# 初等代数解题方法指导

上册

叶景梅 编

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

宁夏人民出版社

**初等数学**
**解题方法指导**
（上册）
叶　景　梅
*
宁夏人民出版社出版
（银川市解放西街105号）
宁夏新华书店发行
宁夏新华印刷一厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：15·5 字数：328千
1984年7月第1版第一次印刷
印数：1——24,800册
书号：7157·408　　定　价：1.25元

# 前　言

本书的对象是中学数学教师、中学学生及基本具备中学数学水平的青年。为了使本书适应这些读者的需要，我们力求做到：

第一，提供较系统和完整的初等代数方法，使读者在学完本书后能心中有数，解题时有所遵循。为此，本书各章节的内容是按照问题的性质及解题方法的类型分段的。每一段均对该类问题的可能解题方法作出了详细的总结和指导，阐明了精神实质、理论依据和前后联系。同时，各段均附有典型例题及精选的习题，使读者通过解题来理解和掌握该方法。最后，每册书后都附有较详细的解题提示和答案，以利于那些缺少指导教师或基础较差的读者进行自学。

第二，内容选择上参考了新编中学数学大纲，但有取舍。一些例题、习题，难度略有提高。由于附有解题提示，提高难度所引起的学习困难还是可以克服的。为了避免重复，对于现行课本中训练较多的方法和那些需要查表的计算题，不再编入本书。

第三，考虑到本书读者具备了一般的中学数学水平，因此在编排次序上，将不拘泥于中学课本的顺序。例如，在第二章中，除了一般的代数方程外，也同时包括了对数方程、指数方程、解不等式及证明不等式，以利于读者综合掌握解方

程的方法；又如第三章三角学中，也编入了利用三角函数解决几何学问题的内容，从而为读者解决几何学问题增加了一个途径。

第四，解题方法的类型较多，除了适应学习初等数学的需要外，对那些在高等数学中用得较多的初等方法，也将给予特殊的注意。此外，在读者知识水平允许的前提下，也少量地编入了与现代数学有联系的方法和习题，以期扩大读者的知识面并激发其钻研兴趣。

我们希望本书为青年教师教好数学课，为正在复习或深入学习初等代数的读者，提供一些参考。同时，也希望能对那些正在自学或准备自学高等数学的读者，职工业余大学理科的学员，在克服初等数学的障碍方面，有所帮助。

本书共两册。上册包括代数式、方程式与不等式、三角、函数等内容；下册包括数列与级数、排列与组合、复数、极限等内容。

由于编者水平所限，必然存在不当之处，敬请读者指正。

王景禹、赵翔同志检验了上册全部习题答案。在此，向他们以及其他促成本书能与读者见面的部门和同志，致以衷心的谢意。

编者　一九八三年

# 目　　录

# 第一章　代数式

算术中，我们遇到的都是具体的数字．一旦用抽象的字母去代替具体的数字，就产生了代数．这是认识上的一个飞跃．然而，我们也不应把一个字母僵化地理解成仅仅是这个字母本身：它既可表示一个数、一个字母，也可以表示一个式子、一个函数等等．因此，字母的运算，实质上是形式的运算．也就是说，字母是被抽象了的，它所代表的具体内容则是无关紧要的．本书中许多换元法例题和习题，正是这一精神的反映．

初等数学中，仅讨论有限次运算．用有限次的加、减、乘、除、乘方和开方的运算，把数字或字母连结起来的式子，称为代数式．本章集中讨论整式、分式、幂（包括根式）等代数式．其中因式分解是代数式运算的关键．因此，除了在本章§2进行专门训练外，其它各节也都结合了因式分解的方法和技巧．

此外，本章各节还采用了待定系数法和换元法．这些方法既提供了解题途径，又能加深读者对初等数学的理解．还应指出，它们是高等数学中的常用方法，因此，熟练掌握这些方法，对于准备学习高等数学的读者，就更显重要了．

为了培养读者的分析和推理能力，本章习题中还特别注意了恒等式的证明．

# §1. 整式

我们统称单项式和多项式为整式。同一个整式里，字母之间是由加、减、乘（包括乘方）三种运算联系的，但对各项的系数，则允许有其它运算。

整式之间的四则运算，与算术中数的运算类似，满足交换律、结合律、分配律等基本定律。

由于整式的加减法本质上只是同类项的合并，是容易掌握的，本书将不再作专门讨论。

整式的乘除法尚须使用下面的指数法则①：

1° $a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$；

2° $a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}$；

3° $(a^{m}(^{n}=a^{mn}$；

4° $(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$；

5° $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$.

在整式运算中往往需要使用一些公式，以便迅速求得结果。常用的公式有：

1° $(a+b)(a-b)=a^{2}-b^{2}$；

2° $(a\pm b)^{2}=a^{2}\pm 2ab+b^{2}$；

3° $a^{3}\pm b^{3}=(a\pm b)(a^{2}\mp ab+b^{2})$；

---

① 联系到幂的概念的推广，所述五个法则中，指数$m$、$n$可不作限制。但这时幂的底则往往限制为代表正数。

4° $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

5° $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

对于每一个公式，都应学会两个方向（即从左式到右式与从右式到左式）的使用方法。

## 一、直式乘法

**例1.** 计算$(x^4 - 2x^2 - x - 3)(x^4 - x^3 - x - 3)$.

解：被乘式与乘式都按降幂排列，列直式相乘如下：

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & x^4 & +0 & -2x^2 & -x & -3 & & & & \\
\times) & x^4 & -x^3 & +0 & -x & -3 & & & & \\
\hline
 & x^8 & +0 & -2x^6 & -x^5 & -3x^4 & & & & \\
 & & -x^7 & +0 & +2x^5 & +x^4 & +3x^3 & & & \\
 & & & & -x^5 & +0 & +2x^3 & +x^2 & +3x & \\
+) & & & & & -3x^4 & +0 & +6x^2 & +3x & +9 \\
\hline
 & x^8 & -x^7 & -2x^6 & +0 & -5x^4 & +5x^3 & +7x^2 & +6x & +9
\end{array}
$$

∴ 原式 $= x^8 - x^7 - 2x^6 - 5x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 6x + 9$.

**【指导与说明】**

1° 凡较复杂的整式相乘，一般可采用直式计算。

2° 若整式未按降幂（也可按升幂）排列，则应先行整理。若有缺项，则应补以0。

3° 若整式含有不止一个字母时，应从中选取一个字母为标准来排列。

4° 第5题结果应作为公式进行记忆。它在解任意一元三次方程及进行某些三次多项式的因式分解时，是很有用的。

**【习题】**

1.计算 $(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$ .

2.计算 $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)(a-b)$ .

3.对前题结果再乘以$a-b$。

4.计算 $[x^5+a^5-ax(x^3+a^3)][a^3+x^3-ax(x+a)]$.

5.用直式乘法验证下面公式，并背熟这一公式：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2](a+b+c)\\&\quad=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a+b+c)\\&\quad=a^3+b^3+c^3-3abc.\end{aligned}$$

## 二、直 式 除 法

**例2.计算** $(2a^2x^2-6b^2y^2+14bcy^2-8c^2y^2+abxy)\div(ax+2by-2cy)$。

解：先将被除式、除式分别整理如下：

被除式 $=2a^2x^2-2(3b^2-7bc+4c^2)y^2+abxy$

$\quad\quad=2a^2x^2+abyx-2(b-c)(3b-4c)y^2$,

除式 $=ax+2(b-c)y$.

按$x$的降幂次序列直式相除如下：

$$\begin{array}{r|lr}
 & 2ax-(3b-4c)y & \\ \hline
ax+2(b-c)y & 2a^2x^2+abyx & -2(b-c)(3b-4c)y^2\\
-) & 2a^2x^2+4a(b-c)yx & \\ \hline
 & -a(3b-4c)yx & -2(b-c)(3b-4c)y^2\\
-) & -a(3b-4c)yx & -2(b-c)(3b-4c)y^2\\ \hline
\end{array}$$

$\therefore$ 　　原式 $=2ax-(3b-4c)y$.

**【指导与说明】**

1° 例 1 的指导与说明第1°——3°款，对除法也适用。

2° 两整式相除，若除不尽时，结果除了得商式外，还将有余式。余式的次数应低于除式的次数（对选作标准的字母而言）。第 7 、 8 、 9 题均有余式。

**【习题】**

用直式计算：

6 . $(a^5+b^5)\div(a+b)$。

7 . $(x^4+1)\div(x+1)$。

8 . $(x^5-5x^4+9x^3-6x^2-16x+13)\div(x^2-3x+2)$。

9 . $(a^{3n}-a^{2n}+a^n-1)\div(a^n+1)$。

10. $[acx^3+(ad-bc)x^2-(ac+bd)x+bc]\div(ax-b)$。

## 三、运用公式进行乘法运算

**例3**。计算$(a^2+2ab+b^2-c^2)(a^2+2ab-b^2+c^2)$。

解：根据公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$

立即可得

$$\begin{aligned}原式&=[(a^2+2ab+(b^2-c^2)][(a^2+2ab)-(b^2-c^2)]\\&=(a^2+2ab)^2-(b^2-c^2)^2\\&=a^4+4a^3b+4a^2b^2-b^4+4b^2c^2-c^4.\end{aligned}$$

**【指导与说明】**

1° 乘法运算中凡可利用公式的，应尽量利用公式进行计算。

2° 对于各公式，应在熟记的基础上，深刻理解它们是形式的公式：公式中的字母，并不局限于代表数字，字母还可代表式子，甚至代表函数，而结果的形式是不变的。

**【习题】**

运用公式计算：

11. $(x^4+16y^4)(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$。

12. $(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4+x^2+1)$。

13. $(y^3-y^2+2y+1)^2$。

14. $(x+y+z)^2-(y+z-x)^2+(z+x-y)^2-(x+y-z)^2$。

15. $(2x+y)^3-3(2x+y)^2(x+2y)+3(2x+y)(x+2y)^2-(x+2y)^3$。

## 四、运用公式进行除法运算

**例4.** 计算$[(a-b)x^3+(b^3-a^3)x+ab(a^2-b^2)]\div[(a-b)x+a^2-b^2]$。

解：运用平方差及立方差的公式，极易看出被除式及除式各项都有因式$a-b$。因此，先约去此因式再进行除法运算，计算就简单多了：

原式$=[x^3-(a^2+ab+b^2)x+ab(a+b)]\div(x+a+b)$。

现作直式除法如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-(a+b)x+ab \\
\hline
x+a+b & x^3+\quad 0-(a^2+ab+b^2)x+ab(a+b) \\
 & x^3+(a+b)x^2 \\
\hline
 & -(a+b)x^2-(a^2+ab+b^2)x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-(a+b)x^2-(a+b)^2x \\
\hline
abx+ab(a+b) \\
abx+ab(a+b) \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ 原式 $=x^2-(a+b)x+ab$。

**【指导与说明】**

1° 同例3的指导与说明，但应注意公式的使用程序往往与乘法相反。

2° 应用公式进行除法计算，实质上与因式分解有密切的关系，因此这部分内容与本章 §2 结合起来。

3° 在解题时应注意对全部项的综合分析和对比，切忌不假思索就去硬做。如例4是通过对被除式和除式作全面分析，发现有公因式$a-b$可先行约去而化简了计算的。第20题被除式中的$x^2+4x+8$与除式区别不大。这一特征正是应利用来简化计算的：令$x^2+4x+8=y$，原式则成为

$$(y^2+3xy+2x^2)\div(y+x)。$$

**【习题】**

16. 计算$(27x^3+8y^3)\div(3x+y)$。

17. 计算$(a^2+2ac-b^2-2bd+c^2-d^2)\div(a-b+c-d)$。

18. 计算$(8x^3+8y^3+z^3-12xyz)\div(2x+2y+z)$。

19. 不展开$(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$，判断它是否能被$2x^2+2y^2$除尽？

20. 计算$[(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2]$
$\div(x^2+5x+8)$。

## 五、恒等式的证明

**例5.** 试证

$$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-x^2-y^2-z^2=(x+y+z)^2.$$

证明：利用平方差公式可得

$$\begin{aligned}\text{左式}&=(y+z)^2-x^2+(z+x)^2-y^2+(x+y)^2-z^2\\&=(y+z+x)(y+z-x)+(z+x+y)(z+x-y)\\&\quad+(x+y+z)(x+y-z)\\&=(x+y+z)[(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)]\\&=(x+y+z)(x+y+z)=\text{右式}.\end{aligned}$$

证毕。

**【指导与说明】**

1° 不加限制而成立的等式，称为恒等式。凡恒等式都可以当作公式使用①。

2° 在恒等变形的过程中，要牢记目标是什么。应使每一次变形后，式子的形状更接近于目标式的形状。因此，在解第23—25题时，全部展开不是好方法。例如对于第22题，目标式(左边)的一部分有因式$a+b$，因而右式变形时就应尽量保留$a+b$，不要把它拆开。又如对于第25题，若全部展开将是很费时间的，而且也不能从解题中提高自己的观察力。因此，除了《答案与提示》所指出的方法外，还可将$(a+b+c)^3$与$c^3$放在一起利用立方差公式分解因式，因余下的两项也有$a+b$，所以等号左边可以提取出公因式$a+b$。

3° 若有已知公式可采用时，可利用公式作为变形的手

---

① 公式不一定都是恒等式，如在微积分学、泛函分析等方面起着重要作用的不等式$|x+y|\leqslant|x|+|y|$，就是一个不等式的公式。

段，如第23、24题。有时还须运用已知的著名习题结果来作为变形手段，如第26题应运用第25题的结果，然后对部分项分别作分解，最后作换元并利用第5题结果。

4° 当恒等式左右两边的式子都较复杂时，也可对两边的式子分别进行变形，最后使它们都恒等于第三个式子，如第27题。

5° 有些恒等式可以通过移项而改为证明另一个与其等价的恒等式，如第21题。

**【习题】**

证明下列各恒等式：

21. $(x+y)(x+z)-x^2=(y+z)(y+x)-y^2$
$=(z+x)(z+y)-z^2$。

22. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$
$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$。

23. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$
$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$。

24. $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2+2(x+y)(x+z)$
$+2(y+z)(y+x)+2(z+x)(z+y)$
$=4(x+y+z)^2$。

25. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$
$=3(a+b)(b+c)(c+a)$。

26. $(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3+a^3+b^3$
$+c^3-6abc=0$。

27. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$。