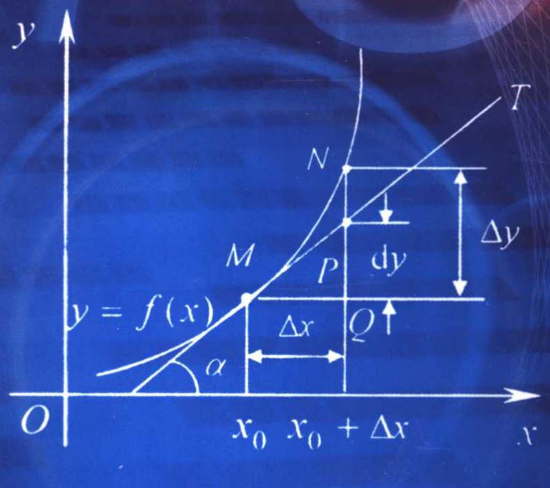
面向21世纪全国高校数学规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

林 益 李 伶 主 编



$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

面向 21 世纪全国高校数学规划教材

高 等 数 学

林 益 李 伶 主 编

肖兆武 杨殿生 副主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是为普通高校和高职高专学生编写的基础课教材《高等数学》，内容包括函数与极限、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、微分方程，级数等。

本书本着“立足基本理论和基础知识，普及科学教育，适应专业需要，保证未来发展”的指导思想，按照“必需、够用”的原则，努力提高学生学习兴趣和数学素养，增强应用数学的能力。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/林益，李伶主编．—北京：北京大学出版社，2005.8
（面向21世纪全国高校数学规划教材）
ISBN 7-301-09163-X

I．高·· II．①林···②李··· III．高等数学—高等学校：技术学校—教材 IV．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第069422号

书　　名：高等数学
著作责任者：林益　李伶　主编
责 任 编 辑：黄庆生　刘标
标 准 书 号：ISBN 7-301-09163-X/O·0651
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62765013
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京飞达印刷有限责任公司
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　15.5印张　320千字
2005年8月第1版　2005年8月第1次印刷
定　　价：26.00元

编辑委员会

策　划：詹卫东　黄庆生

主　编：林　益　李　伶

副主编：肖兆武　杨殿生

编写者：张兴鹤　陈旭松

李　伶　周金诚　肖兆武

前　言

高等数学，既是一门必修的基础课程，又是一门重要的工具课。针对当前普通高校、大专及高职教育的特点，本着“立足基本理论和基础知识，普及科学教育，适应专业需要，保证未来发展”的指导思想，我们组织了一些长期从事高等数学教学的教师编写了此书，供普通高校和高职学生使用。

本书有以下特点：

（1）每章框架构成包括：学习要求、教学内容、每节习题、每章复习题。特别是学习要求的设定，对学生抓住重点、掌握知识有很好的引导作用。

（2）在教学内容的取舍上按照“必需、够用”的原则，不过分追求理论上的系统性和完整性，忽略了一些繁琐的公式推导及证明过程，更加突出应用。

（3）兼顾了各专业的需要，尽可能联系专业实际，体现实用性。

本书重点突出，语言精练，通俗易懂、使用方便。章节内容可选择空间大，教师可根据普通高校专科或高职的教学特点，以及专业需要对教学内容进行取舍，教学时数可安排在 90～120 之间。

本书由詹卫东、黄庆生策划，林益、李伶任主编，肖兆武、杨殿生任副主编，参加编写的还有周金诚、张兴鹤、陈旭松。其中张兴鹤编写第 1 章、第 2 章，陈旭松编写第 3 章、第 4 章，李伶编写第 5 章，周金诚编写第 6 章、第 7 章，肖兆武编写第 8 章、第 9 章。

本书作为一种教材，广泛吸取了国内众多专家学者的研究成果，编写的主要参考书目附后，未及一一注明，在此谨表谢意，并请谅解。由于成书时间仓促，同时限于水平，本书存在着种种不足和缺点，恳切希望得到大家的批评指正。

编　者

2005 年 2 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　函数、极限和连续

学习要求：

1. 理解函数的概念、复合函数的概念，了解反函数的概念.
2. 掌握基本初等函数的性质，会建立简单实际问题中的函数关系式.
3. 理解极限的概念.
4. 掌握极限四则运算法则，会用两个重要极限求极限；了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念.
5. 理解函数在一点连续的概念．了解间断点的概念；了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（介值定理和最大、最小值定理）.

函数是微积分研究的主要对象，极限方法是研究微积分的最基本的方法．本章将在复习函数知识的基础上，学习极限的概念、连续函数的概念与性质等，为以后各章的学习奠定必要的基础.

1.1　函　　数

1.1.1　变量和区间

在研究实际问题、观察各种现象的过程中，人们会遇到各种各样的量．在某个问题的研究过程中，始终保持恒定值的量称为常量，而能取不同数值的量称为变量．例如，一个超市的面积为常量，而每天到超市购物的人数是变量．在数学中常抽去常量或变量的具体含义，只从数值方面加以关注，表示常量和变量数值的分别是实常数或实变数，但仍称为常量或变量．习惯上，常用字母 a, b, c 等表示常量，而用 x, y, z 等表示变量.

为描述一个变量，常需指出其变化范围，这就要用到实数的集合，特别是区间的概念.

区间是特殊的数集．设 a, b 是实数，且 $a<b$，集合 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记做 (a, b)，它可在数轴上用点 a 和 b 之间，但不包括端点 a 及 b 的线段来表示（图 1-1）．集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记做 $[a, b]$，它可在数轴上用点 a 和 b 之间、包括两个端点的线段来表示（图 1-2）.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

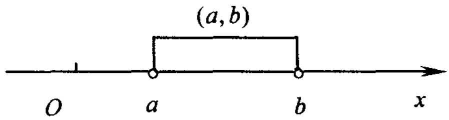


图 1-1

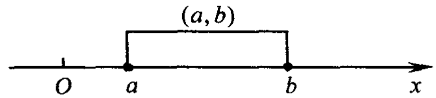


图 1-2

还有其他类型的区间：$\{x|a<x\leqslant b\}$，记做$(a, b]$称为左开右闭区间；$\{x|a\leqslant x<b\}$记做$[a, b)$，称为左闭右开区间.

上述区间均为有限区间，其区间长度为$(b-a)$．还有无限区间，这就需先引进记号“∞”，读作“无穷大”，于是

$\{x|x>a\}$记做$(a,+\infty)$，$\{x|x<a\}$记做$(-\infty,a)$，$\{x|x$为任何实数$\}$记做$(-\infty,+\infty)$，它们均为无穷区间.

设ε为任一给定的正数，则集合$\{x||x-a|<\varepsilon\}$称为点a的ε邻域，它表示以a点为中心，以ε为半径的开区间，可用$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$表示；集合$\{x|0<|x-a|<\varepsilon\}$称为点$a$的去心邻域，该集合不含$a$.

1.1.2 函数的概念

1. 函数

在同一自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量一起变化，但是这几个变量不是彼此孤立的，而是相互联系的，遵从一定的规律变化着.

现在，考虑两个变量的简单情形.

例 1 自由落体运动.设物体下落的时间为t,下落距离为s,假定开始下落的时刻$t=0$，那么s与t之间的依赖关系由

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出，其中g为重力加速度．在这个关系中，距离s随着时间t的变化而变化．其特点是，当下落的时间t取定一个值时，对应的距离s的值也就惟一地确定了.

例 2 球的体积问题．考虑球的体积V与它的半径r的依赖关系

$$V=\frac{4}{3}\pi r^2$$

当半径r取定某一正的数值时，球的体积V的值也就随着确定，当半径r变化时，体积V也随着变化.

还可以举出更多的例子．在上面举的两个例子中，如果抽去所考虑量的具体意义，可

以看到，它们都表达了两个变量间的依赖关系：当其中一个变量在某一范围内取一个数值时，另一个变量就有惟一确定的一个值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数关系.

定义 1　设 x、y 是同一过程中的两个变量，若当 x 在数集 D 内取任一值时，按某种规则 f 总能惟一确定变量 y 的一个值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记做

$$y = f(x)$$

称变量 x 是**自变量**，变量 y 是**因变量**. 表示对应法则的 f 是函数的记号，集合 D 是函数的定义域.

由定义看出，定义域与对应法则是函数概念的两大要素，对于定义域 D 上的函数 $y = f(x)$，集合

$$\{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为函数的**值域**，显然一个函数的值域由定义域及对应法则完全确定.

2. 分段函数

分段函数是函数的一种特殊表达形式. 当一个函数的自变量在定义域内不同区间上用不同式子表示时，称该函数为**分段函数**.

例 3　函数

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，它的图形如图 1-3 所示.

例 4　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

图形如图 1-4 所示.

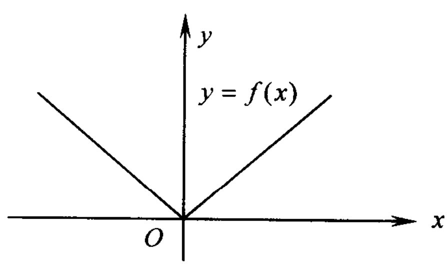


图 1-3

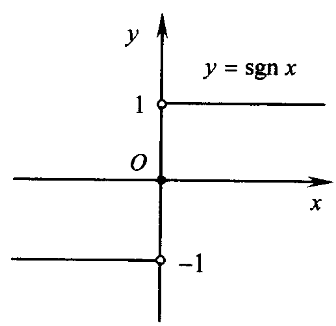


图 1-4

对于分段函数，要注意以下几点．

（1）分段函数是由几个公式合起来表示一个函数，而不是几个函数；

（2）分段函数的定义域是各段定义域的并集；

（3）在处理问题时，对属于某一段的自变量就应用该段的函数表达式．

1.1.3 函数的性质

1．函数的奇偶性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即 $x\in D \Leftrightarrow -x\in D$，

若 $f(-x)=f(x)$， $x\in D$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；

若 $f(-x)=f(x)$， $x\in D$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**．

例如， $y=x^2$，$x\in \boldsymbol{R}$，是偶函数，其图像如图 1-5 所示．

$y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$，是奇函数，其图像如图 1-6 所示．

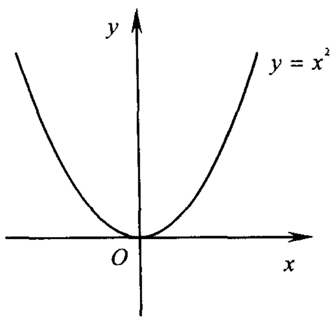


图 1-5

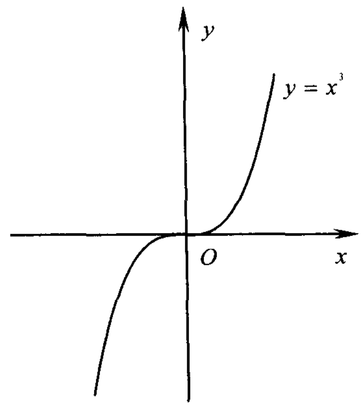


图 1-6

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

两个偶函数之和、差、积、商仍是偶函数；两个奇函数之和、差仍是奇函数；两个奇函数之积、商是偶函数；奇函数与偶函数之积、商是奇函数．

2．函数的周期性

定义 3 给定函数 $y=f(x)$， $x\in D$，若存在常数 T，使得 $x\in D\Leftrightarrow x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，$x\in D$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**．满足上述条件的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的**周期**．例如 $\sin x$、$\cos x$、$\sec x$、$\csc x$ 是周期为 2π 的函数，$\tan x$、$\cot x$ 是周期为 π 的函数．以

T 为周期的函数将其函数图像沿 x 轴方向左右平移 T 的整数倍后，图像将重合.

3. 函数的单调性

定义 4　给定函数 $f(x)$，$x\in D$，设区间 $I\subset D$，若对 $x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，

（1）有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I **单调增加**（图 1-7）.

（2）有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I **单调减少**（图 1-8）.

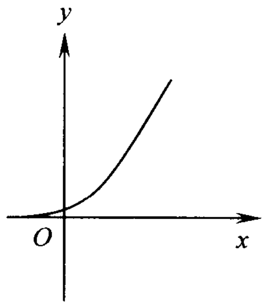


图 1-7

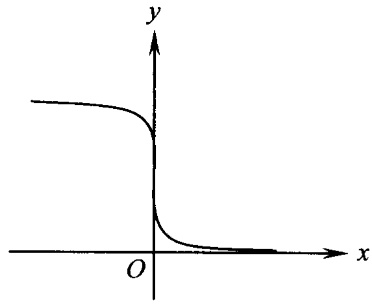


图 1-8

（3）有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 单调不减 .

（4）有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 单调不增 .

单调增加与单调减少分别称为递增与递减．单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如 $y=x^2$，在 $x\geqslant 0$ 时；单调增加，而在 $x\leqslant 0$ 时，单调减少.

4. 函数的有界性

定义 5　给定函数 $f(x)$，$x\in D$，集合 $X\subset D$，若存在正数 M 使得对任何 $x\in X$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**，否则称为**无界**.

例如函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\cos x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

1.1.4　反函数

定义 6　设函数 $y=f(x)$，$x\in X$，$y\in Y$ $(Y=\{y|y=f(x),\ x\in X\})$，如果对于 Y 内的任一 y，X 内都有惟一确定的 x 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 Y 上确定了一个 x 是 y 的函数，

这个函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记做 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Y$.

但习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记做

$$y=f^{-1}(x)$$

函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定义域.

函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

可以证明单调函数存在反函数，且函数与其反函数单调性相同.

例 5 求函数 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$ 的反函数.

解 因为函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以存在反函数. 由 $y=x^2$ 解得 $x=\sqrt{y}$，$y\geqslant 0$，于是 $y=x^2$ 的反函数为 $x=\sqrt{y}$，$y\in[0,+\infty]$，通常表示为 $y=\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$.

习 题 1.1

1. 用区间表示变量的变化范围.

(1) $3\leqslant x<9$ (2) $x\leqslant 0$

(3) $x^2>4$ (4) $|x-2|\leqslant 6$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ (2) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (4) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0\quad, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

4. 判断下列函数是奇函数、偶函数还是非奇函数非偶函数.

(1) $y=x^3\cos x$ (2) $y=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

(3) $y=\dfrac{|x|}{x}$ (4) $y=\sin x-\cos x+1$

5. 判断下列函数是否是周期函数，若是求出其周期.

(1) $y=\sin\dfrac{x}{3}$ (2) $y=\sin x+\cos x$

(3) $y=x\cos x$ (4) $y=\tan\dfrac{1}{x}$

6. 研究下列函数的单调性.

(1) $y=2-3x$ (2) $y=3^{-x}$

7．求下列函数的反函数，并写出反函数的定义域．

（1）$y=x^2$，$x\leqslant 0$　　（2）$y=10^{x+1}$

（3）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$　　（4）$y=\lg\left(x^2-1\right)$，$x>1$

1.2　基本初等函数和初等函数

1.2.1　基本初等函数

在中学学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数．这些函数中的多数函数我们已经比较熟悉，这里只做简要复习．

（1）常数函数 $y=C$（C 为常数），定义域为$(-\infty,+\infty)$，图像为过点$(0,\ C)$且平行于 x 轴的直线．微积分中也经常将常数视为常数函数，读者可根据具体情况予以识别．

（2）幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数），该函数的定义域因α 的取值不同而不同．但无论α 为何值，它在区间$(0,+\infty)$内总有定义，且图像过点(1，1)．$\alpha>0$ 和$\alpha<0$ 时的图像分别如图 1-9 和 1-10 所示．

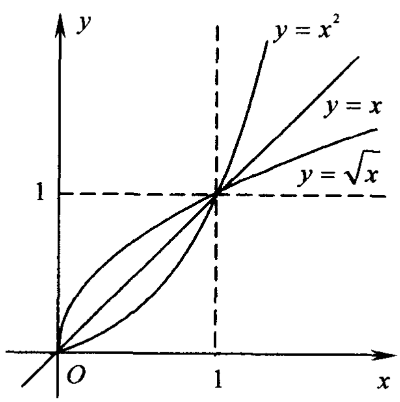


图 1-9

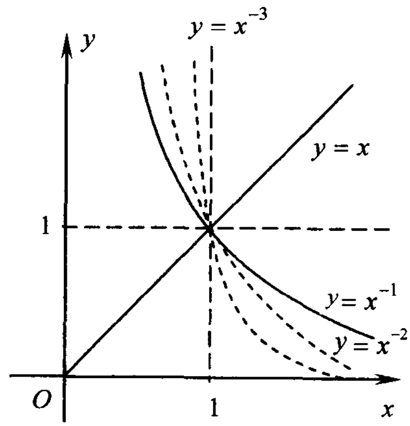


图 1-10

（3）指数函数 $y=a^x(a>0$ 且$a\neq 1)$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$．$\alpha>1$ 时，函数单调递增；$\alpha<1$ 时，函数单调减少．图像过点(0,1)．在科学记数中常用到以 e（e 为无理数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$）为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com