试验中事件发生的频繁程度；另一方面它又表示在一次试验中事件发生的可能性大小。一个事件的概率越大，它发生得越频繁，即发生的可能性越大。因此我们可以根据它来评定已发生的种种现象。如某战士射击命中目标的概率是0.8，便说明这位战士的射击水平。他在10次射击中一般能够命中8次左右。另一方面也可以预计这位战士在未来一次射击中能命中目标的把握大约是80%。所以我们可以利用它来预测在未来大量试验中随机事件发生的次数大约是多少。

上面我们讨论了随机事件和概率这两个概率论中基本的概念。如果把必然事件（记为U），不可能事件（记为V）也算作随机事件的两个极端情形，那么必然事件U的概率P(U)应该最大，不可能事件V的概率P(V)应该最小。我们规定P(U)＝1，P(V)＝0。从而对任一随机事件A，其概率P(A)自然应该满足：

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

例如，掷一颗均匀的骰子*，用A表示“出现2点”这一事件，用B表示“出现偶数点”这一事件。则根据经验我们知道$P(A)=\frac{1}{6}$，而P（B）=？这里，事件B包含着“出现2点”，“出现4点”，“出现6点”等这些事件。我们要想求得P（B），必须弄清楚这些事件之间的相互关系。所以我们只一个一个地考虑随机事件及其概率是很不够的，我们还要研究事件间的结合关系即事件的运算法则。

1.3 事件的运算法则

1.若事件A发生，必然导致事件B发生，则称事件A蕴含于事件B或称事件B蕴含事件A。记为$A\subset B$或$B\supset A$。

如果$A\subset B$，$B\supset A$同时成立则称A与B等价记为$A=B$（等价的两个事件看为是相同的）。

2.由事件A+B至少发生其一所构成的事件称为事件A与B的和。事件A与B之和记为$A+B$。

同理，称A_1，A_2，…A_n等n个事件至少发生其一所构成的事件为$A_1,A_2,\cdots A_n$之和，并记为$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{k=1}^{n}A_k$。

3.由事件A，B同时发生所构成的事件称为A与B的积，事件A与B的积记为$A\cdot B$。

同理，称A_1,A_2，…A_n等n个事件同时发生所构成的事件为$A_1,A_2,\cdots A_n$之积，并记为$A_1\cdot A_2\cdots A_n=\prod_{k=1}^{n}A_k$。

特别，如果事件A发生，必然导致事件B不发生（此时如果B发生当然也导致A不发生）则称A与B是互不相容的事件或A，B互斥。A，B互不相容也即A与B同时发生是不可能的即

* 一个正六面体，它的六个面上分别标有1，2，3，4，5，6个点子。

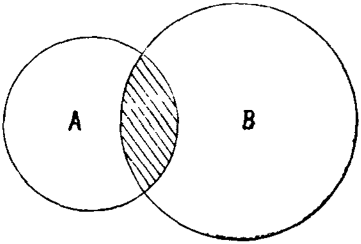
$A \cdot B = V$。

4. 由事件A发生而B不发生所构成的事件称为A与B之差记为$A-B$。

5. 如果$A \cdot B = V$，$A+B=U$则称A为B的对立事件或B为A的对立事件。记A的对立事件为$\bar{A}$，B的对立事件为$\bar{B}$。

例3 设A代表甲射击击中目标，B代表乙射击击中目标。二人同时射击有四种可能结果：

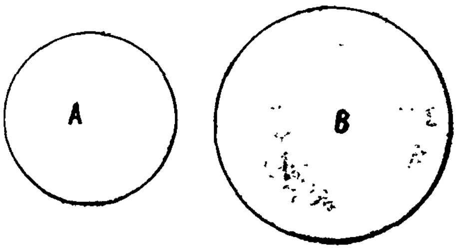
甲	击	中	击	中	不	中	不	中
乙	击	中	不	中	击	中	不	中



（图 1－1）

则：$A+B$代表前面三种结果中任一种结果出现；$A \cdot B$代表第一种结果出现；$A-B$代表第二种结果出现；$B-A$代表第三种结果出现。

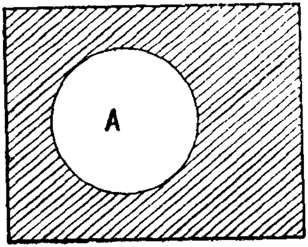
例4 设对右图的靶进行射击，A代表击中左边一个圈内，B代表击中右边一个圈内。则在（图1—1）中$A+B$表示击中到整个葫芦形的靶上，在（图1—2）中$A+B$表示击中左边靶A或击中右边靶B；在（图



（图 1－2）

1—1)中，$A \cdot B$表示击中A与B相重合的斜线部分，在（图1—2）中，$A \cdot B = V$，即A与B是互不相容的。

在实际生活中互不相容的事件（互斥事件）的例子是很多的。如掷一骰子“出现1点”与“出现2点”是互斥事件，生一小孩“是男孩”（设为A）与“是女孩”（设为B）也是互斥事件。但是，掷一骰子“出现一点”与“出现2点”是不能同时发生的，但也可能同时都不发生，即出现3点，4点，5点或6点。而在生小孩是男、是女的例子中二者不能同时出现，即$A \cdot B = V$；但一定要出现一个，即$A + B = U$。所以B为A的对立事件记为$B = \bar{A}$。A的对立事件$\bar{A}$的意义即为“A不出现”或“A的反面出现”。用图来表示即如（图1—3）。其中矩形块代表必然事件，圆圈代表事件A，矩形内圆圈外的斜线部分代表A的对立事件$\bar{A}$。



（图1—3）

在例4中，我们用几何图形来表示事件，这种方法比较直观且有一般性，故今后常用这种表示法。

§2 古典概型

上节我们用频率的稳定值来定义概率，而频率是经过统计而得到的，所以称为概率的统计定义。是否对于任何一个随机事件都须经过大量试验统计才能求得其概率呢？事实上，在有些情况下只须根据所研究事件的特性便可直接求得它的概率。

在这一节里，我们就专门来研究这样一类简单而常见的随机事件及其概率。

2.1 古典概率的定义

实际经验告诉我们，掷一颗均匀骰子“出现幺点”的概率是$\frac{1}{6}$。那末，我们便要进一步分析一下这一随机事件到底具有什么特性以致不须经过试验统计就能知道它的概率。

（1）掷一颗均匀骰子的所有可能结果是有限的，有“出1点”，“出2点”，……“出6点”等六种。

（2）由于骰子是均匀对称的，故每一种情况出现的可能性都相等，等于$\frac{1}{6}$（通常称这种性质为等可能性）。

以后，凡是具有有限，等可能性这两个条件的随机事件都可以用简单的排列组合方法来计算它的概率。而且我们把满足有限和等可能性的随机事件称为古典概型。如果用数学语言来描述，可以把古典概型的定义归纳如下：

（1）设有一随机事件，其试验的所有可能结果有n个：$u_1, u_2, \cdots u_n$，将其全部结果构成的集合记为

$$U = \{u_1, u_2, \cdots u_n\}$$

（2）$u_1, u_2, \cdots u_n$是互不相容的等可能性事件（称每个u_i为基本事件，基本事件的全体称为基本事件组）。

接着，我们要解决的问题是如何计算古典概型随机事件的概率。我们知道，在古典概型的场合下，每一个随机事件都可以看成是由某些基本事件所组成的集合。例如，掷一骰子“出偶数点”这个事件是由“出现2点”、“出现4点”、“出现6点”这三个基本事件所组成的集合。如果用B表示“出现偶数点”这一事件。用u_i表示“出现i点”($i=1,2,\cdots 6$)这个基本事件，则

$$U = \{u_1, u_2, \cdots u_6\}$$