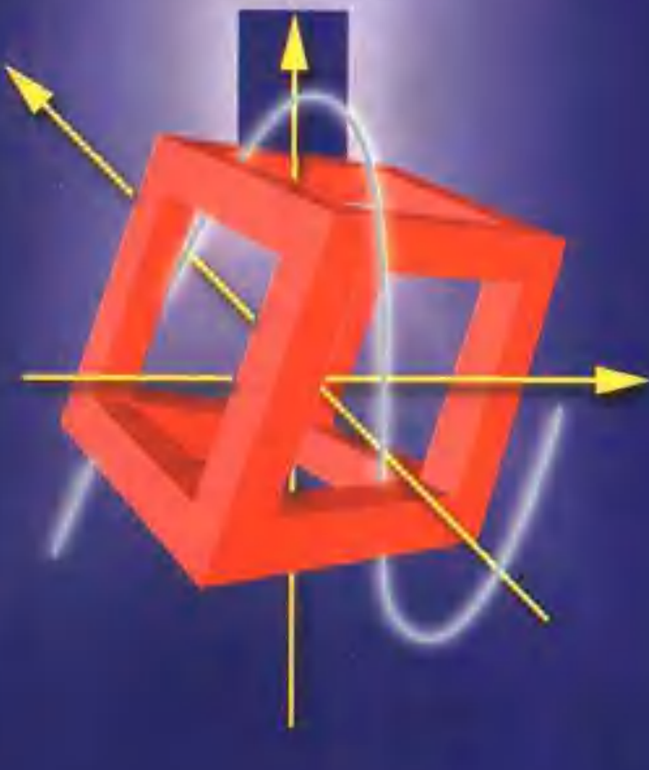
高中数学
应用题同步训练

（高一分册）

丛日明　李伯华　黄美云　编著

新教材



江苏教育出版社

高中数学
应用题同步训练
（高一分册）

丛日明　李伯华　黄美云　编著

江苏教育出版社

高中数学应用题同步训练

（高一分册）

丛日明　李伯华　黄美云　编著

责任编辑　蔡　立　杨新华

出版发行：江　苏　教　育　出　版　社

（南京市马家街 31 号，邮政编码：210009）

网　　址：http://www.edu-publisher.com

经　　销：江　苏　省　新　华　书　店

照　　排：南京展望照排印刷有限公司

印　　刷：南　京　五　四　印　刷　厂

（南京中和桥 61 号，邮政编码：210007）

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 6　插页 1　字数 144 300

2000 年 10 月第 1 版　　2000 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—5000 册

ISBN 7—5343—3955—3

G·3650　　　　定价：7.80 元

图书在版编目(CIP)数据

高中数学应用题同步训练. 高一分册/丛日明,李伯华,黄美云编著. —南京:江苏教育出版社, 2000

ISBN 7-5343-3955-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①丛…②李…③黄… Ⅲ.数学课-高中-习题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 70843 号

前　言

先讲一个真实故事.

本书作者之一丛老师,曾在 1997 年患胆结石,去医院经 X 光检查,只能确定结石的大小,而不能确定结石的准确位置,因此就无法确定手术时刀口的准确位置.

为了确定手术时刀口的准确位置(目的在于缩短手术时间,避免刀口过大,从而减轻患者的痛苦),根据 X 光检查时测得的一个数据,又结合为这次手术主刀的王医生在患者身体表面测量的数据,我们把这个医学问题转化为数学问题,先推导出一个有关的通用公式,然后计算出刀口的准确位置.王医生根据我们的计算结果实施手术,用了最短时间、开了最小刀口就取出了结石.

事后,王医生以上述有关通用公式的推导和应用为内容,写出了一篇学术论文,在医学杂志上公开发表.这篇论文的学术价值在于,它将数学理论与医学实践紧密结合,把通常是以经验为主的定性分析,上升为科学严谨的定量分析.它同时也启发了广大医务工作者,应用数学方法来解决医学问题是开展创造性工作的有效方法之一.

其实,医学是这样,其他学科又何尝不是这样?宏观地说,人类进入 21 世纪,生产的发展、生活的提高、科技的进步,必将越来越多地提出各种各样的实际问题.对于这些实际问题,应用社会科学和自然科学的综合知识,往往也能给出它们的定性分析,而惟有数学科学才能将这种定性分析上升为定量分析,使实际问题得到完美的解决.

正是以上的这些思考,使我们萌发了编写一本以广大中学生为读者对象,帮助他们结合实际应用问题学习数学的小册子的念

头，早在 1993 年，我们就开始了相关资料的搜集、整理工作．从 2000 年秋季开始，全国部分省市将在高中数学教学中执行新的高中数学教学大纲，使用人民教育出版社高中数学新教材．而与以往大纲、教材相比，新大纲、新教材的一个重要特点就是更强调培养学生应用数学知识解决实际问题的能力．根据这样的新情况，江苏教育出版社有意出版一套与人教社高中新教材同步，将解决实际问题能力的培养渗透到平时的数学学习中的丛书，这正与我们的想法不谋而合．这也才有了读者现在拿在手中的这本《高中数学应用题同步训练(高一分册)》(高二、高三分册将陆续出版)．我们在高一分册中选编了 106 道例题和 111 道练习题，共计 217 道题目，它们全部是类似于前面所讲故事那样的实际问题(前面所讲的那个故事将在本书高二分册中，应用椭圆的标准方程知识详细介绍)．表面看来这些问题千差万别，包括医学、经济学、考古学、测量学、统计学、电学、热学、力学、机械加工等各个方面，甚至牵涉到了美国总统竞选，但它们都有一个共同特征：应用高中一年级所学的数学知识，即可使问题得到圆满的解决．

这里还有一个不可回避的问题，即高考问题．我国在 1949 年建国后，从 1951 年开始全国统一高考，其中从 1966 年到 1976 年因“文革”而中断 11 年，从 1977 年开始又恢复了高考．纵观半个世纪以来的高考，将实际应用问题作为高考数学试题，可谓是几经波折，历尽沧桑．

1951 年高考有这样两道小题：(1) 当太阳的仰角是 60°时，若旗杆之影长为 1 丈，则旗杆长若干丈？(2) 国旗上的正五角星的每个顶角是多少度？

1958 年高考有这样一道分值为 15 分的考题：有甲乙两容器，甲容器是直圆柱形，高为 2 寸，底半径为 1 寸；乙容器是直圆锥形(锥顶向下)，高为 2 寸，底半径为 $2\sqrt{3}$ 寸．若将甲容器装满水，然后把甲容器的部分水倒入乙容器，使得两容器内水面一样高，这时

水面的高是多少?

这两道题可以算作是高考中最早出现的应用题.令人遗憾的是,从 1979 年到 1992 年的 14 年间,应用题在高考中几乎销声匿迹了.但从 1993 年以来,应用题重新又成为高考的热点问题,受到人们的广泛关注.到 2000 年,连续 8 年高考应用题的分值在 12 分以上.这种变化,引起了中学数学界乃至整个社会的震动和重视.因此,站在面向 21 世纪数学教育的高度,来研究高中数学应用题的教学,提高对数学的应用意识,应该是我们每一个数学教育工作者义不容辞的责任.

千里之行,始于足下.应用数学知识解决实际问题,首先要学会数学模型方法(Mathematical Modelling Method).所谓数学模型方法,即把实际问题加以抽象概括,建立相应的数学模型,利用这些模型来研究实际问题的一般数学方法.而所谓数学模型,即把实际问题用数学语言抽象概括,再从数学角度来反映或近似反映实际问题时,所得出的关于实际问题的数学描述.数学模型可以是多种多样的,仅就本书高一分册而言,所涉及到的数学模型主要是集合、命题、函数解析式、函数图象、数列、三角形、正弦型函数、正弦型曲线、平面向量.

由于我们的水平所限,本书中的谬误在所难免,恳请广大读者和有关专家批评指正(这不是一句客套话,来信请寄:226003,江苏南通市城港路 16 号,李伯华).

在本书的写作过程中,得到了缪建新、蒋淦悌、陆踊、杨德钊、章毓钢等同志的关心和支持,谨此表示衷心感谢.

2000 年 7 月

目　　录

前　言 …………………………………………………… 1

第一章　集合与简易逻辑 ……………………………… 1

1.1　有限集合的元素个数 ……………………………… 1
1.2　简易逻辑的应用举例 ……………………………… 7

第二章　函数 …………………………………………… 12

2.1　二次函数的应用举例……………………………… 12
2.2　分段函数的应用举例……………………………… 24
2.3　根据函数的图象解决实际问题 ………………… 33
2.4　指数函数与对数函数的应用举例 ……………… 40
2.5　已知函数解析式解决实际问题 ………………… 50
2.6　建立函数解析式解决实际问题 ………………… 59

第二章　函数 …………………………………………… 75

3.1　等差数列的应用举例……………………………… 75
3.2　等比数列的应用举例……………………………… 86
3.3　一个重要数列的应用举例 ……………………… 101
3.4　数列的综合应用举例 …………………………… 108

第四章 三角函数 ………………………………… 120
4.1 解直角三角形的应用举例 ……………………… 120
4.2 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的应用举例 …… 128
4.3 正弦型曲线的简易画法及应用 …………… 133
4.4 三角函数的综合应用举例 …………………… 139
第五章 平面向量 ………………………………… 143
5.1 向量在力学中的应用举例 …………………… 143
5.2 解斜三角形 ……………………………………… 151
5.3 测量学中的斜三角形解法 …………………… 157
5.4 机械加工中的三角计算 ……………………… 164
参考答案 ………………………………………… 174

第一章

集合与简易逻辑

1.1 有限集合的元素个数

引言 在数学的实际应用中，常会遇到有关集合中元素个数的问题. 一般地，集合 A 中所含有元素的个数，称为集合 A 的势或基数，记作 $\text{card}(A)$. 例如，设 $A=\{a, b, c\}$，则 $\text{card}(A)=3$. 由于知识范围的局限，本节只研究有限集合. 显然，有限集合的势是有限正整数.

例 1　设某商店进了两次货，第一次进的货是钢笔、铅笔、橡皮、直尺、杯子共 5 种，第二次进的货是铅笔、橡皮、杯子、足球共 4 种，两次一共进了几种货？

分析 如果回答两次一共进了 $5+4=9$ 种货，则显然是错的. 用集合 A,B 分别表示第一、二次进货的品种，则

$$A=\{\text{钢笔,铅笔,橡皮,直尺,杯于}\},$$
$$B=\{\text{铅笔,橡皮,杯子,足球}\}.$$

这里 $\text{card}(A)=5$，$\text{card}(B)=4$. 求两次一共进货的品种，实质上是求 $\text{card}(A\cup B)$.

解 用集合 A,B 分别表示第一、二次进货的品种，则

$$\text{card}(A)=5,\ \text{card}(B)=4.$$

因为 $\text{card}(A\cap B)=3$,

所以 $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$

$$=5+4-3=6.$$

答 该商店两次一共进了6种货.

答 根据例1的分析和解法可知,如果 A,B 是两个有限集合,则

$$\boxed{\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B).} \quad ①$$

这个事实常被称为包含排斥定理,它可以作为公式直接使用.

例2 在城镇居民身份调查时,假设15人中有12人是工人,5人是干部,3人具有双重身份(编制是工人但做干部工作,即以工代干),则有几人既不是工人又不是干部?

解 分别用 A,B 表示工人、干部的集合,则

$$\text{card}(A)=12,\ \text{card}(B)=5,\ \text{card}(A\cap B)=3.$$

由公式①,得

$$\text{card}(A\cup B)=12+5-3=14,$$

所以15人中,既不是工人又不是干部的人数为

$$15-\text{card}(A\cup B)=15-14=1.$$

答 15人中既不是工人又不是干部的有1人.

答 对于例2,也可以利用维恩图来解(维恩,John Venn,英国数学家,1835~1883).维恩图是一种图解集合的工具,通常规定用一个矩形区域来表示全集 U,在此矩形内用一条封闭曲线的内部来表示 U 的子集.如图1-1所示,先在 $A\cap B$ 对应的区域内

写上(3)，表示 $\mathrm{card}(A\cap B)=3$；再在 A 中不包括 $A\cap B$ 的区域内写上(9)，表示 $\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(A\cap B)=9$；再在 B 中不包括 $A\cap B$ 的区域内写上(2)，表示 $\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)=2$. 将这三个区域内的数相加，得 14，即 $\mathrm{card}(A\cup B)=14$. 最后从全集 U 的元素个数 15 中减去 14，即 $\mathrm{card}(U)-\mathrm{card}(A\cup B)=15-14$，得所求答案为 1. 当实际问题涉及到的集合个数越多时，就越能显示出维恩图的优越性. 注意，类似在 $A\cap B$ 对应的区域内写上(3)，不要写上 3，避免使人误认为$3\in A\cap B$.

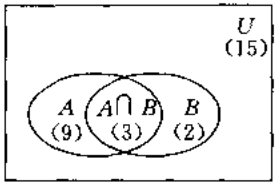


图 1-1

例 3　在某外国语培训学校共 170 名学生中，有 120 人学英语，80 人学日语，60 人学俄语，50 人既学英语又学日语，25 人既学英语又学俄语，30 人既学日语又学俄语，还有 10 人同时学习这三种外国语. 请问：有多少学生没有学上述三门外语中的任何一种？

分析　如果分别用集合 A,B,C 表示学英语、日语、俄语的人，则这里涉及到三个集合的元素个数. 仿照例 2 的图解法，此例也可以利用维恩图来求解(如图 1-2(a)所示，作为读者练习，我们这里从略). 下面，我们给出另外一种解题方法.

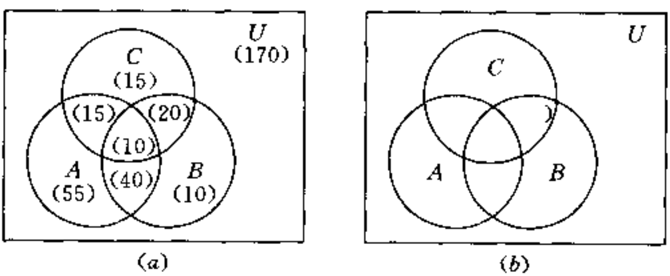


图 1-2

解 如图 1 2(b)所示，分别用集合 A,B,C 表示学英语、日语、俄语的人，则由题意知

$$\mathrm{card}(A)=120,\ \mathrm{card}(B)=80,\ \mathrm{card}(C)=60,$$
$$\mathrm{card}(A\cap B)=50,\ \mathrm{card}(A\cap C)=25,$$
$$\mathrm{card}(B\cap C)=30,$$
$$\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=10.$$

由图 1 - 2(b)知，

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A\cup B\cup C)&=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)\\&\quad-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)\\&\quad-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)\\&=120+80+60-50-25-30+10\\&=165.\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{card}(U)-\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=170-165=5.$

答 该校没有学上述三种语言的有 5 人.

注 根据例 3 的分析和解法可得，如果 A,B,C 是三个有限集合，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(A\cup B\cup C)\\=&\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\\&\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C).\end{aligned} \quad ②$$

显然，这个事实是包含排斥定理的推广，它也可以作为公式直接使用. 并且，包含排斥定理还可以推广到 n ($n\geqslant 4, n\in \mathbf{N}^*$) 个有限集合的情况.

例 4 某地对 100 户农民的生活情况进行了调查，交来的统计表上的记录为：有电视机的 88 户，有电冰箱的 68 户，有摩托车的

74 户,既有电视机又有电冰箱的 58 户,既有电视机又有摩托车的 67 户,既有电冰箱又有摩托车的 59 户,既有电视机又有电冰箱还有摩托车的 55 户. 试问:这个统计表上的记录是否正确? 为什么?

解 分别用 A,B,C 表示有电视机、电冰箱、摩托车的农户的集合,则由题意知

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(A)=88,\ \mathrm{card}(B)=68,\mathrm{card}(C)=74,\\&\mathrm{card}(A\cap B)=58,\ \mathrm{card}(A\cap C)=67,\\&\mathrm{card}(B\cap C)=59,\ \mathrm{card}(A\cap B\cap C)=55.\end{aligned}$$

直接使用公式②,得

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(A\cup B\cup C)\\=&88+68+74-58-67-59+55\\=&101.\end{aligned}$$

这说明,在电视机、电冰箱、摩托车这三者中,至少有一种的农民为 101 户. 如果用全集 U 来表示被调查的农户,则由题意知,$\mathrm{card}(U)=100$. 于是,又

因为　$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=101>100=\mathrm{card}(U)$,

所以　这个统计表上的记录是错的.

答 所交来的统计表上的记录不正确.

练习题　1.1

1. 某行政管理部门对某处市场的商品进行了抽检,发现有 78 种商品质量达标,69 种商品价格合理,其中 48 种商品质量达标且价格合理,另有 27 种商品质量次且价格高,试求出本次抽检的商品总数.

2. 某市场调查公司为研究某市市民在报纸方面的阅读趣向,

抽样调查了500名市民.调查结果表明:订阅日报的有334人,订阅晚报的有297人,两种都订阅的有150人.试问:

(1) 订日报不订晚报的有多少人?

(2) 订晚报不订日报的有多少人?

(3) 至少订一种报的有多少人?

(4) 两种报都不订的有多少人?

3. 一个班级共有50名学生,在两次考试中成绩都是A的人数相等,恰好得到一次A的人数为40,而两次都没有得到A的人数为4,那么,仅在第一次考试中得到A的人数是多少?仅在第二次考试中得到A的人数是多少?两次考试都得到A的人数是多少?

4. 75个孩子到公园去玩,他们可以骑旋转马、坐滑梯和乘坐转盘.已知有20个孩子将这三种都玩过了,有55人只玩了两种.这三种游玩项目中任何一种费用都是0.5元,已知公园主人关于这三种游玩项目的总收入是70元.问:有多少孩子一种也没玩?

5. 为了开展社会实践活动,某班级组建了一支测绘队需要24人参加测量,20人参加计算,20人参加绘图.队员中有很多学生是多面手,有8人既参加了测量又参加了计算,有6人既参加了测量又参加了绘图,有4人既参加了计算又参加了绘图,另有一些人三项工作都参加了.试问:这个测绘队至少有多少人?

6. 某青年工人文化补习的成绩报告单上的统计为:语文及格179人,数学及格153人,两科都及格130人,参加考试共有198人.问:

(1) 此成绩报告单上的统计是否正确?为什么?

(2) 经查实,两科都及格130人是错的.实际上两科都不及格的只有7人,那么至少有一科及格的是多少人?两科都及格的应是多少人?

(3) 改正统计后,仍有多少人需要参加补考(规定凡有不及格的都要补考)?

1.2 简易逻辑的应用举例

引言 我们知道，具有真假意义的一句话，称为一个**命题**，记作 p, q, …. 如果 p 是一个真命题，则规定 p 的值等于 1，记作 $p=1$；如果 q 是一个假命题，则规定 q 的值等于 0，记作 $q=0$. 显然，任意一个命题的值只能是 0 或 1，且不能兼得.

例 1 已知 A,B,C 三人中，一个是油漆工，一个是木工，一个是泥瓦工，但不知 A,B,C 三人具体谁是什么工种. 三人合做一件工程，由于其中的某一个人而做糟了. 为了弄清楚责任，分别询问三人，得到的回答如下：

A 说：C 做坏了，B 做好了.

B 说：我做坏了，C 做好了.

C 说：我做坏了，A 做好了.

现在又了解到，油漆工从来不说假话，泥瓦工从来不说真话，而木工说的话总是半真半假. 问：究竟是谁的责任？

分析 因为三个人的话分别都具有真假意义，所以其中每一个人的话都是一个命题，依次记作 P_A,P_B,P_C. 因为 P_A 与 P_B 恰好相反，所以 A 或 B 是油漆工，而 A 与 B 中的另一个必定是泥瓦工，因而 C 一定是木工. 又由三个命题的逻辑关系知：P_A 与 P_C 必定同真同假，P_A 与 P_B 必定一真一假. 据此，可以通过列表来解决问题.

分析 将三人所述命题依次记作 P_A,P_B,P_C，则由这三个命题的逻辑关系知：P_A 与 P_C 同真同假，P_A 与 P_B 一真一假，三人中 C 是木工.

如表1.1所示，如果 P_C 为假，则 P_A 必定也为假，因而 P_B 必定为真，而此时有 A,B 两人都做坏了，与题意不符，所以 P_C 应为真，即 C 做坏了.因而 A 是油漆工，B 是泥瓦工.

表1.1

P_A	P_B	P_C
0	1	0

答 A 是油漆工，B 是泥瓦工，C 是木工，是木工做坏了.

注 在例1的解答过程中，用列表解决实际问题的方法，称为真值表法.真值表法是解决有关简易逻辑问题的一种常用方法.

例2　有6名歌手参加电视歌曲大奖赛，组委会只设一名特别奖.观众 A,B,C,D 四人对于谁能获得特别奖进行了如下猜测：

A 说：不是1号就是2号能获得特别奖.

B 说：3号不可能获得特别奖.

C 说：4号、5号、6号都不可能获得特别奖.

D 说：能获得特别奖的是4号、5号、6号中的一个.

比赛结果公布后表明，A,B,C,D 四人中只有一个人猜对了.问：究竟是谁猜对了？究竟是几号歌手获得了特别奖？

解 将四人所述命题依次记作 P_A,P_B,P_C,P_D，则由4个命题的逻辑关系知：P_D 与 P_C 一真一假，P_D 与 P_B 同真同假，P_D 与 P_A 可能同假但不可能同真.

如表1.2所示，如果 P_D 为真，则 P_C 和 P_A 都必定为假，而 P_B 也为真.此时有 B,D 两人都猜对了，这与题意不符，所以 P_D 应为假.