代数等式证明

DAISHUDENG SHIZHENGM

徐松柏 俞颂萱 张予南

河南教育出版社

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

代数等式证明

徐松柏　俞颂萱　张予南

河南教育出版社

代 数 等 式 证 明

编著 徐松柏 俞颂萱 张予南
责任编辑 张国旺

河 南 教 育 出 版 社 出 版
河南第一新华印刷厂印刷
河 南 省 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米 32开本 8.125印张 172千字
1987年 5 月第 1 版 1988年 3 月第 1 次印刷

印数 1— 6,040 册
ISBN 7-5347-0000-0/G·1

统一书号7356·421 定价1.20元

前　言

等式证明是中学数学恒等变形的一个重要组成部分。

等式证明遍及中学代数、三角各章节，甚至几何中也有着它的广泛应用。由于等式的内容和形式、等式的条件和结论变化无穷，证明无固定模式，灵活性很大，因此，给学习带来困难，成为中学数学的难点。而中学教材，除三角等式的证明有相对地集中之外，其他各类代数等式不但较为分散，对它们的证明方法和技巧讨论甚少，更缺乏系统论述。为此，我们编写这本数学课外读物，以飨读者。

本书从纵横两个方面较详尽地讨论等式证明的意义、常用证法和技巧、以及中学代数中出现的各类代数等式证明的方法；有关三角等式的证明，因成书不少，这里就不再作专题讨论；对于典型例题均作有评注，给出一些证明规律。此外，在各章节的后面，还安排一定数量的练习题，供读者练习思考。每道练习题都给出详、略不同的提示，供学有困难的读者练习参考。

本书的代数等式的分类，并非严格遵循科学的分类法区分的。而是根据中学数学教材中的块块加以归纳的。这样的归类，有利于与教材同步。

限于水平，不当之处，望批评指正。

作　者

于1986年元旦

目 录

第一章　等式证明概述

一、等式的概念及其证明

在数学中，诸如(1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $(a、b\in R)$，(2) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $(a>0,\ m、n\in R)$，(3) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $(\alpha\in R)$，(4) $\lg x^2=2\lg x(x>0)$，(5) $a^3+b^3+c^3=3abc$ $(a、b、c\in R$且$a+b+c=0)$，(6) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$，(7) $3x+5=7$……，这些表示相等关系的式子，都叫做等式. 由于组成等式的两边的解析式是由用运算符号把数或表示数的字母连结起来而成的式子，所以用数值代替解析式里的字母、计算解析式的值时，随着解析式的种类不同，其结果各有不同，甚至有些数值使其解析式有意义，有些数值会使解析式失去意义. 使解析式有意义的数值，叫做解析式的允许值；所有使其解析式有意义的允许值的全体叫做允许值集合.

如果等式 $f=g$，设使解析式 f 有意义的字母允许值集合为 D_f，使解析式 g 有意义的字母允许值集合为 D_g，且 $D_f\cap D_g=D$（表示D_f与D_g的允许值的公共数值组成的集合）.

如果两个解析式，其中的字母不管取使等式两边都有意义的任意值，这两个解析式的值都相等时，我们说这两个解

析式恒等。表示两个式子恒等的等式，叫做恒等式。如上面的(1)、(2)、(3)、(4)。特别地、不含字母的等式两边有同一数值的，也称恒等式如(6)。恒等式即为在允许值集合D下，成立的等式$f=g$。

恒等式是等式，但不是所有的等式都是恒等式。如(5)或$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$是在 $a+b+c=0$ 的条件下，才能成立的。这就是说，等式两边的 a、b、c 的允许值是实数集合，而使等式成立的只有满足 $a+b+c=0$ 的实数a、b、c。也就是允许值集合D中的所有值并不都能满足的等式，我们把这样的等式叫做条件等式。再如(7) 是在 $x=\frac{2}{3}$ 的条件下，成立的等式，也是一种条件等式。这种等式从另一角度来说，叫做方程。方程是含有未知数的等式。但对于方程的研究，不是考虑等式的正确与否？而是探讨其等式成立的条件。

如　已知$x=5$，求证$2x-3=7$；已知$2x-3=7$，求x。前者就是条件等式的证明问题，后者则是解方程的问题。

本书研究的等式系指恒等式与条件等式两种。等式的证明，也就是恒等式与条件等式的证明。

等式按照组成等式中两个解析式的不同种类可分成：

1.整式等式：解析式中仅含整式的等式。如

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)(a^2+b^2+c^2)。$$

2.分式等式：解析式中仅含分式的等式。如

$$\frac{x}{ax-a^2}+\frac{y}{ay-a^2}+\frac{z}{az-a^2}$$

$$=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{y-a}+\frac{1}{z-a}+\frac{3}{a}.$$

3.根式等式：解析式中仅含根式的等式．如

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=2;$$

4.指数等式：解析式中含有指数式的等式．如

$$\frac{x^{-2}y^{-5}+x^{-3}y^{-2}}{x^{-6}y^{-3}+x^{-3}y^{-6}}=x^4-x^2y^2+y^4.$$

5.对数等式：解析式中含有对数式的等式．如

$$\frac{\log_a\log_a N}{\sqrt{\log_a b}}-\frac{\log_b\log_b N}{\sqrt{\log_b a}}=\frac{\log_a\log_a b}{\sqrt{\log_a b}}.$$

6.三角函数等式：解析式中含有三角函数式的等式．如

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

7.反三角函数等式：解析式中含有反三角函数式的等式．如

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

8.复合函数等式：解析式中含有$f(x)$的等式．如

设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求证$f\{f[f(x)]\}=x$．

9.方程等式：跟方程的根与系数有关的等式．如

设方程$(c-b)x^2+2(b-a)x+(a-b)=0$有相等两实数根，求证$a=b$或$a=c$。

10.数列等式：由数列给出的等式。如：若两数a、b的等差中项等于其等比中项的2倍，求证：

$$\frac{a}{b}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

11.行列式等式：由行列式给出的等式。如

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}=4(b+c)(c+a)(a+b).$$

12.排列等式：解析式中仅含有排列数符号的等式。如

$$P_n^n=P_{n+1}^{n+1}-nP_n^n.$$

13.组合等式：解析式中含有组合数符号的等式。如

$$C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}.$$

14.复数等式：解析式中含有复数的等式。如

设ω为1的立方根，求证

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x-\omega y)(x-\omega^2 y)\left(x+\frac{y}{\omega}\right)\left(x+\frac{y}{\omega^2}\right).$$

15.集合等式：由集合符号给出的等式。如

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

16.逻辑等式：由逻辑式给出的等式。如

$$\overline{AB+\overline{A}C}=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}.$$

证明等式，根据定义就是验证在字母允许值（包括满足已知条件）范围内取任何值，等式两边的值都相等。如果把

一个一个值代入验算，这是较麻烦，而且也是办不到的，因此我们不采用验证方法证明等式成立，而是通过恒等变换或等式变换来证明等式成立．

把一个给定的解析式变换成另一个与它恒等的解析式，这种变换称为恒等变换，又称恒等变形．恒等变换是以已知公式、法则、定律等为依据的．

例1 求证$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=\left(ab-\frac{1}{ab}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$ $(ab\neq 0)$．

证明： 左边$=\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)\left(a+\frac{1}{a}-b-\frac{1}{b}\right)$

〔应用平方差公式〕

$$=\frac{(a+b)(1+ab)}{ab}\cdot\frac{(a-b)(ab-1)}{ab}$$

〔应用通分法则、因式分解〕

$$=\frac{(a^2-b^2)(a^2b^2-1)}{a^2b^2}$$

〔应用交换律、平方差公式〕

$$=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(ab-\frac{1}{ab}\right).$$

〔应用分式除法法则〕

∴ 等式成立．

这里应用公式、法则、定律，以与$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(b+\frac{1}{b}\right)$

恒等的一系列的解析式$\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)\left(a+\frac{1}{b}-b-\frac{1}{b}\right)$、

$\frac{(a+b)(1-ab)}{ab}$、$\frac{(a-b)(ab-1)}{ab}$、$\frac{(a^2-b^2)(a^2b^2-1)}{a^2b^2}$代换，

直至$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$.

在作恒等变换时，要使每一步变换必须满足允许值集合D中所有值．否则，如果只满足D中某些值或者只满足D的某真子集中的值，那么证明是不严密的．

例2 求证$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

$$=1+x+x^2+\cdots+x^{15}.$$

证明：左边$=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}{1-x}$

$$=\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}{1-x}$$

$$=\frac{(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)}{1-x}$$

$$=\frac{(1-x^8)(1+x^8)}{1-x}=\frac{1-x^{16}}{1-x}$$

$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{15}.$$

∴ 原等式成立．

上面的证明是在$x\neq 1$时进行的，而原等式允许值集合D中x为一切实数，因此需补充证明对$x=1$时，原等式也成立．

正确的证法是：

当$x\neq 1$时，如上面的证明；

当$x=1$时，左边$=(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)=16$，

$$右边=\overbrace{1+1+1\cdots+1}^{16个}=16.$$

∴ 左边=右边，故等式成立。

在例 2 的变换中，由 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ 变换成$\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}{(1-x)}$，实际上是作的另一种变换，即等式变换。

把一个给定成立的等式变换成另一个成立的等式，这种变换称为等式变换，等式变换是和恒等变换不同的另一种变换。等式变换是以等式的基本性质为依据的变换。

等式具有的性质是：

(1) 如果$f=g$，且$g=h$，则

$f=h$。

(2) 如果$f=g$，且$h=k$，则

$f\pm h=g\pm k$，或$fh=gk$。

特别地，有

$f\pm h=g\pm h$，或$fh=gh$。

(3) 如果$f=g$，且$h=k\neq 0$，则$\frac{f}{k}=\frac{g}{k}$. 特别地，当$h\neq 0$，则$\frac{f}{h}=\frac{g}{h}$。

(4) 如果$f=g$，且$f\cdot g$为非负，则$f^2=g^2$或$\sqrt{f}=\sqrt{g}$。

(5) 如果 $f=g$，则$f^3=g^3$或$\sqrt[3]{f}=\sqrt[3]{g}$。

例3 求证

$$(1-\mathrm{tg}^2A)^2=(\sec^2A-2\mathrm{tg}A)(\sec^2A+2\mathrm{tg}A).$$

证明： $\because\quad 1+\mathrm{tg}^2A=\sec^2A,$

$(1+\mathrm{tg}^2A)^2=\sec^4A,$ 〔应用性质(4)〕

$1+2\mathrm{tg}^2A+\mathrm{tg}^4A-4\mathrm{tg}^2A=\sec^4A-4\mathrm{tg}^2A,$

〔应用性质(2)及和的平方公式〕

$\therefore\quad 1-2\mathrm{tg}^2A+\mathrm{tg}^4A=\sec^4A-(2\mathrm{tg}A)^2.$

〔应用合并同类项法则〕

$\therefore\quad (1-\mathrm{tg}^2A)^2=(\sec^2A-2\mathrm{tg}A)(\sec^2A+2\mathrm{tg}A).$

〔应用差的平方公式和平方差公式〕

【注】 这里由已知公式 $1+\mathrm{tg}^2A=\sec^2A$ 两边平方，再两边同减 $4\mathrm{tg}^2A$，作等式变换得到成立的等式，$1-2\mathrm{tg}^2A+\mathrm{tg}^4A=\sec^4A-4\mathrm{tg}^2A$，然后两边分别恒等变换，得到所证的等式。

例4 已知 $ax^2+bxy+cy^2=1$,① $cx^2+bxy+ay^2=1$,② 且 $a\neq c$，又 $x+y=1$， ③ 求证：

$$a+b+c=4.$$

证明： ①－②，得$(a-c)x^2+(c-a)y^2=0.$

〔应用性质(2)〕

$\therefore\quad (a-c)(x^2-y^2)=0.$ 〔应用提取公因式法则〕

$\because\quad a\neq c,\ \therefore\quad x^2-y^2=0.$ 〔应用性质(3)〕

$\therefore\quad (x+y)(x-y)=0.$ 〔应用平方差公式〕

$\because\quad x+y=1,\ \therefore\quad x-y=0,\ \therefore\quad x=y=\dfrac{1}{2}$.代入①，得

$(a+b+c)x^2=1.$

$\therefore\quad (a+b+c)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=1.$

$\therefore\quad a+b+c=4.$ 〔应用等式性质（2）〕

【注】这里由已知等式①、②相减所得等式，再两边除以 $a-c$，得 $x^2-y^2=0$ 与已知 $x+y=1$ 联立，求出 $x=y=\frac{1}{2}$。再证明。

有时也可以假设所证等式成立，进行一系列等式变形得到已知等式成立。

从上面例 3 、例 4 可以看到证明等式时，既用等式变换又用恒等变换，不少等式的证明是这两种变换交替进行的。

二、 恒等式的证明

我们知道，恒等式 $f=g$ 常常不是对于有关字母的一切值都成立的，而是只对于 D 中的任意值成立。所以，有关恒等式的证明的题目提法作如下规定。

（1）若有关字母均取任意实数时，可直接写“证明”或“求证”。

（2）若有关字母只对 D 中的任意值成立，应写明“证明恒等式”。

（3）不指明是恒等式，但必须在题目限定式中的字母的取值范围，可仍写“证明”或“求证”。

本书有关恒等式的证明题按上述规定加以叙述。

恒等式证明，可以从下面几个方面着手。

化简法：将等式两边中，较复杂的一边式子逐步通过恒等变形化成与较简单的一边式子相等，从而证明等式成立。

例1 求证

$$4xy(x^2-y^2)=(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy-y^2)^2.$$

证明： 本题右边较复杂，易从右边推证到左边。

右边$=(x^2+xy-y^2+x^2-xy-y^2)(x^2+xy-y^2-x^2+xy+y^2)$

$=(2x^2-2y^2)2xy=4xy(x^2-y^2)=$左边。

$\therefore$ 原等式成立。

例2 求证$\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

（$a\neq b\neq c$，且不同时为零）

证明： 本题左边较复杂，易从左边证到右边。

$$\because\quad \frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}$$

$$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}.$$

同理，$\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{a-b}$,

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}.$$

$\therefore$ 左边$=\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{b-c}$

$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}=\text{右边}$$

∴ 原等式成立。

例3 求证$(a+b)^3-(a-b)^2(a+b)=4ab(a+b)$。

证明： ∵ $(a+b)^2-(a-b)^2$

$$=(a+b+a-b)(a+b-a+b)=4ab,$$

两边同乘以$a+b$，得

$$(a+b)^3-(a-b)^2(a+b)=4ab(a+b)。$$

【注】 本题等式两边有公因式$a+b$，若$a+b=0$，等式显然成立；$a+b\neq 0$ 两边除以 $a+b$，改证$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$，这样较简便。

等式两边有公因式，可用此公因式除之，转化为与它等价的较简的等式。

同一法： 将等式两边都较复杂的式子，通过恒等变形化为同一式，从而证明等式成立。

例4 求证$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(c-a)(c-b)+2(b-a)(b-c)+2(a-b)(a-c)$。

证明： 本题两边式子都较复杂，可两边同时变形。

$$\text{左边}=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$$
$$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca);$$

$$\text{右边}=2(c^2-bc-ac+ab+b^2-bc-ba+ac+a^2-ac-ba+bc)=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)。$$

∴ 左边＝右边， ∴ 原等式成立。

例5 求证$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2$。

证明： 本题左右分别变形证明较麻烦，若将等式右边第