

初等代数解题方法指导

上册

叶景梅 编

$$x = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

宁夏人民出版社

初 等 数 学
解 题 方 法 指 导
(上册)

叶 景 梅

*

宁夏人民出版社出版
(银川市解放西街105号)
宁夏新华书店发行
宁夏新华印刷一厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 15.5 字数: 328千
1984年7月第1版第一次印刷
印数: 1 — 24,800册
书号: 7157·408 定 价: 1.25元

前 言

本书的对象是中学数学教师、中学学生及基本具备中学数学水平的青年。为了使本书适应这些读者的需要，我们力求做到：

第一，提供较系统和完整的初等代数方法，使读者在学完本书后能心中有数，解题时有所遵循。为此，本书各章节的内容是按照问题的性质及解题方法的类型分段的。每一段均对该类问题的可能解题方法作出了详细的总结和指导，阐明了精神实质、理论依据和前后联系。同时，各段均附有典型例题及精选的习题，使读者通过解题来理解和掌握该方法。最后，每册书后都附有较详细的解题提示和答案，以利于那些缺少指导教师或基础较差的读者进行自学。

第二，内容选择上参考了新编中学数学大纲，但有取舍。一些例题、习题，难度略有提高。由于附有解题提示，提高难度所引起的学习困难还是可以克服的。为了避免重复，对于现行课本中训练较多的方法和那些需要查表的计算题，不再编入本书。

第三，考虑到本书读者具备了一般的中学数学水平，因此在编排次序上，将不拘泥于中学课本的顺序。例如，在第二章中，除了一般的代数方程外，也同时包括了对数方程、指数方程、解不等式及证明不等式，以利于读者综合掌握解方

程的方法；又如第三章三角学中，也编入了利用三角函数解决几何学问题的内容，从而为读者解决几何学问题增加了一个途径。

第四，解题方法的类型较多，除了适应学习初等数学的需要外，对那些在高等数学中用得较多的初等方法，也将给予特殊的注意。此外，在读者知识水平允许的前提下，也少量地编入了与现代数学有联系的方法和习题，以期扩大读者的知识面并激发其钻研兴趣。

我们希望本书为青年教师教好数学课，为正在复习或深入学习初等代数的读者，提供一些参考。同时，也希望能对那些正在自学或准备自学高等数学的读者，职工业余大学理科的学员，在克服初等数学的障碍方面，有所帮助。

本书共两册。上册包括代数式、方程式与不等式、三角、函数等内容；下册包括数列与级数、排列与组合、复数、极限等内容。

由于编者水平所限，必然存在不当之处，敬请读者指正。

王景禹、赵翔同志检验了上册全部习题答案。在此，向他们以及其他促成本书能与读者见面的部门和同志，致以衷心的感谢。

编者 一九八三年

目 录

第一章 代数式	(1)
§ 1 整式.....	(2)
一、直式乘法 (3) 二、直式除法 (4) 三、运用公式进行乘法运算 (5) 四、运用公式进行除法运算 (6) 五、恒等式的证明 (8) 六、条件恒等式 (10) 七、待定系数法 (13) 八、整式除以一次式的余数 (14) 九、用整式研究整数问题 (16) 十、其它 (18)	
§ 2 因式分解.....	(19)
一、应用公式法 (19) 二、分组分解法 (20) 三、配方法 (21) 四、利用二次方程求根公式法 (23) 五、待定系数法 (24) 六、观察余数为零法 (26) 七、换元法 (27)	
§ 3 分式.....	(29)
一、约分 (30) 二、分式加减法 (I) (31) 三、分式加减法 (II) (33) 四、分式乘除法 (35) 五、分式的分离 (38) 六、比例 (40) 七、倒数 (43)	
§ 4 根式与幂.....	(45)
一、算术根 (46) 二、二重根号 (47) 三、分母有理化 (49) 四、概念推广后的幂的运算 (I) (53) 五、概念推广后的幂的运算 (I) (55)	
第二章 方程与不等式	(58)

§ 1 一元二次方程式…………… (59)

一、解一元二次方程 (60) 二、判别式 (61) 三、根与系数的关系 (63) 四、可转化为一元二次方程的分式方程 (65) 五、准二次方程式 (68) 六、倒数方程 (69)

§ 2 二元方程组…………… (71)

一、一个一次方程与一个二次方程的方程组 (72) 二、特殊类型的方程组 (74) 三、两个二元二次方程的方程组——有一个方程可分解因式的情况 (76) 四、两个二元二次方程的方程组——组合两方程后可分解因式的情况 (77) 五、分式方程组 (81) 六、某些可以降低次数的高次方程组 (83) 七、二元一次不定方程的整数解 (85) 八、某些非一次不定方程 (88)

§ 3 无理方程…………… (93)

一、一元无理方程的一般解法 (94) 二、由根式的意义判断无理方程解的情况 (96) 三、用换元法解一元无理方程 (98) 四、一类特殊的无理方程 (100) 五、一个有理方程与一个无理方程的方程组 (102) 六、两个无理方程的方程组 (104)

§ 4 指数方程与对数方程…………… (107)

一、对数法则的运用 (108) 二、指数方程 (112) 三、对数方程 (I) (114) 四、对数方程 (II) (116) 五、二元方程组 (118)

§ 5 解不等式与证明不等式…………… (120)

一、用不等式表示数的范围 (集合) (121) 二、解一次不等式 (123) 三、解二次不等式 (126) 四、二次不等式组 (129) 五、解绝对值不等式 (131) 六、不等式的证明——与零或1相比较的方法 (134) 七、不等

式的证明——放大或缩小的方法(139)	八、不等式的证明——反证法 (143)	九、算术平均、几何平均及调和平均 (I) (145)	十、算术平均、几何平均及调和平均 (I) (150)	十一、柯西不等式 (156)
附录 霍尔德不等式和明柯夫斯基不等式	(159)			
§ 6 行列式	(163)			
一、二阶和三阶行列式的直接展开算法	(167)			
二、利用性质计算行列式 (170)	三、拆项法 (177)			
四、加边法 (181)	五、递推法 (185)			
第三章 三角	(194)			
§ 1 锐角的三角函数	(195)			
一、三角函数的概念(196)	二、由一函数值求同角的其它函数值(199)	三、三角函数式的恒等变形 (202)		
四、三角函数恒等式的证明(204)	五、余角的三角函数 (208)	六、三角函数式的值(209)	七、三角函数消去法 (213)	八、条件恒等式 (216)
§ 2 任意角的三角函数	(218)			
一、任意角三角函数的概念(220)	二、同角三角函数间的关系 (222)	三、三角函数式的恒等变形 (225)		
四、诱导公式 (228)				
§ 3 加法定理及其推论	(230)			
一、恒等式的证明 (I) (232)	二、恒等式的证明 (I)(237)	三、条件恒等式(242)	四、和与积形式的转换(245)	五、具体的计算题 (249)
六、特殊角三角函数的值(254)	七、一些特殊的三角函数式的值 (257)	八、 n 个三角函数式的和与积 (261)	九、有理化变换 (264)	十、三角函数不等式的证明 (266)

§ 4 反三角函数与三角方程……………(270)

- 一、施于反三角函数的三角运算 (272) 二、施于三角函数的反三角运算 (276) 三、反三角函数之间的关系 (278) 四、换元为普通代数方程的三角方程的解法 (280) 五、齐次三角方程 (283) 六、利用加法定理及其推论解三角方程 (286)

§ 5 三角函数在几何学上的应用……………(293)

- 一、三角形内角的三角函数恒等式 (295) 二、三角形中角与边之间的关系 (298) 三、三角形的非基本元素 (301) 四、直角三角形 (304) 五、斜三角形 (306) 六、对元素施加某些限制的三角形 (311) 七、多边形 (313) 八、其它 (315)

第四章 函数……………(321)

§ 1 函数的概念……………(322)

- 一、区间 (323) 二、函数的定义域 (325) 三、函数值 (328) 四、建立函数关系 (331) 五、由几个解析式表达的函数及其图象 (333) 六、函数 $[x]$ 与 $\{x\}$ (338) 七、由某些恒等式求函数表达式 (342)

§ 2 初等函数……………(347)

- 一、线性函数 (349) 二、二次函数 (351) 三、有理函数与无理函数 (356) 四、有关指数函数、对数函数的初等函数 (360) 五、有关三角函数的初等函数 (I) —— 周期性问题 (363) 六、有关三角函数的初等函数 (II) —— 单调性、值域等问题 (369) 七、函数的奇偶性 (374)

提示与答案……………(376)

第一章 代数式

算术中，我们遇到的都是具体的数字。一旦用抽象的字母去代替具体的数字，就产生了代数。这是认识上的一个飞跃。然而，我们也不应把一个字母僵化地理解成仅仅是这个字母本身：它既可表示一个数、一个字母，也可以表示一个式子、一个函数等等。因此，字母的运算，实质上是形式的运算。也就是说，字母是被抽象了的，它所代表的具体内容则是无关紧要的。本书中许多换元法例题和习题，正是这一精神的反映。

初等数学中，仅讨论有限次运算。用有限次的加、减、乘、除、乘方和开方的运算，把数字或字母连结起来的式子，称为代数式。本章集中讨论整式、分式、幂（包括根式）等代数式。其中因式分解是代数式运算的关键。因此，除了在本章§2进行专门训练外，其它各节也都结合了因式分解的方法和技巧。

此外，本章各节还采用了待定系数法和换元法。这些方法既提供了解题途径，又能加深读者对初等数学的理解。还应指出，它们是高等数学中的常用方法，因此，熟练掌握这些方法，对于准备学习高等数学的读者，就更重要了。

为了培养读者的分析和推理能力，本章习题中还特别注意了恒等式的证明。

§ 1. 整式

我们统称单项式和多项式为整式。同一个整式里，字母之间是由加、减、乘（包括乘方）三种运算联系的，但对各项的系数，则允许有其它运算。

整式之间的四则运算，与算术中数的运算类似，满足交换律、结合律、分配律等基本定律。

由于整式的加减法本质上只是同类项的合并，是容易掌握的，本书将不再作专门讨论。

整式的乘除法尚须使用下面的指数法则①：

$$1^{\circ} \quad a^m \times a^n = a^{m+n};$$

$$2^{\circ} \quad a^m \div a^n = a^{m-n};$$

$$3^{\circ} \quad (a^m)^n = a^{mn};$$

$$4^{\circ} \quad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$5^{\circ} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

在整式运算中往往需要使用一些公式，以便迅速求得结果。常用的公式有：

$$1^{\circ} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$2^{\circ} \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$3^{\circ} \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

① 联系到幂的概念的推广，所述五个法则中，指数 m 、 n 可不作限制。但这时幂的底则往往限制为代表正数。

$$4^{\circ} (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$5^{\circ} (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

对于每一个公式，都应学会两个方向（即从左式到右式与从右式到左式）的使用方法。

一、直式乘法

例1. 计算 $(x^4 - 2x^2 - x - 3)(x^4 - x^3 - x - 3)$ 。

解：被乘式与乘式都按降幂排列，列直式相乘如下：

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 0 - 2x^2 - x - 3 \\
 \times) \quad x^4 - x^3 + 0 - x - 3 \\
 \hline
 x^8 + 0 - 2x^6 - x^5 - 3x^4 \\
 - x^7 + 0 + 2x^5 + x^4 + 3x^3 \\
 - x^5 + 0 + 2x^3 + x^2 + 3x \\
 +) \quad -3x^4 + 0 + 6x^2 + 3x + 9 \\
 \hline
 x^8 - x^7 - 2x^6 + 0 - 5x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 6x + 9 \\
 \therefore \text{原式} = x^8 - x^7 - 2x^6 - 5x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 6x + 9.
 \end{array}$$

【指导与说明】

1° 凡较复杂的整式相乘，一般可采用直式计算。

2° 若整式未按降幂（也可按升幂）排列，则应先行整理。若有缺项，则应补以 0。

3° 若整式含有不止一个字母时，应从中选取一个字母为标准来排列。

4° 第 5 题结果应作为公式进行记忆。它在解任意一元三次方程及进行某些三次多项式的因式分解时，是很有用的。

【习题】

1. 计算 $(x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.
2. 计算 $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)(a - b)$.
3. 对前题结果再乘以 $a - b$.
4. 计算 $[x^5 + a^5 - ax(x^3 + a^3)][a^3 + x^3 - ax(x + a)]$.
5. 用直式乘法验证下面公式, 并背熟这一公式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2](a+b+c) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(a+b+c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc. \end{aligned}$$

二、直式除法

例2. 计算 $(2a^2x^2 - 6b^2y^2 + 14bcxy^2 - 8c^2y^2 + abxy) \div (ax + 2by - 2cy)$.

解: 先将被除式、除式分别整理如下:

$$\begin{aligned} \text{被除式} &= 2a^2x^2 - 2(3b^2 - 7bc + 4c^2)y^2 + abxy \\ &= 2a^2x^2 + abyx - 2(b-c)(3b-4c)y^2, \end{aligned}$$

$$\text{除式} = ax + 2(b-c)y.$$

按 x 的降幂次序列直式相除如下:

$$\begin{array}{r} 2ax - (3b - 4c)y \\ ax + 2(b-c)y \overline{) 2a^2x^2 + abyx - 2(b-c)(3b-4c)y^2} \\ \underline{-(2a^2x^2 + 4a(b-c)yx)} \\ -a(3b-4c)yx - 2(b-c)(3b-4c)y^2 \\ \underline{-(-a(3b-4c)yx - 2(b-c)(3b-4c)y^2)} \\ \therefore \text{原式} = 2ax - (3b - 4c)y. \end{array}$$

【指导与说明】

1° 例1的指导与说明第1°——3°款，对除法也适用。

2° 两整式相除，若除不尽时，结果除了得商式外，还将有余式。余式的次数应低于除式的次数（对选作标准的字母而言）。第7、8、9题均有余式。

【习题】

用直式计算：

$$6. (a^5 + b^5) \div (a + b).$$

$$7. (x^4 + 1) \div (x + 1).$$

$$8. (x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 16x + 13) \div (x^2 - 3x + 2).$$

$$9. (a^{3n} - a^{2n} + a^n - 1) \div (a^n + 1).$$

$$10. [acx^3 + (ad - bc)x^2 - (ac + bd)x + bc] \div (ax - b).$$

三、运用公式进行乘法运算

例3. 计算 $(a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(a^2 + 2ab - b^2 + c^2)$ 。

解：根据公式

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

立即可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= [(a^2 + 2ab + (b^2 - c^2))][(a^2 + 2ab) - (b^2 - c^2)] \\ &= (a^2 + 2ab)^2 - (b^2 - c^2)^2 \\ &= a^4 + 4a^2b + 4a^2b^2 - b^4 + 4b^2c^2 - c^4. \end{aligned}$$

【指导与说明】

1° 乘法运算中凡可利用公式的，应尽量利用公式进行计算。

2° 对于各公式，应在熟记的基础上，深刻理解它们是形式的公式：公式中的字母，并不局限于代表数字，字母还可代表式子，甚至代表函数，而结果的形式是不变的。

【习题】

运用公式计算：

$$11. (x^4 + 16y^4)(x^2 + 4y^2)(x + 2y)(x - 2y).$$

$$12. (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x^2 + 1).$$

$$13. (y^3 - y^2 + 2y + 1)^2.$$

$$14. (x + y + z)^2 - (y + z - x)^2 + (z + x - y)^2 - (x + y - z)^2.$$

$$15. (2x + y)^3 - 3(2x + y)^2(x + 2y) + 3(2x + y)(x + 2y)^2 - (x + 2y)^3.$$

四、运用公式进行除法运算

例4. 计算 $[(a-b)x^3 + (b^3 - a^3)x + ab(a^2 - b^2)] \div [(a-b)x + a^2 - b^2]$.

解：运用平方差及立方差的公式，极易看出被除式及除式各项都有因式 $a-b$ 。因此，先约去此因式再进行除法运算，计算就简单多了：

原式 $= [x^3 - (a^2 + ab + b^2)x + ab(a+b)] \div (x + a + b)$ 。
现作直式除法如下：

$$\begin{array}{r} x^2 - (a+b)x + ab \\ x+a+b \overline{) x^3 + \quad 0 - (a^2 + ab + b^2)x + ab(a+b)} \\ \underline{x^3 + (a+b)x^2} \\ - (a+b)x^2 - (a^2 + ab + b^2)x \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -(a+b)x^2 - (a+b)^2x \\
 \hline
 abx + ab(a+b) \\
 \hline
 abx + ab(a+b) \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

$$\therefore \text{原式} = x^2 - (a+b)x + ab.$$

【指导与说明】

1° 同例3的指导与说明，但应注意公式的使用程序往往与乘法相反。

2° 应用公式进行除法计算，实质上与因式分解有密切的关系，因此这部分内容与本章 §2 结合起来。

3° 在解题时应注意对全部项的综合分析和对比，切忌不假思索就去硬做。如例4是通过对被除式和除式作全面分析，发现有公因式 $a-b$ 可先行约去而化简了计算的。第20题被除式中的 x^2+4x+8 与除式区别不大。这一特征正是应利用来简化计算的：令 $x^2+4x+8=y$ ，原式则成为

$$(y^2 + 3xy + 2x^2) \div (y + x).$$

【习题】

16. 计算 $(27x^3 + 8y^3) \div (3x + y)$ 。

17. 计算 $(a^2 + 2ac - b^2 - 2bd + c^2 - d^2) \div (a - b + c - d)$ 。

18. 计算 $(8x^3 + 8y^3 + z^3 - 12xyz) \div (2x + 2y + z)$ 。

19. 不展开 $(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3$ ，判断它是否能被 $2x^2 + 2y^2$ 除尽？

20. 计算 $[(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2] \div (x^2 + 5x + 8)$ 。

五、恒等式的证明

例5. 试证

$$(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x+y+z)^2.$$

证明：利用平方差公式可得

$$\begin{aligned}\text{左式} &= (y+z)^2 - x^2 + (z+x)^2 - y^2 + (x+y)^2 - z^2 \\ &= (y+z+x)(y+z-x) + (z+x+y)(z+x-y) \\ &\quad + (x+y+z)(x+y-z) \\ &= (x+y+z)[(y+z-x) + (z+x-y) + (x+y-z)] \\ &= (x+y+z)(x+y+z) = \text{右式}. \quad \text{证毕}.\end{aligned}$$

【指导与说明】

1° 不加限制而成立的等式，称为恒等式。凡恒等式都可以当作公式使用①。

2° 在恒等变形的过程中，要牢记目标是什么。应使每一次变形后，式子的形状更接近于目标式的形状。因此，在解第23—25题时，全部展开不是好方法。例如对于第22题，目标式(左边)的一部分有因式 $a+b$ ，因而右式变形时就应尽量保留 $a+b$ ，不要把它拆开。又如对于第25题，若全部展开将是很费时间的，而且也不能从解题中提高自己的观察力。因此，除了《答案与提示》所指出的方法外，还可将 $(a+b+c)^3$ 与 c^3 放在一起利用立方差公式分解因式，因余下的两项也有 $a+b$ ，所以等号左边可以提取出公因式 $a+b$ 。

3° 若有已知公式可采用时，可利用公式作为变形的手

① 公式不一定是恒等式，如在微积分学、泛函分析等方面起着重要作用的不等式 $|x+y| \leq |x| + |y|$ ，就是一个不等式的公式。

段，如第23、24题。有时还须运用已知的著名习题结果来作为变形手段，如第26题应运用第25题的结果，然后对部分项分别作分解，最后作换元并利用第5题结果。

4° 当恒等式左右两边的式子都较复杂时，也可对两边的式子分别进行变形，最后使它们都恒等于第三个式子，如第27题。

5° 有些恒等式可以通过移项而改为证明另一个与其等价的恒等式，如第21题。

【习题】

证明下列各恒等式：

$$\begin{aligned} 21. (x+y)(x+z) - x^2 &= (y+z)(y+x) - y^2 \\ &= (z+x)(z+y) - z^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. (a+b)(b+c)(c+a) + abc \\ &= (a+b+c)(bc+ca+ab). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \\ &= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 + 2(x+y)(x+z) \\ &+ 2(y+z)(y+x) + 2(z+x)(z+y) \\ &= 4(x+y+z)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. (a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) \\ &= 3(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. (a+b+c)^3 - (b+c)^3 - (c+a)^3 - (a+b)^3 + a^3 + b^3 \\ &+ c^3 - 6abc = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27. (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \\ &= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2. \end{aligned}$$