华罗庚金杯

少年数学邀请赛辅导讲座

张明尧　编著

中国科学技术大学出版社

华罗庚金杯

少年数学邀请赛辅导讲座

张明尧　编著

中国科学技术大学出版社

1992・合肥

华 罗 庚 金 杯

少年数学邀请赛辅导讲座

张明尧　编著

※

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路96号，邮政编码230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

※

开本787×1092/32　印张：15　字数：334 千

1992年 2 月第 1 版　　1992年 2 月第 1 次印刷

印数 1—15000册

ISBN7-312-00345-1/G·51

[皖] 第08号　定价6.00元

内　容　提　要

本书分24节介绍了小学数学奥林匹克有关的有趣的数学问题及解题方法，主要内容有：数列、整数的基本性质、神奇妙算及鸡兔问题、棋盘中的数学问题、组合计数、极大极小与估计、容斥原理、抽屉原则、逻辑推理与数字谜、统筹、进位制等。语言通俗易懂，例题由浅入深，对困难的习题给出必要的提示，适合小学高年级、初中低年级学生阅读，也可用作辅导数学竞赛的训练教材。本书部分内容曾在中国科技大学主办的数学奥林匹克训练班上使用过，受到普遍的欢迎和好评。书末附有最新竞赛题选及答案，可供参考。

序

“数学奥林匹克”是青少年的一种数学智力竞赛，迄今已有一百多年的历史。世界上许多国家都先后举办过数学竞赛，这些竞赛常常由各国一些著名数学家倡导组织，并逐步深入发展，直到形成后来的国际数学奥林匹克。世界上有不少著名数学家或其它学科的科学家在年轻时就曾是各种数学竞赛的优胜者。

中国的数学竞赛始于1956年，直到1986年以前，主要是在中学生中间开展这项活动。这项活动的开展，得益于许多老一辈数学家、中青年数学家及中学教师的共同努力。其中特别应当提到华罗庚先生。华罗庚先生不但倡导了中国的数学竞赛，还撰写了一些精采的数学竞赛作品。这项活动在中国的开展，对选拔培养有数学才能的青少年，起到过良好的作用。

自1986年起，我国开始组织了以小学生为主要对象的数学竞赛，并命名为《“华罗庚金杯”少年数学邀请赛》，借以纪念我国数学竞赛活动的主要倡导者华罗庚先生。这项比赛每两年举办一次，迄今已举办了3届，全国先后有数百万中小学生参加了比赛。今年中国数学会也试办小学数学竞赛。通过这项竞赛活动，激发了广大少年儿童学习数学的兴趣，这也有助于培养他们从小就具有健康的蓬勃向上的精神。即使对于教师，也可以通过参加竞赛活动开阔眼界，获得新知识，改进课堂教学，从而对改进数学教育起到良好的

催化作用。

几年来，一些热心小学数学竞赛的专家学者陆续编写过一些好的材料。中国科学技术大学的张明尧同志根据他几年来从事这项活动的经验，写成这本书，介绍了许多饶有趣味的数学问题和方法，其中不少问题和方法渊源于近代数学，不少习题对于小学生有一定的困难，而张明尧同志由浅入深地作了分析，使之能为少年儿童们所接受，在这点上，他是下了一番功夫的。

在这本书即将出版之际，张明尧同志和中国科学技术大学出版社的同志请我为之作序，我就写了上面的话，希望今后能有更多更好的作品问世，以推动数学竞赛活动进一步深入开展。

王　元

1991.8.20

前 言

数学有着悠久的历史。数学是自然科学的基础。从遨游太空的航天飞机到藏身海底的核子潜艇，从高速计算机到数控精密机床，从彩电冰箱到现代时装，无一不与数学密切相关。数学，还是锻炼大脑思维的游戏，是提高儿童智力、培养杰出科技人才必不可少的训练项目。

自 1986 年举办第一届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛以来，小学数学课外活动便以前所未有的规模在全国开展起来，成千上万的小学生、教师及家长以巨大的热情参加到这项活动之中。

作者在几年来曾热心参加为少年数学爱好者举办的训练班，与一些热心小学教育的教师及关心子女成长的家长探讨过进行小学生数学奥林匹克训练的目的与方法。依作者个人的看法，开展这项活动的目的，不在给学生灌输新的概念和知识，也不在给学生讲解他们没有见过或感到棘手的题目，而是在于正确地引导学生学会运用自己的大脑、用自己学过的那些看起来少得可怜的知识以及自己完全可以理解的语言，去解决一个一个远非浅显的数学问题，由此增强自己的自信心，提高对于科学的兴趣。而对于教师和家长来说，如何恰当地辅导学生，使之在困难面前有路可循，不致望难却步、无从下手，又不致对教师或家长产生依赖思想、不丧失自己的独立思考能力，这却绝非易事。

在这本书里，作者只想把自己从事这项活动的微薄心得

奉献给爱好数学的学生、热心教育的老师和满怀爱子之心的家长，希望对他们有所帮助。为了充分利用本书，教师和家长最好根据学生的实际水平讲授例题、布置习题，并考虑恰当地给予提示，适当地降低或增加习题的难度，切忌拔苗助长。

承蒙中国数学会理事长王元教授在百忙中关心本书的出版，并为之作序，作者谨此表示衷心的感谢！此外，本书部分内容曾于今年夏季在黄山举办的数学奥林匹克训练班上试用过，参加学习的许多教师提出不少好的意见，在此一并表示作者衷心的感谢！

张明尧

1991年8月13日于合肥

目　　次

第一部分　有趣的数列

很少接触数学竞赛题的学生或家长，总觉得竞赛题很怪，不好着摸，因而常常望而生畏．其实，竞赛题的“怪”只是表面现象，它不但很有规律，解题的思想常常非常简单，而且用的知识基本上是书本上教过的．例如这一部分的三节，讲的都是与数列有关的问题，用的知识不过就是乘法对加（减）法的分配律、怎样用字母表示数等，所以一点也不可怕．

当然，要很快发现竞赛题中隐含的规律，并熟练运用学过的知识去解决问题，确非易事．但是请你记住：任何复杂的问题都是由简单的东西变化而来的．怎样从简单的知识去解决复杂的问题，这就是这一部分要介绍的主要思想．这就好比编织毛衣，虽然基本的针法极其简单，但是心灵手巧的妈妈们却可以织出千变万化、绚丽多彩的新装！

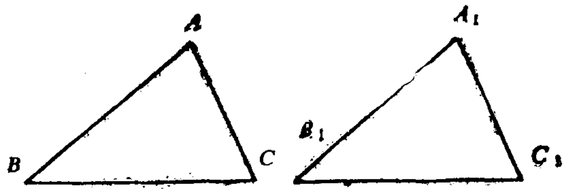
愿你也学会用简单的知识织出美丽动人的图案！

一　从三角形谈起

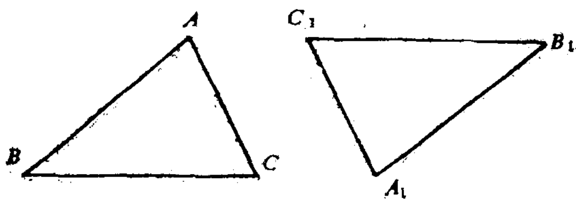
长方形（包括正方形）、平行四边形、三角形及梯形是几个基本的几何图形，从面积公式来看，长方形这种图形最为重要．我们认为它最重要，一是因为长方形的面积公式最简单，二是因为从长方形面积公式很容易导出平行四边形乃

至三角形及梯形的面积公式。

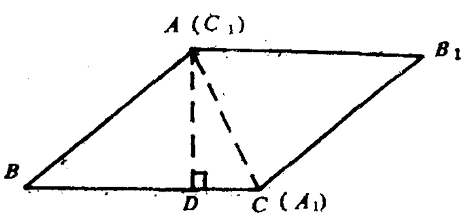
先让我们回忆一下推导给定$\triangle ABC$面积公式的过程。首先画一个与$\triangle ABC$完全一样的$\triangle A_1B_1C_1$，如图1.1中的（1）所示，再把$\triangle A_1B_1C_1$如图1.1（2）那样上下颠倒放置，最后移动$\triangle A_1B_1C_1$使C_1点与A点重合，A_1点与C点重合，这样就得到一个平行四边形$ABCB_1$，由平行四边形面积等于底BC之长乘以高AD（见图1.1（3）），再被



（1） 作一个与ABC完全一样的三角形$A_1B_1C_1$



（2）把三角形$A_1B_1C_1$如图这样颠倒过来



（3）将两个三角形连结成一个平行四边形

图 1.1

2 除，即得$\triangle ABC$的面积公式。

现在来把上面这个问题作一点形式上的改变。仍取$\triangle ABC$，把它的每一边平均分成9等分，按照图1.2把这些分点连结起来，这样就把它分成了若干个形状完全相同的小三角形。假设每个小三角形的面积是 1 个面积单位，那么$\triangle ABC$的面积恰好等于其中所含的小三角形个数。如果一行一行来数小三角形的个数，注意到第一行、第二行、……、第九行中各有 1， 3， …， 17个小三角形，因而$\triangle ABC$的面积等于

$$S=1+3+5+7+9+11+13+15+17.$$

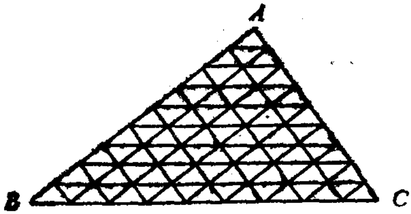


图 1.2

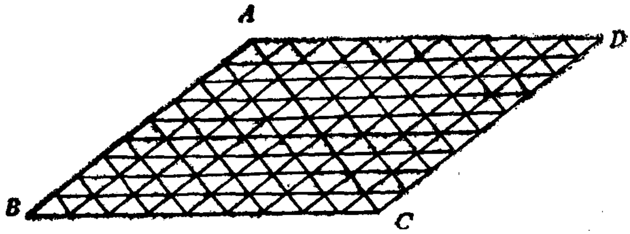


图 1.3

这样计算$\triangle ABC$的面积S要做八次加法，比较麻烦。如果仿照前面推导三角形面积公式的方法，给$\triangle ABC$配上一个同样的$\triangle CDA$，按图 1.3 那样拼接成一个平行四边形，由于这个平行四边形仍有九行，但现在每行都同样有 $1+17=18$ 个小

三角形，于是立即求出

$$S=(1+17)\times 9\div 2=81.$$

注意，上面的想法用式子来表示，等于把S中每个数计算了两次，不过第一次按从小到大顺序写出这九个数，而第二次则从大到小写在第一行的下面，即

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17; \\ 17 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1. \end{array}$$

上下对应的两个数相加都得18，于是这两行数的和便可用一次乘法完成。

要强调的是，这个方法只对等差数列才适用。所谓等差数列，是在把数列中的数按从小到大的次序排好后，相邻两数的差等于一个固定的常数的数列。例如

1，2，3，4，5，…（每次增加1）；

1，5，9，13，17，…（每次增加4）；

以及 a，$a+d$，$a+2d$，$a+3d$，…（每次增加d）.

（这里a，d是给定的两个数）都是等差数列，而

1，2，4，7，11，…；

3，31，331，3331，…

都不是等差数列。

例 1 求前n个自然数的和$S_n=1+2+3+\cdots+n$.

解 按照前面讲的方法有

$$\begin{aligned} 2S_n &= (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n-1+2) \\ &\quad +(n+1)=(1+n)+(1+n)+(1+n)+\cdots \\ &\quad +(1+n)+(1+n). \qquad (1.1) \end{aligned}$$

由于S_n中共有n个加数，故（1.1）式右边有n个$(1+n)$，这样就得到

$$2S_n=(1+n)\times n,$$

所以 $$S_n=(1+n)\times n\div 2=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.2}$$

例如取 $n=100$ 代入（1.2）式就得到

$$S_{100}=\frac{100\times(100+1)}{2}=5050.$$

例 2 计算$S=1+5+9+\cdots+389+393$。

解 仿照上题有

$$2S=(1+393)+(5+389)+\cdots+(389+5)+(393+1)$$
$$=394+394+\cdots+394+394, \tag{1.3}$$

为了用乘法求出（1.3）式右边的和，我们需要知道（1.3）式右边有多少个 394？为了这个目的，实际上只要知道S这个和式中有多少个加数，或者说，只要知道 393 是数列

$$1,\ 5,\ 9\cdots,\ 393 \tag{1.4}$$

中的第几个数就好了．为此我们把（1.4）中各数写成下面的样子（注意相邻两数相差都是 4）

$1=1+4\times\boxed{0}\Rightarrow$第一个数，

$5=1+4\times\boxed{1}\Rightarrow$第二个数，

$9=1+4\times\boxed{2}\Rightarrow$第三个数，…

现在有 $393=1+4\times\boxed{98}$，注意到上面方框中的数出现的规律，立即可以断定 393 是数列（1.4)中第$98+1=99$个数，代入（1.3）式即得 $2S=394\times 99$，

故 $$S=\frac{394\times 99}{2}=19503.$$

例 3 给出等差数列 7，13，19，25…，求其中从第一个数 7 一直加到第 100 个数所得的和。

解 把例3的条件与上面两个例子的条件加以比较，不难看出，首先要求出数列中第100个数究竟是多少？仿上题做法有

第一个数 $7=7+6\times0$；第二个数 $13=7+6\times1$；第三个数 $19=7+6\times2$；第四个数 $25=7+6\times3$；

…………

因此第一百个数应是 $7+6\times(100-1)=601$，

于是有（设S为所要求的和） $2S=(7+601)\times100$，

故 $S=608\times100\div2=30400$。

三角形的面积公式可以从长方形面积公式推出，由此可以解决等差数列的求和问题，可见简单的东西有多么重要！下面再看一个与三角形有关的例子，它同样告诉我们简单的东西在复杂的问题中常常起重要的作用。

例 4 求随意画的四边形$ABCD$的4个内角之和（见图1.4的（1））。

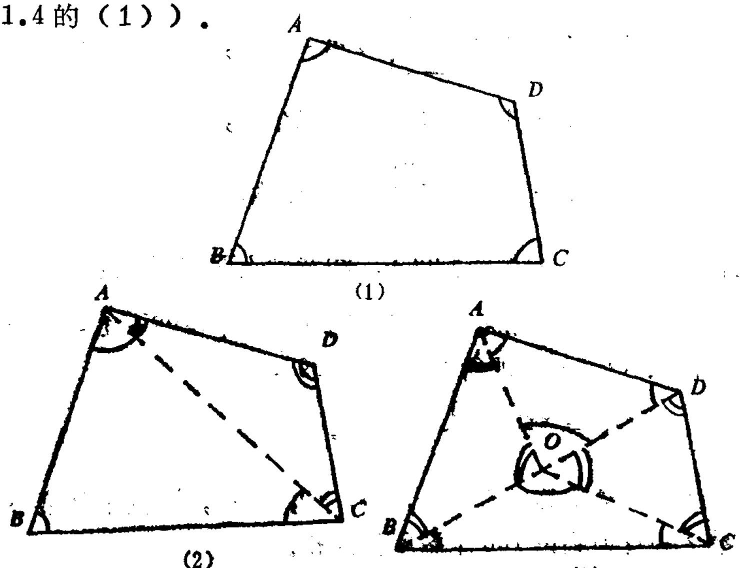


图 1.4

解 小学课本里关于这类问题只讲过唯一的一个结果，即“三角形3个内角之和等于180°”．为了解四边形内角和问题，唯一的途径只有想办法把四边形分成三角形再求解．

怎样把四边形分成若干个三角形呢？可以象图1.4的（2）那样，把某两个不相邻的顶点（比方图中的A，C两点）连结起来，这就把$ABCD$分成两个三角形，因为每个三角形3个内角和都是180°，而且$\triangle ADC$与$\triangle ABC$的所有这6个内角加起来刚好等于四边形$ABCD$的4个内角之和，因此四边形$ABCD$的4内角之和等于

$$180\times 2=360\text{（度）}.$$

但是把四边形划分成三角形的方法不止上述一种，我们还可以象图1.4的（3）那样，在四边形$ABCD$内部随便取一点O，把点O与4个顶点分别连接起来，这样就把四边形分成4个三角形了．这4个三角形的全部内角之和等于

$$180\times 4=720\text{（度）}.$$

注意到这4个三角形的全部内角和比$ABCD$的4个内角和多出一个以O点为顶点的周角，这样又得到与上一方法相同的结果．

习题一

1．求所有3位偶数相加的和．

2．求所有被4除余2的两位数的和．

3．求从120到500的所有整数中被6除余5的那些整数的和．

4．下图是一个数字方阵，它有一百行，每一行中有一百个连续自然数，求这个数字方阵中全部自然数的和．

1，2，3，…，98，99，100；