

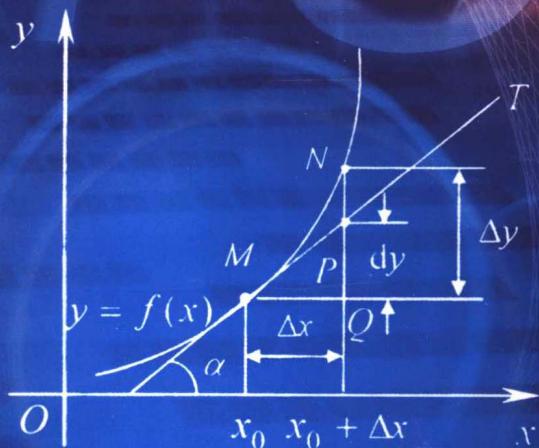


面向21世纪全国高校数学规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

林益 李伶 主编



$$\int \frac{dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$



北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

面向 21 世纪全国高校数学规划教材

高等数学

林 益 李 伶 主 编

肖兆武 杨殿生 副主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是为普通高校和高职高专学生编写的基础课教材《高等数学》，内容包括函数与极限、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、微分方程，级数等。

本书本着“立足基本理论和基础知识，普及科学教育，适应专业需要，保证未来发展”的指导思想，按照“必需、够用”的原则，努力提高学生学习兴趣和数学素养，增强应用数学的能力。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/林益，李伶主编. —北京：北京大学出版社，2005.8
（面向 21 世纪全国高校数学规划教材）
ISBN 7-301-09163-X

I. 高… II. ①林…②李… III. 高等数学—高等学校：技术学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 069422 号

书 名：高等数学

著作责任者：林益 李伶 主编

责任编辑：黄庆生 刘标

标准书号：ISBN 7-301-09163-X/O-0651

出版者：北京大学出版社

地 址：北京市海淀区成府路 205 号 100871

电 话：邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765013

网 址：<http://cbs.pku.edu.cn>

电子信箱：xxjs@pup.pku.edu.cn

印刷者：北京飞达印刷有限责任公司

发 行 者：北京大学出版社

经 销 者：新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 15.5 印张 320 千字

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

定 价：26.00 元

编辑委员会

策 划：詹卫东 黄庆生

主 编：林 益 李 伶

副主编：肖兆武 杨殿生

编写者：张兴鹤 陈旭松

李 伶 周金诚 肖兆武

前 言

高等数学，既是一门必修的基础课程，又是一门重要的工具课。针对当前普通高校、大专及高职教育的特点，本着“立足基本理论和基础知识，普及科学教育，适应专业需要，保证未来发展”的指导思想，我们组织了一些长期从事高等数学教学的教师编写了此书，供普通高校和高职学生使用。

本书有以下特点：

(1) 每章框架构成包括：学习要求、教学内容、每节习题、每章复习题。特别是学习要求的设定，对学生抓住重点、掌握知识有很好的引导作用。

(2) 在教学内容的取舍上按照“必需、够用”的原则，不过分追求理论上的系统性和完整性，忽略了一些繁琐的公式推导及证明过程，更加突出应用。

(3) 兼顾了各专业的需要，尽可能联系专业实际，体现实用性。

本书重点突出，语言精练，通俗易懂、使用方便。章节内容可选择空间大，教师可根据普通高校专科或高职的教学特点，以及专业需要对教学内容进行取舍，教学时数可安排在 90~120 之间。

本书由詹卫东、黄庆生策划，林益、李伶任主编，肖兆武、杨殿生任副主编，参加编写的还有周金诚、张兴鹤、陈旭松。其中张兴鹤编写第 1 章、第 2 章，陈旭松编写第 3 章、第 4 章，李伶编写第 5 章，周金诚编写第 6 章、第 7 章，肖兆武编写第 8 章、第 9 章。

本书作为一种教材，广泛吸取了国内众多专家学者的研究成果，编写的主要参考书目附后，未及一一注明，在此谨表谢意，并请谅解。由于成书时间仓促，同时限于水平，本书存在着种种不足和缺点，恳切希望得到大家的批评指正。

编 者

2005 年 2 月

目 录

第 1 章 函数、极限和连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 变量和区间	1
1.1.2 函数的概念	2
1.1.3 函数的性质	4
1.1.4 反函数	5
1.2 基本初等函数和初等函数	7
1.2.1 基本初等函数	7
1.2.2 复合函数	9
1.2.3 初等函数	9
1.2.4 函数模型举例	9
1.3 极限	11
1.3.1 数列极限	11
1.3.2 函数极限	12
1.3.3 极限的性质 两个重要极限	14
1.3.4 无穷小量和无穷大量	17
1.4 函数的连续性	20
1.4.1 连续函数的概念	20
1.4.2 初等函数的连续性	21
1.4.3 闭区间上连续函数的性质	22
复习题 1	24
第 2 章 一元函数微分学	27
2.1 导数的概念	27
2.1.1 瞬时速度 曲线的切线斜率	27
2.1.2 导数的定义	28
2.1.3 用导数的定义求导数	29
2.1.4 导数的几何意义	31
2.2 求导法则	31
2.2.1 函数和、差、积、商的求导法则	32

2.2.2	复合函数的求导法则	33
2.2.3	反函数的导数	33
2.2.4	隐函数的导数	34
2.2.5	高阶导数	35
2.3	微分	37
2.3.1	微分概念	37
2.3.2	微分的几何意义	38
2.3.3	微分公式和法则	38
2.3.4	一阶微分形式不变性	39
2.4	中值定理与罗必达法则	41
2.4.1	中值定理	41
2.4.2	罗必达法则	43
2.5	函数的单调性与极值	45
2.5.1	函数的单调性	45
2.5.2	函数的极值	48
2.6	函数的最值及其应用	50
2.7	曲线的凹凸性与函数作图	52
2.7.1	曲线的凹凸性与拐点	52
2.7.2	函数图形的描绘	53
2.8	导数在经济学中的应用	55
2.8.1	成本函数 收入函数 利润函数	55
2.8.2	边际分析	55
2.8.3	弹性的概念	58
	复习题 2	59
第 3 章	一元函数积分学	62
3.1	不定积分的概念和性质	62
3.1.1	不定积分的概念	62
3.1.2	不定积分的性质	63
3.1.3	直接积分法	64
3.1.4	基本积分表	64
3.2	基本积分法	67
3.2.1	换元积分法	67
3.2.2	分部积分法	72
3.3	积分表的使用	76
3.4	定积分的概念与性质	78

3.4.1	定积分的概念	78
3.4.2	定积分的几何意义和简单的物理意义	81
3.4.3	定积分的性质	82
3.4.4	牛顿—莱布尼兹公式	83
3.5	定积分的计算	86
3.5.1	定积分的换元积分法	86
3.5.2	定积分的分部积分法	88
3.6	无穷区间上的广义积分	90
3.7	定积分的应用	91
3.7.1	定积分的元素法	91
3.7.2	平面图形的面积	93
3.7.3	旋转体体积	94
3.7.4	定积分在物理上的应用	95
3.7.5	定积分在经济上的简单应用	96
	复习题 3	97
第 4 章	常微分方程	100
4.1	常微分方程的基本概念	100
4.2	一阶微分方程	104
4.2.1	可分离变量的一阶微分方程	104
4.2.2	一阶线性微分方程	107
4.3	几种可降阶的二阶微分方程	110
4.3.1	形如 $y'' = f(x)$ 的二阶微分方程	110
4.3.2	形如 $y'' = f(x, y')$ 的二阶微分方程	111
4.3.3	形如 $y'' = f(y, y')$ 的二阶微分方程	111
4.4	二阶常系数线性微分方程	113
4.4.1	二阶常系数线性齐次微分方程	113
4.4.2	二阶常系数线性非齐次微分方程	118
	复习题 4	120
第 5 章	空间解析几何	123
5.1	向量代数	123
5.1.1	空间直角坐标系	123
5.1.2	向量及其坐标表示	124
5.1.3	向量的乘法	128
5.2	平面与直线	133

5.2.1 平面及其方程	133
5.2.2 直线及其方程	136
5.3 二次曲面	140
5.3.1 空间曲面	140
5.3.2 常见二次曲面及其方程	143
复习题 5	147
第 6 章 二元函数微分学	149
6.1 二元函数	149
6.1.1 二元函数的概念及几何意义	149
6.1.2 二元函数的极限与连续	151
6.2 偏导数与全微分	152
6.2.1 偏导数	152
6.2.2 全微分	155
6.2.3 二元复合函数与隐函数的偏导数	156
6.3 二元函数的极值	160
6.3.1 二元函数的无条件极值	160
6.3.2 二元函数的条件极值	162
复习题 6	163
第 7 章 二重积分	166
7.1 二重积分的概念与性质	166
7.1.1 二重积分的概念	166
7.1.2 二重积分的性质	168
7.2 二重积分的计算与应用	169
7.2.1 二重积分的计算	169
7.2.2 二重积分的简单应用	176
复习题 7	179
第 8 章 无穷级数	181
8.1 数项级数	181
8.1.1 数项级数的概念	181
8.1.2 数项级数的性质	183
8.1.3 正项级数收敛的判别法	184
8.1.4 交错级数的莱布尼兹判别法	187
8.1.5 一般数项级数的收敛性	188
8.2 幂级数	189
8.2.1 幂级数及其收敛性	189

8.2.2 幂级数运算性质	193
8.3 函数展开成幂级数	194
8.3.1 泰勒级数	195
8.3.2 函数展开成幂级数	196
复习题 8	200
第 9 章 Mathematica 数学软件简介	202
9.1 算术运算	202
9.2 代数式与代数运算	203
9.3 微积分运算	205
9.4 函数作图	208
附录 积分表	210
参考答案	220

第1章 函数、极限和连续

学习要求:

1. 理解函数的概念、复合函数的概念, 了解反函数的概念.
2. 掌握基本初等函数的性质, 会建立简单实际问题中的函数关系式.
3. 理解极限的概念.
4. 掌握极限四则运算法则, 会用两个重要极限求极限; 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念.
5. 理解函数在一点连续的概念. 了解间断点的概念; 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质 (介值定理和最大、最小值定理).

函数是微积分研究的主要对象, 极限方法是研究微积分的最基本的方法. 本章将在复习函数知识的基础上, 学习极限的概念、连续函数的概念与性质等, 为以后各章的学习奠定必要的基础.

1.1 函 数

1.1.1 变量和区间

在研究实际问题、观察各种现象的过程中, 人们会遇到各种各样的量. 在某个问题的研究过程中, 始终保持恒定值的量称为常量, 而能取不同数值的量称为变量. 例如, 一个超市的面积为常量, 而每天到超市购物的人数是变量. 在数学中常抽去常量或变量的具体含义, 只从数值方面加以关注, 表示常量和变量数值的分别是实常数或实变数, 但仍称为常量或变量. 习惯上, 常用字母 a, b, c 等表示常量, 而用 x, y, z 等表示变量.

为描述一个变量, 常需指出其变化范围, 这就要用到实数的集合, 特别是区间的概念.

区间是特殊的数集. 设 a, b 是实数, 且 $a < b$, 集合 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记做 (a, b) , 它可在数轴上用点 a 和 b 之间, 但不包括端点 a 及 b 的线段来表示 (图 1-1). 集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记做 $[a, b]$, 它可在数轴上用点 a 和 b 之间、包括两个端点的线段来表示 (图 1-2).

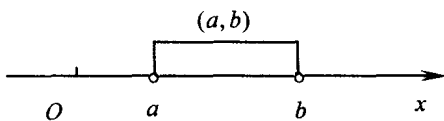


图 1-1

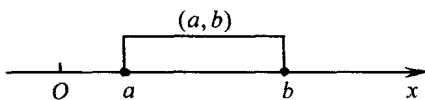


图 1-2

还有其他类型的区间: $\{x|a < x \leq b\}$, 记做 $(a, b]$ 称为左开右闭区间; $\{x|a \leq x < b\}$ 记做 $[a, b)$, 称为左闭右开区间.

上述区间均为有限区间, 其区间长度为 $(b-a)$. 还有无限区间, 这就需先引进记号“ ∞ ”, 读作“无穷大”, 于是

$\{x|x > a\}$ 记做 $(a, +\infty)$, $\{x|x < a\}$ 记做 $(-\infty, a)$, $\{x|x \text{ 为任何实数}\}$ 记做 $(-\infty, +\infty)$, 它们均为无穷区间.

设 ε 为任一给定的正数, 则集合 $\{x||x-a| < \varepsilon\}$ 称为点 a 的 ε 邻域, 它表示以 a 点为中心, 以 ε 为半径的开区间, 可用 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 表示; 集合 $\{x|0 < |x-a| < \varepsilon\}$ 称为点 a 的去心邻域, 该集合不含 a .

1.1.2 函数的概念

1. 函数

在同一自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量一起变化, 但是这几个变量不是彼此孤立的, 而是相互联系的, 遵从一定的规律变化着.

现在, 考虑两个变量的简单情形.

例 1 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t , 下落距离为 s , 假定开始下落的时刻 $t=0$, 那么 s 与 t 之间的依赖关系由

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给出, 其中 g 为重力加速度. 在这个关系中, 距离 s 随着时间 t 的变化而变化. 其特点是, 当下落的时间 t 取定一个值时, 对应的距离 s 的值也就惟一地确定了.

例 2 球的体积问题. 考虑球的体积 V 与它的半径 r 的依赖关系

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

当半径 r 取定某一正的数值时, 球的体积 V 的值也就随着确定, 当半径 r 变化时, 体积 V 也随着变化.

还可以举出更多的例子. 在上面举的两个例子中, 如果抽去所考虑量的具体意义, 可

以看到，它们都表达了两个变量间的依赖关系：当其中一个变量在某一范围内取一个数值时，另一个变量就有惟一确定的一个值与之对应。两个变量间的这种对应关系就是函数关系。

定义 1 设 x, y 是同一过程中的两个变量，若当 x 在数集 D 内取任一值时，按某种规则 f 总能惟一确定变量 y 的一个值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记做

$$y = f(x)$$

称变量 x 是**自变量**，变量 y 是**因变量**。表示对应法则的 f 是函数的记号，集合 D 是函数的定义域。

由定义看出，定义域与对应法则是函数概念的两大要素，对于定义域 D 上的函数 $y = f(x)$ ，集合

$$\{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的**值域**，显然一个函数的值域由定义域及对应法则完全确定。

2. 分段函数

分段函数是函数的一种特殊表达形式。当一个函数的自变量在定义域内不同区间上用不同式子表示时，称该函数为**分段函数**。

例 3 函数

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ ，它的图形如图 1-3 所示。

例 4 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

图形如图 1-4 所示。

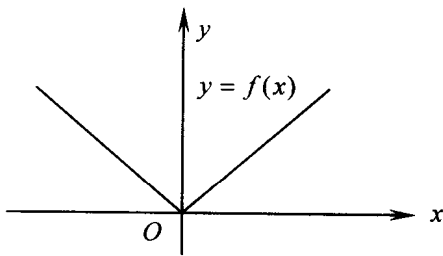


图 1-3

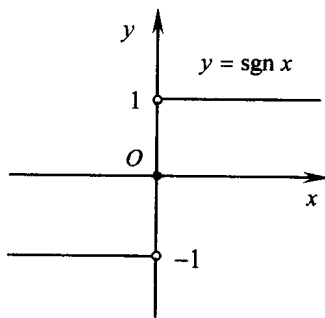


图 1-4

对于分段函数，要注意以下几点.

- (1) 分段函数是由几个公式合起来表示一个函数，而不是几个函数；
- (2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集；
- (3) 在处理问题时，对属于某一段的自变量就应用该段的函数表达式.

1.1.3 函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即 $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ ，

若 $f(-x) = f(x)$ ， $x \in D$ ，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；

若 $f(-x) = -f(x)$ ， $x \in D$ ，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如， $y = x^2$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，是偶函数，其图像如图 1-5 所示.

$y = x^3$ ， $x \in (-\infty, +\infty)$ ，是奇函数，其图像如图 1-6 所示.

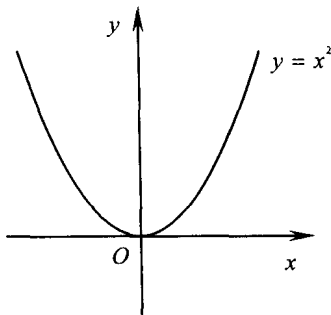


图 1-5

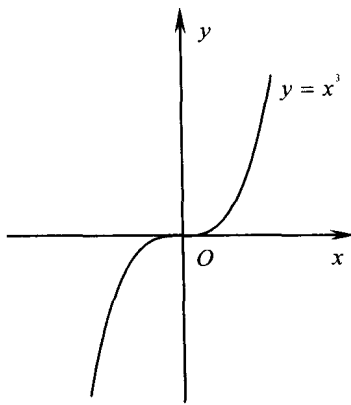


图 1-6

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

两个偶函数之和、差、积、商仍是偶函数；两个奇函数之和、差仍是奇函数；两个奇函数之积、商是偶函数；奇函数与偶函数之积、商是奇函数.

2. 函数的周期性

定义 3 给定函数 $y = f(x)$ ， $x \in D$ ，若存在常数 T ，使得 $x \in D \Leftrightarrow x + T \in D$ 且 $f(x + T) = f(x)$ ， $x \in D$ ，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. 满足上述条件的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 例如 $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\sec x$ 、 $\csc x$ 是周期为 2π 的函数， $\tan x$ 、 $\cot x$ 是周期为 π 的函数. 以

T 为周期的函数将其函数图像沿 x 轴方向左右平移 T 的整数倍后, 图像将重合.

3. 函数的单调性

定义 4 给定函数 $f(x)$, $x \in D$, 设区间 $I \subset D$, 若对 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$,

(1) 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I **单调增加** (图 1-7).

(2) 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I **单调减少** (图 1-8).

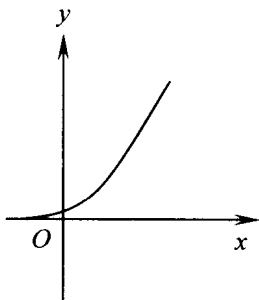


图 1-7

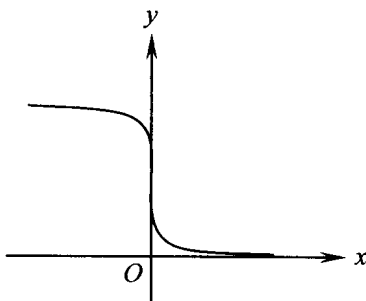


图 1-8

(3) 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I **单调不减**.

(4) 有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I **单调不减**.

单调增加与单调减少分别称为**递增**与**递减**. 单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如 $y = x^2$, 在 $x \geq 0$ 时, 单调增加, 而在 $x \leq 0$ 时, 单调减少.

4. 函数的有界性

定义 5 给定函数 $f(x)$, $x \in D$, 集合 $X \subset D$, 若存在正数 M 使得对任何 $x \in X$ 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**, 否则称为**无界**.

例如函数 $y = \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有 $|\cos x| \leq 1$, 所以函数 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的.

1.1.4 反函数

定义 6 设函数 $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ ($Y = \{y | y = f(x), x \in X\}$), 如果对于 Y 内的任一 y , X 内都有惟一确定的 x 与之对应, 使 $f(x) = y$, 则在 Y 上确定了一个 x 是 y 的函数,

这个函数称为 $y = f(x)$ 的**反函数**，记做 $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

但习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 记做

$$y = f^{-1}(x)$$

函数 $y = f(x)$ 的定义域和值域分别是函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域和定义域.

函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

可以证明单调函数存在反函数，且函数与其反函数单调性相同.

例 5 求函数 $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ 的反函数.

解 因为函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，所以存在反函数. 由 $y = x^2$ 解得 $x = \sqrt{y}$, $y \geq 0$, 于是 $y = x^2$ 的反函数为 $x = \sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty]$, 通常表示为 $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

习 题 1.1

1. 用区间表示变量的变化范围.

(1) $3 \leq x < 9$

(2) $x \leq 0$

(3) $x^2 > 4$

(4) $|x - 2| \leq 6$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$

(2) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$

(3) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(4) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$

3. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

4. 判断下列函数是奇函数、偶函数还是非奇函数非偶函数.

(1) $y = x^3 \cos x$

(2) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

(3) $y = \frac{|x|}{x}$

(4) $y = \sin x - \cos x + 1$

5. 判断下列函数是否是周期函数，若是求出其周期.

(1) $y = \sin \frac{x}{3}$

(2) $y = \sin x + \cos x$

(3) $y = x \cos x$

(4) $y = \tan \frac{1}{x}$

6. 研究下列函数的单调性.

(1) $y = 2 - 3x$

(2) $y = 3^{-x}$

7. 求下列函数的反函数, 并写出反函数的定义域.

(1) $y = x^2, x \leq 0$

(2) $y = 10^{x+1}$

(3) $y = \frac{1-x}{1+x}$

(4) $y = \lg(x^2 - 1), x > 1$

1.2 基本初等函数和初等函数

1.2.1 基本初等函数

在中学学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 这些函数中的多数函数我们已经比较熟悉, 这里只做简要复习.

(1) 常数函数 $y = C$ (C 为常数), 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 图像为过点 $(0, C)$ 且平行于 x 轴的直线. 微积分中也经常将常数视为常数函数, 读者可根据具体情况予以识别.

(2) 幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为实数), 该函数的定义域因 α 的取值不同而不同. 但无论 α 为何值, 它在区间 $(0, +\infty)$ 内总有定义, 且图像过点 $(1, 1)$. $\alpha > 0$ 和 $\alpha < 0$ 时的图像分别如图 1-9 和 1-10 所示.

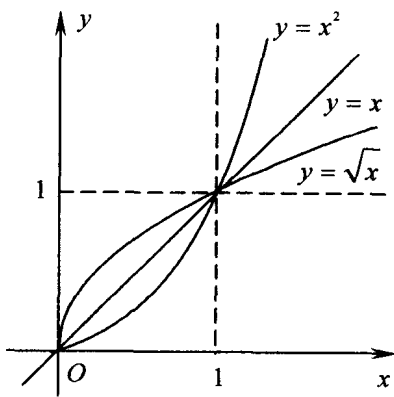


图 1-9

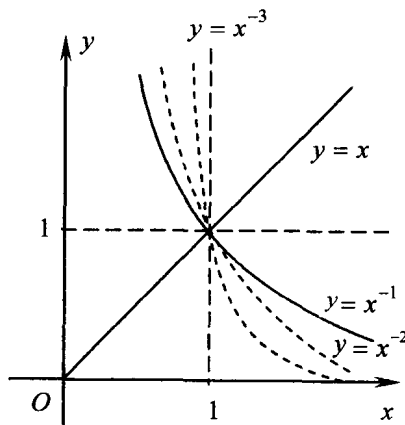


图 1-10

(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$. $\alpha > 1$ 时, 函数单调递增; $\alpha < 1$ 时, 函数单调减少. 图像过点 $(0, 1)$. 在科学记数中常用到以 e (e 为无理数, $e = 2.71828\cdots$) 为底的指数函数 $y = e^x$.