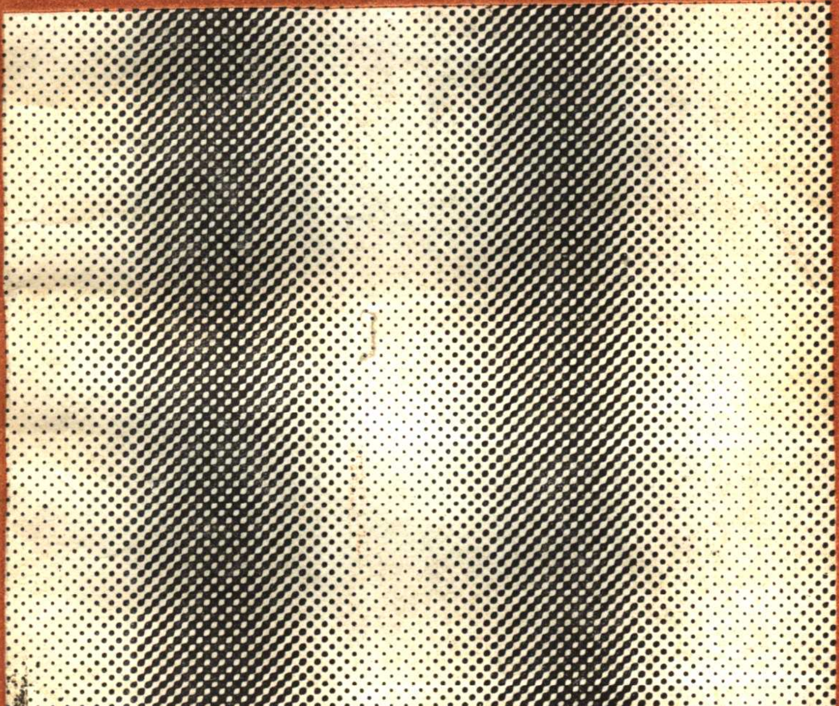
概率论与数理统计学习指导

戴宗儒 李志煦 郑郁文 主编



科学技术文献出版社

概率论与数理统计
学习指导

主编 戴宗儒 李志煦 郑郁文

编写 谢贤衍 李 南 高俊琪

冯树芬 张德业

主审 何蕴理 崔福荫

科学技术文献出版社

1988

内 容 简 介

本书内容包括：随机事件的概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、正态分布、二元随机变量、简单随机样本、假设检验、区间估计、回归分析与方差。各章均有典型题分析、自测练习题和解答。文字叙述简练，通俗易懂，便于自学。

本书可作为财经类大专院校、职业大学、管理干部学院、业大、电大以及函授学员的学习指导书，也可作为教师教学的参考书。

概率论与数理统计学习指导

戴宗儒 李志煦 郑郁文 主编

科学技术文献出版社出版

北京京辉印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　9.875印张　220千字

1988年12月北京第一版第一次印刷

印数：1—11000册

社科新书目：211—107

ISBN 7-5023-0648-X/F·39

定价：2.85元

前　言

为了适应财经类大专学生学习和教学的需要，我们编写了这套经济应用数学基础系列学习指导书。包括《微积分学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》、《线性代数学习指导》、《线性规划学习指导》共四册。

每一册分章编写，每一章都包括如下六个部分：

（一）主要内容部分：用精练的语言分条分款概述本章主要内容，目的使读者对本章的内容理出一个系统和层次；

（二）基本要求部分：把本章的学习要求分几点说清，指出读者应掌握什么，了解什么，理解什么，并指出重点和难点；

（三）答疑解惑部分：指出读者学习过程中可能会提出的问题或易混淆的概念，拟出题目并作出回答；

（四）典型例题分析部分：每章都有针对性举出一定数量的例题进行分析详解，以帮助读者正确理解基本概念，提高解题能力；

（五）部分习题解答部分：每章配有习题，并给出了解答；（习题与高教出版社出版的大专教材："概率论与数理统计"习题配套。）

（六）自测题部分：各章后面都有反映本章内容的自测练习题，并给出了参考答案。

全书最后均附A、B、C三组综合自测试题，并附有参考答案。

《概率论与数理统计学习指导》是根据高等财经院校专科层次，以及函授、职大、业大、电大的经济应用数学基础《概率论与数理统计》的数学要求而编写的，是学员的学习指导书，也可作为教师的教学参考书。全书共分九章，内容包括：随机事件的概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，正态分布，二元随机变量，简单随机样本，假设检验，区间估计，回归分析与方差分析。

这套学习指导书是由北京经济管理学院（原人大一分校），金陵职业大学，江汉大学，西安基础大学，大连税务专科学校等院校联合编写的，编者都是在教学第一线有多年教学经验的教师，并由崔福荫、曹承宾、何蕴理王尚文主审。

对这套学习指导书的结构和编写形式，我们做了新的尝试，由于水平有限，在内容的取舍，结构的安排，以及体例形式等各方面难免存在问题与不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

一九八八年二月十五日

目　　录

第一章　随机事件的概率

一、主 要 内 容

1．随机试验与事件

（1）概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

（2）对客观事物所进行的观察或进行一次科学试验，统称为一个试验。

（3）如果这个试验在相同条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，但能明确它的所有可能结果，这样的试验称为一个随机试验。

（4）进行大量的随机试验，观察其结果，人们发现偶然现象都呈现着某种规律，这种规律称为随机现象的统计规律性。

（5）随机试验的结果称为随机事件，简称为事件。

（6）在一定的研究范围内，把不能再分的（最小单位的）事件称为基本事件。

（7）由两个或两个以上的基本事件组合而成的事件称为复合事件。

（8）对于某随机试验，在任何一次试验中必然发生的事件，称为必然事件，记作 Ω。

（9）对于某随机试验，在任何一次试验中都不可能出现的事件，称为不可能事件，记作 ϕ。

2. 事件的关系与运算

（1）如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，称为事件 B 包含 A，或称事件 A 含于 B，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

（2）包含关系的性质：

1° $A\subset A$；

2° 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$；

3° $\phi\subset A\subset\Omega$

（3）如果事件 B 包含事件 A，同时事件 A 包含事件 B，则称事件 A 与事件 B 相等。记作 $A=B$，即，若 $A\subset B$，又 $B\subset A$，则 $A=B$。

（4）事件"A 或 B"称为事件 A 与事件 B 的和。记作 $A+B$，表示"两事件 A、B 至少有一个发生"。

（5）事件"A 且 B"称为事件 A 与事件 B 的积，记作 AB，表示"两事件 A 与 B 同时发生"。

（6）事件的和与事件的积，可推广到有限个，也可推广到无限可列个的情形：

$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n$，表示 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n 至少有一个发生。

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$，表示无限可列个事件 A_1、A_2、…、A_n、…至少有一个发生。

$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1A_2\cdots A_n$，表示 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n 同时发生。

$\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1A_2\cdots A_n\cdots$，表示无限可列个事件 A_1、A_2、…、

A_n、…同时发生。

（7）“事件 A 发生，而事件 B 不发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$，或 $A\overline{B}$。

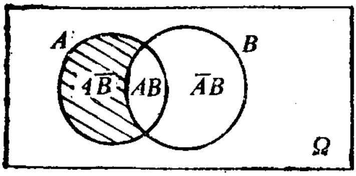


图 1-1

（8）如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容事件（或称事件 A 与事件 B 为互斥事件）。

如果事件 A_1、A_2、…、A_n 中任意两个事件互不相容（即两两互不相容或两两互斥）则称 A_1、A_2、…、A_n 互不相容。

（9）如果事件 A 与事件 B 满足两个条件：

$$A+B=\Omega,\quad AB=\phi,$$

则称 A、B 为对立事件，记作 $B=\overline{A}$，或 $A=\overline{B}$。

对立事件的性质：$\overline{\Omega}=\phi$；$\overline{\phi}=\Omega$；$\overline{\overline{A}}=A$。

（10）对于事件 A_1、A_2、…、A_n，如果满足两个条件：$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，$A_iA_j=\phi$，（$i\neq j$，$i$、$j=1,2,\cdots,n$）则称事件 A_1、A_2、…、A_n 为一个完备事件组。（说明：前一个条件表示这 n 个事件至少一个发生，且这 n 个事件之和为必然事件；后一个条件表示这 n 个事件中任意两个不同事件都是互不相容的。两个条件同时满足表示：这 n 个事件必有一个发生且只有一个发生）

（11）注意：对立事件要同时满足两个条件 $A+B=\Omega$，$AB=\phi$；而两个互斥事件只要求满足其中一个条件：$AB=\phi$。因此对立事件当然是互斥事件，而互斥事件不一定是对立事件。

对立事件也构成一个完备事件组。

3．事件的运算规律

	事件的和	事件的积
交换律	$A+B=B+A$	$AB=BA$
结合律	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$
分配律	$A(B+C)=AB+AC$	$A+BC=(A+B)(A+C)$
蕴涵律	$A+B\supset A$，$A+B\supset B$	$AB\subset A$，$AB\subset B$
重迭律	$A+A=A$	$AA=A$
吸收律	$A+\Omega=\Omega$，$A+\Phi=A$	$A\Omega=A$　$A\Phi=\Phi$
对立律	$A+\bar{A}=\Omega$	$A\bar{A}=\Phi$
摩根律	$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$	$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$

4．事件的点集概念，样本空间

（1）随机试验的每一个基本事件，可用一个只包含一个元素 ω 的单点集$\{\omega\}$表示。

（2）由若干个基本事件组合而成的复合事件，可用包含这若干个元素的集合来表示。

（3）对于某个随机试验，由它的所有基本事件对应的全部元素组成的集合，称为样本空间。

样本空间作为一个事件是必然事件，仍用 Ω 表示。

样本空间中的每一个元素，称为样本点。

（4）集合论的知识可以全部用来解释事件及事件的运算，现将集合论与概率论中的有关概念列表对照如下：

符　　号	集　　合　　论	概　　率　　论
Ω	空　间	样本空间，必然事件
Φ	空　集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω中的元素ω	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω的子集A	事件A
$A\subset B$	集合A含于集合B中	A发生则B一定发生
$A=B$	集合A与集合B相等(或等价)	事件A与事件B相等(或等价)
$A+B$ $(A\cup B)$	集合A与集合B的并	事件A与事件B至少有一个发生(A.B之和)
AB $(A\cap B)$	集合A与集合B之交	事件A与事件B同时发生(A.B之积)
$\bar{A}$	集合A的余集(或补集)	事件A的对立事件
$A-B$ $(A\bar{B})$	集合A与集合B之差	事件A发生，而事件B不发生
$AB=\Phi$ $(A\cap B=\Phi)$	集合A与集合B没有公共元素	事件A与B互不相容(A、B互斥)

5．古典概型及概率的古典定义

（1）具有下述两个特点的随机试验模型，称为古典概型，这两个特点是：

1°所有的基本事件只有有限个。

2°每个基本事件发生的可能性相同。

（2）概率的古典定义

在古典概型中，若基本事件数为n，而事件A包含了其中m个基本事件，则事件A的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$。

（3）古典概率的性质：

1°设 A 为任一事件，则 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2°对必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

3°对不可能事件 ϕ，有 $P(\phi)=0$。

6. 事件的频率及其稳定性

（1）将一个试验重复独立地作 n 次，事件 A 出现的次数 μ 称为事件 A 在这 n 次试验中的频率，比值 $\frac{\mu}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中的频率。

（2）频率满足不等式： $0\leqslant\frac{\mu}{n}\leqslant 1$。

当 A 为必然事件时，有 $\mu=n$，则 $\frac{\mu}{n}=1$；

当 A 为不可能事件时，有 $\mu=0$，则 $\frac{\mu}{n}=0$。

（3）当试验次数很大时，事件 A 的频率 $\frac{\mu}{n}$ 在某一数值 p 附近摆动，而且一般来说随着试验次数的增加，摆动的幅度越来越小，这就是事件频率的稳定性。数值 p 就是事件 A 的概率。

当 n 很大时，我们常用事件 A 的频率 $\frac{\mu}{n}$ 作为它的概率 p 的近似值，这称为概率的统计定义。

7. 概率的性质：

不论由概率的古典定义，还是由概率的统计定义，概率都有如下性质：

$P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，其中 A 为任一事件。

8．概率的加法公式：

（1）若 A、B 互不相容，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$。

（2）若 A 与 $\bar{A}$ 互为对立事件，则 $P(\bar{A})=1-P(A)$。

（3）若 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)。$$

（4）若 A_1，A_2，…，A_n，…两两互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)。$$

（5）若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$

（6）对任意两个事件 A、B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

（7）对任意三个事件 A、B、C，有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)。$$

9．条件概率

（1）如果 A、B 为同一随机试验的两个事件，而且 $P(A)\neq 0$，则称在 A 出现的条件下 B 出现的概率为事件 B 关于 A 的条件概率，记作 $P(B/A)$。而 $P(B)$ 称为无条件概率或原概率。

（2）条件概率 $P(B/A)$ 与事件 A，AB 的原概率有如下关系：

当 $P(A)\neq 0$ 时，$P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$。

10．概率的乘法公式

（1）设 A、B 为任意事件，则

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)，当 P(A)\neq 0。$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)，当 P(B)\neq 0。$$

（2）设 A、B、C 为任意三个事件，且 $P(AB)\neq 0$ 时，有 $P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$。

（3）$A_1, A_2, \cdots A_n$ 为任意 n 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})\neq 0$ 时，有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$。

11. 事件的独立性

（1）定义：如果两个事件 A 和 B，其中任何一个是否发生都不影响另一个发生的可能性，则称两个事件 A 与 B 相独立。即

$$P(A|B)=P(A),\quad P(B|A)=P(B)$$

（2）若事件 A、B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$。

（3）若事件 A、B 相互独立，则事件 $\bar{A}$ 与 B；A 与 $\bar{B}$；$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 均相互独立。

（4）独立事件的加法公式：

1°若 A、B 独立，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

2°若 A、B 独立，则 $P(A+B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$

（5）$P(A)\neq 0$，且 $P(B)\neq 0$ 时，

若 A、B 独立，则 A、B 相容，

若 A、B 互斥，则 A、B 不独立。

12. 多个事件的独立性

（1）如果事件 A_1，A_2，…，A_n 中任一事件的发生都不受其它一个或几个事件的影响，则称事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立。

（2）事件 A、B、C 相互独立的必要充分条件是

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

同时成立。这些等式的个数为 $C_3^2+C_3^3=4$ 个。

（3）$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 只是"A、B、C 相互独立"的必要条件，即"A、B、C 相互独立"$\Rightarrow P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 但 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\not\Rightarrow$"$A$、$B$、$C$ 相互独立"。

（4）描述 n 个事件相互独立，需要有类似（2）中的等式，共 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-C_n^0-C_n^1=2^n-1-n$ 个，而 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$ 仅是这 2^n-1-n 个等式中的一个。故 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$ 是 n 个事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 相互独立的必要条件，而不是充分条件。

（5）若 A_1，A_2，$\cdots,A_n$ 相互独立，那么其中任意 K 个 $(2\leqslant K\leqslant n)$ 事件也相互独立，并且把 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 中的任意一个或 n 个事件换成其对立事件后得到的 n 个事件，仍相互独立。

（6）A_1，A_2，$\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)\text{。}$$

（7）事件的独立性的判定：由试验方式来判定试验的独立性，由试验的独立性来判定事件的独立性。

13．全概公式

（1）把一个事件分割成 n 个两两互斥的事件之和。

如果 A_1，A_2，$\cdots A_n$ 是一个完备事件组，即

$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，$A_iA_j=\phi$ $(i\neq j$，i、$j=1,2,$