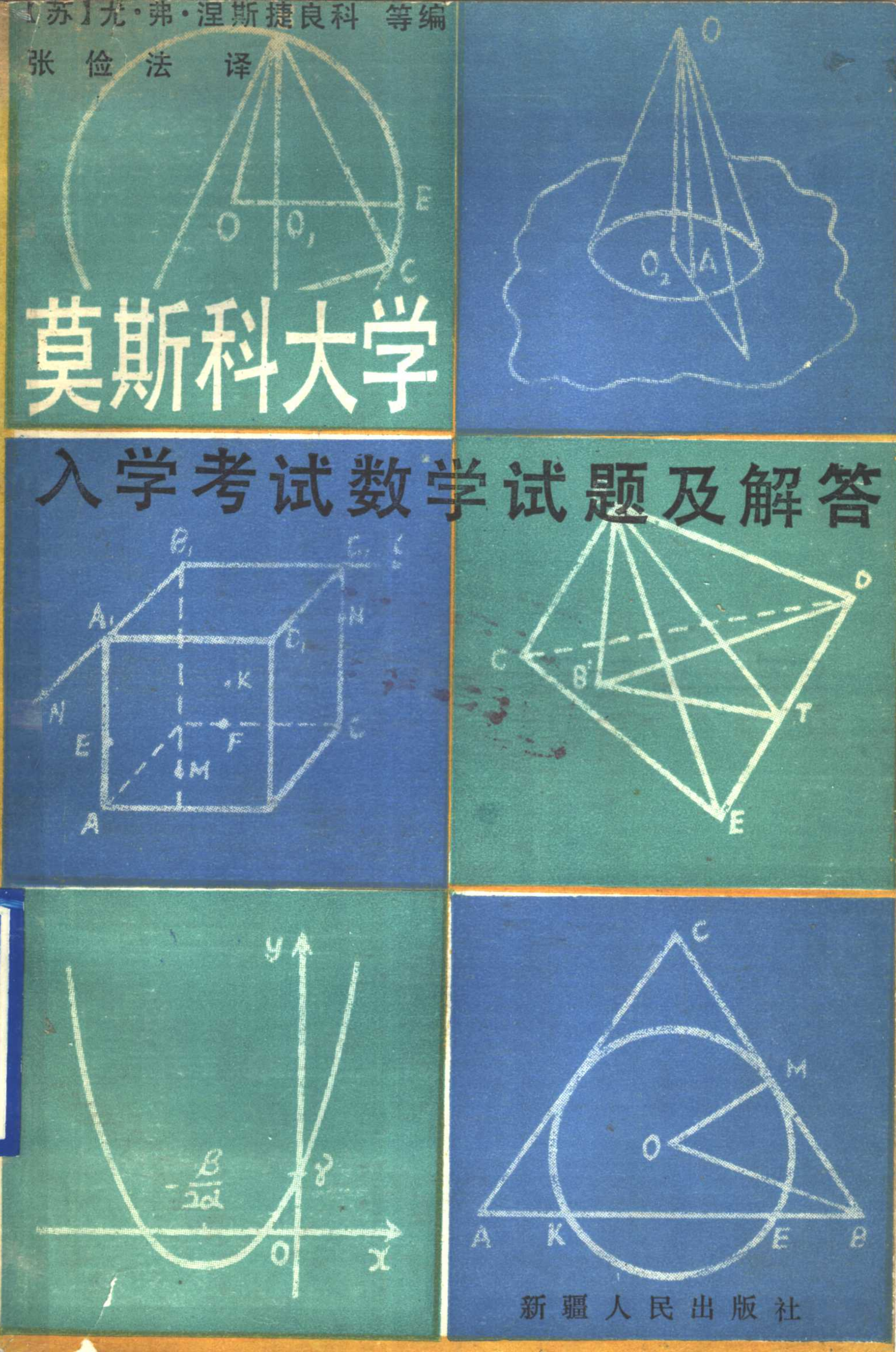
【苏】尤·弗·涅斯捷良科 等编
张 俭 法 译

莫斯科大学
入学考试数学试题及解答



新 疆 人 民 出 版 社

莫斯科大学入学考试数学试题及解答

〔苏〕尤·弗·涅斯捷良科等　编
张　俭　法　　　　译

新疆人民出版社

莫斯科大学入学考试数学试题及解答

〔苏〕尤·弗·涅斯捷良科等　编

张俭法　译

新疆人民出版社出版

（乌鲁木齐市建中路54号）

新疆新华书店发行　新疆新华印刷厂印刷

850×1168毫米　32开本　12.375印张　2插页　240千字

1990年11月第1版　1990年11月第1次印刷

印数：1——3050

ISBN　7-228-01432-4/G·194　定价：4.00元

序

新疆林业学校高级讲师张俭法同志曾留学苏联，攻读林业机械，对数学也颇感兴趣，任课之暇，翻译了1986年苏联科学出版社出版的《莫斯科大学入学考试数学试题及解答》一书。该书汇集了莫斯科大学 1977—1985 年度 13 个系及专业入学考试的全部数学试题（理科类6个系和专业，文科类7个系和专业），以及试题的详细解答。本书是理科专业的试题。这些试题新颖别致，综合性强。解答这些试题不仅要有完备的中学数学知识，还要有较强的思维能力。阅读本书不仅可以掌握一些较复杂的解题方法，还可以得到严格的逻辑推理训练。对高中学生来说，是一本很好的学习资料；对中学数学教师和师范院校数学专业的师生则是一本有益的教学参考书。

译稿要我校阅，我参照原书审核了全部译稿，认为译文准确，语言通畅。审核之后，略赘数语，代作译文之序。

王 曾 贻

1989.9于新疆师范大学

目　　录

第一部分　试　题

说　明……………………………………………………………1
§1—1　数学力学系 … ……………………………………………2
§1—2　计算数学与控制论系 … ……………………………16
§1—3　物理系 … ………………………………………………31
§1—4　化学系 … ………………………………………………47
§1—5　地质系(地球物理) ………………………………61
§1—6　地质系(普通地质) ………………………………73

第二部分　题解与答案

说　明 …………………………………………………… 86
§2—1　数学力学系…………………………………………… 97
§2—2　计算数学与控制论系 ……………………………… 148
§2—3　物理系 ……………………………………………… 209
§2—4　化学系 ……………………………………………… 258
§2—5　地质系（地球物理）………………………………… 302
§2—6　地质系（普通地质）………………………………… 343
增补1984年试题及答案、1985年试题………………………… 382
译后记………………………………………………………… 391

第一部分 试 题

说 明

1977—1983年，既有按数学新大纲学习的考生，也有按旧大纲学习的考生。这两类考生的试题是有区别的。其中，题号后面有字母“H”的试题仅要求按新大纲学习的考生解答；题号后有字母“C”的则仅适用于按旧大纲学习的考生；不注字母的试题是两类考生都适用的。

显然，试题中所用的表示方法和术语对两类考生是不同的。书中，线段 AB 的长用 $|AB|$ 表示，满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的 x 值的集合用$[a,b]$（区间$[a,b]$）表示，函数在区间 $[a,b]$ 的最大值和最小值分别用 $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$和 $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$表示，满足不等式 $a<x<b$、$a<x\leqslant b$、$a\leqslant x<b$ 的 x 的集合相应地用 (a,b)、$(a,b]$、$[a,b)$表示，角 ABC 的度或孤度大小用 $\angle ABC$ 表示。

§1—1　数学力学系

1977

试卷1．

1．H．求满足下式的 a 值（$a>0$）：

$$\int_0^a (2-4x+3x^2)dx \leqslant a.$$

2．一圆外切梯形的两腰长分别为3和5，梯形的中位线将该梯形分成面积比为 5 /11的两部分，求梯形的两底长。

3．H．已知函数 $f(x)=\cos x\cdot\sin 2x$，证明 $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)>-7/9$．

4．解方程组

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$$

5．三棱锥 $SABC$ 的底是边长为 $4\sqrt{2}$ 的等边三角形，侧棱 SC 的长度为 2 且垂直于底面，过 S 和 BC 的中点作一直线，过 C 和 AB 的中点作另一直线，求这两条直线间的距离和交角。

1．C．解不等式

$$x\leqslant 3-\frac{1}{x-1}$$

3．C．解方程

$$3^{\frac{1}{2}+\log_3\cos x}+6^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}+\log_9\sin x}.$$

试卷 2.

1. H. 求满足下式的 α 值：

$$\int_1^2 [\alpha^2 + (4 - 4\alpha)x + 4x^3]dx \leqslant 12.$$

2. 一圆外切梯形的中位线长为 5，中位线将该梯形分成面积比为7/13的两部分，求梯形的高.

3. H. 已知函数 $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$，证明 $\max\limits_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) < 0.77$.

4. 解方程组

$$\begin{cases} 2y^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0, \\ 2z^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0, \\ 2x^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0. \end{cases}$$

5. 三棱锥 $SABC$ 的底是等腰直角三角形 ABC，其斜边 $|AB| = 4\sqrt{2}$，侧棱 SC 的长度为 2 且垂直于底面，过 S 和 AC 的中点作一直线，过 C 和 AB 的中点作另一直线，求二直线的夹角及距离.

1. C. 解不等式

$$x + 3 < -\frac{1}{x+1}.$$

3. C. 解方程

$$5^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2} + \log_5 \sin x} = 15^{\frac{1}{2} + \log_{15} \cos x}.$$

1978

试卷1.

1. $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ 是一整数，求这个数.

2.H.求方程 $\int_{0}^{2}\cos(x+\alpha^2)dx=\sin\alpha$在区间［2，3］的所有解。

3.在锐角三角形 ABC 中，由顶点 A 和 C 分别向 BC 和 AB 作高 AP 和 CQ，已知 $\triangle ABC$ 的面积为18，$\triangle BPQ$ 的面积为 2，PQ 长为 $2\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$ 的外接圆半径。

4.求满足下列不等式组的所有 a 值：

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2\geqslant\dfrac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2+10xy-5y^2\leqslant-2. \end{cases}$$

5.三棱锥 $ABCD$ 的体积为 5，过棱 AD 和 BC 的中点作一平面与棱 CD 交于 M，使$\dfrac{|MD|}{|MC|}=2/3$，该平面与棱锥顶点 A 的距离为 1，求该平面在棱锥内的截面积。

2.C.求方程 $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$ 在区间［3/4，1］的全部解。

试卷2.

1.$\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$ 是一整数，求这个数。

2.H.求方程 $\int_{-u}^{u}\cos(x+2u^2-u)dx=-2\sin 2u$ 在区间［$-3/2$，$-1/2$］的全部解。

3.在锐角三角形 ABC 中，由顶点 A 和 C 分别向 BC 和 AB作高 AP 和 CQ，如果$\triangle ABC$ 的周长为 15，$\triangle BPQ$ 的周长为 9，$\triangle BPQ$ 的外接圆半径为 9/5，求 AC 的长。

4.求满足下列不等式组有解的所有 b 值：

$$\begin{cases} 5x^2-4xy+2y^2\geqslant 3, \\ 7x^2+4xy+2y^2\leqslant\dfrac{2b-1}{2b+5}. \end{cases}$$

5.已知棱锥 $ABCD$，过 AB 和 CD 的中点 K、N 作一平面，该平面与 BC 和 AD 的交点相应为 L、M。如果 $\triangle MNK$ 的面积为 3，棱锥 $ACDL$ 和棱锥 $ABCD$ 的体积比为 0.9，平面 $KLMN$ 到顶点 D 的距离为 3，求棱锥 $ABCD$ 的体积。

2.C.求方程 $\log_2|\mathrm{tg}x|+\log_4\dfrac{\cos x}{2\cos x+\sin x}=0$ 在区间 $[9/4,3]$ 的全部解。

1979

试卷1.

1.求方程 $1-5\sin x+2\cos^2x=0$ 满足不等式 $\cos x\geqslant 0$ 的全部解。

2.KL 为某圆的直径，过端点 K 和 L 各作一直线，与圆的交点相应为 P、Q.点 P、Q位于 KL 的同侧。若$\angle PKL=\pi/3$，KP 和 QL 的交点距 P 和 Q 的距离均等于 1，求圆的直径。

3.H.求函数 $y(x)=x^3-2x|x-2|$ 在区间 $[0,3]$ 内取最小值的点和函数在该区间内的最大值。

4.解不等式

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x}.$$

5.三棱锥 $ABCD$ 的底面是三角形 ABC，在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A=\pi/2$，$\angle C=\pi/6$，$|BC|=2\sqrt{2}$，$AD=BD=CD$。半径为 1 的球与 AD、BD 和 CD 的延长线（D 侧）及平面 ABC 相切，求由 A 点向小球所引的切线长。

3.C.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=1/2,\\[2ex]\dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{3}{x-2y}=1/18.\end{cases}$$

试卷2.

1.求方程 $2\cos 2x-4\cos x=1$ 满足不等式 $\sin x\geqslant 0$ 的所有解.

2.在$\triangle PQR$ 中，$\angle QPR=\pi/3$，由顶点 P 和 R 分别作QR、PQ 的垂线，两垂线的交点距 P 和 R 的距离均为 1，求$\triangle PQR$各边的长。

3.H.求函数 $y(x)=-5x^3+x|x-1|$在区间 $[0,\ 2]$ 内的最大值点和函数在该区间内的最小值.

4.解不等式$\dfrac{6-3^{x+1}}{x}>\dfrac{10}{2x-1}$

5.三角形ABC 是三棱锥的底面，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\pi/3$，$|AB|=|AC|=1$。棱锥的顶点 D 与 A 、B 等距离，一球与 CD 及 AD、BD 的延长线（D 侧）和底面 ABC 相切。球与棱锥底面的切点及顶点D在底面的投影位于$\triangle ABC$ 的外接圆上，求$|AD|$，$|BD|$，$|CD|$.

3.C.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{5}{x-3y}=3,\\[2mm] \dfrac{1}{3x-y}+\dfrac{2}{x-3y}=1/5.\end{cases}$$

1980

试卷1.

1.解方程 $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

2.H.解方程 $\sin 2x=\sqrt{3}\sin x$.

3.一梯形的中位线长为 4，两底角分别为40°和50°，如果两底的中点连线长为 1，求两底的长度.

4. H. 函数 $y(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 图象切线的切点的横座标 C 在区间 $[1/2, 1]$ 内，当 C 取何值时，由该切线、横轴 ox 及直线 $x=2$ 围成的三角形面积最小？其值为多少？

5. 当 a 取何值时，下列不等式有唯一解：

$$\log_{1/a}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0。$$

2. C. 解方程

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}=1+\sin x。$$

4. C. 解方程组

$$\begin{cases} x^3-\sqrt{y}=1, \\ 5x^6-8x^3\sqrt{y}+2y=2。\end{cases}$$

试卷2。

1. 解方程 $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$。

2. H. 解方程 $\sin x=\sqrt{5}\cos\frac{x}{2}$.

3. $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 3，该圆与 BC 边相切于 D，半径为 4 的圆与 AB、AC 的延长线相切，且与 BC 边相切于 E，若 $\angle BCA=2\pi/3$，求 $|ED|$。

4. H. 函数 $y(x)=1/x^2$ 图象的切线的切点 C 的横座标在区间 $[5, 9]$ 内，当 C 为何值时，由该切线、ox 轴及直线 $x=4$ 围成的三角形面积有最大值？其值等于多少？

5. 当 a 取何值时下列方程有三个解：

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3)+2^{-x^2+2x}$$
$$\times\log_{1/3}(2^3x-a^3+2)=0。$$

2. C. 解方程

$$\frac{\sin 2x}{1+\sin x}=-2\cos x。$$

4.C.解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+4xy-3y^2}=x+1, \\ x-y=1. \end{cases}$$

1981

试卷1.

1.解不等式

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geqslant 0.$$

2.解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos y=0, \\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0. \end{cases}$$

3.在两个不同的容器中倒入盐溶液，向第一个容器倒入5公斤，第二个倒入20公斤.由于水的蒸发，第一个容器中盐的百分比含量提高到原来的p倍，第二个容器中盐的百分比含量提高到q倍，已知$p\cdot q=9$，此时两个容器中总共蒸发的水的最大量为多少?

4.底边为BC和AD的梯形$ABCD$有一外接圆，在CD弧上取点E，将E与梯形各顶点连接，已知$\angle CED=120°$，$\angle ABE-\angle BAE=\delta$，求$\triangle ABE$的周长与其内切圆半径的比值

5.在交线为AD的二面角的一个面上有一点B，在另一面上有一点C，DE平行于平面ABC，三棱锥$BCDE$外接于一球中，由球心到DE的距离与DE到平面ABC的距离之比为K，设B'是点B在平面CDE上的投影，已知$\operatorname{tg}\angle B'DE:\operatorname{tg}\angle BDE=l$，经$AD$的中点引一平面$P$平行于平面$ABC$，求该平面在多面体$ABCDE$内的截面积．多面体由三棱锥$ABCD$和三棱锥$BCDE$组成．已知$\triangle ABC$的面积$S$，三棱锥$BCDE$的全表面积为$\sigma$.

试卷2.

1.解不等式

$$\frac{\left[\log_{\sqrt{2}}(x-3)\right]^2}{x^2-4x-5}\geqslant 0.$$

2.解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{\cos 2x}\cos x=0,\\ 2\sin^2 x-\cos\left(2y-\dfrac{\pi}{3}\right)=0.\end{cases}$$

3.在两个容器中盛有水和沙子的混合物，第一个容器中有1000公斤，第二个容器中有1600公斤.向两个容器中添加水，此时第一容器中沙子的百分比含量降到原来的$\frac{1}{k}$，第二容器中沙子的百分比含量降到原来的$\frac{1}{l}$.已知$k\cdot l=9-k$，求向两个容器中共添加的水的最少数量.

4.有一圆内接五边形$ABCDE$，已知$BD\parallel AE$，$\angle CAE=2\angle CEA$，$\angle CBD-\angle CDB=\alpha$，求$\triangle ACE$的周长与其外接圆半径之比.

5.线段FG平行于凸五边形$ABCDE$，A、G位于平面CBF的异侧.在三棱锥$BCFG$中有一内切球，由球心到FG的距离与FG到平面$ABCDE$的距离之比为k.在三棱锥$BCFG$内交线为BF的二面角其值为α，已知$\sin\angle CFB:\sin\angle CFG=l$.由$AF$的中点引一平面$P$平行于平面$ABCDE$，求平面$P$在多面体$ABCDEF$内的截面积.多面体由棱锥$FABCDE$和$FBCG$组成.已知多边形$ABCDE$的面积为$S$，三棱锥$FBCG$的全表面积为$\sigma$.

1982

试卷1.

1.解方程

$$\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0.$$

2.凸四边形 $ABCD$的内切圆圆心为O，$|OA|=|OC|=1$，$|OB|=|OD|=2$，求四边形 $ABCD$ 的周长。

3.解方程

$$\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0.$$

4.求使表达式$\sqrt{3x^4-2-x^8}\cdot\sin[\pi(2x+16x^2)]$有意义且不等于零的所有 x 值。

5.已知三棱锥 $DABC$。$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 是直角三角形，AD 垂直于棱锥底面 ABC 的中线 AK，且$|AD|=|AK|$。两底分别为 EF 和 GH 的等腰梯形 $EFGH$ 是棱锥内不经过 AD 和 BC 中点的截面，E 是 BD 的中点，G 在 AC 边上，且$|AG|=3|GC|$，求梯形 $EFGH$ 与$\triangle BCD$ 的面积比。

试卷2.

1.解方程

$$\log_x(2x^2-3x-4)=2.$$

2.梯形 $ABCD$ 的外接圆半径等于2，AC 是$\angle BAD$ 的平分线，底AD的长是BC长的2倍，求该梯形的面积。

3.解方程

$$\sqrt{2\sin x\cdot\sin 2x}=\sqrt{5\cos x+4\sin 2x}.$$

4.求使下列表达式有意义且不等于零的所有 x 值：

$$\sqrt{4x^4-3-x^8}\cdot\{1-\cos[2\pi(2x+21x^2)]\}.$$

5.在四棱锥$EABCD$中，底面$ABCD$是一平行四边形，$\triangle ADE$ 和$\triangle BCE$ 是直角三角形，BC 垂直于平面 CDE 的中线 EP，且$|BC|=|EP|$。等腰梯形 $GKHL$ 是棱锥的一个截面，G、K、H、L相应在棱AE、BE、CE、DE上，且$|GE|=3|GA|$、$|CH|=|EH|$，求梯形$GKHL$与$\triangle ABE$的面积比。

试卷3.

1.解方程

$$\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1.$$

2.O是凸四边形$ABCD$的圆心，$|OA|=|OC|$，$|BC|=5$，$|CD|=12$，$\angle DAB=\pi/2$，求四边形 $ABCD$ 的面积。

3.解方程

$$\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0.$$

4.求使下列表达式有意义且不等于零的所有 x 值：

$$\sqrt{3x^4-2-x^8}\cdot\sin[\pi(2x-13x^2)].$$

5.已知三棱锥$DABC$，其中$\triangle ABD$和$\triangle ACD$是直角三角形。棱AD垂直于底面ABC的中线AK，且$|AD|=|AK|$。底边为EF和GH的等腰梯形 $EFGH$是棱锥中不经过EF和GH的截面，且点E平分BD，G在AC上，$|AG|=3|GC|$，求梯形$EFGH$与棱锥底面ABC的面积比。

试卷4.

1.解方程

$$\log_{x+1}(x^2-3x+1)=1.$$

2.一圆内接梯形的对角线互相垂直，梯形的一底长是另一底长的七分之一，梯形的周长为18，求该梯形的面积。

3.解方程

$$\sqrt{2\cos x\cdot\sin 2x}=\sqrt{5\sin x+4\sin 2x}.$$

4.求使下列表达式有意义且不等于零的所有x值：

$$\sqrt{4x^4-3-x^8}\cdot\{1-\cos[2\pi(5x-9x^2)]\}.$$

5.在四棱锥 $EABCD$中，底面$ABCD$是平行四边形，$\triangle ADE$和$\triangle BCE$是直角三角形。棱BC垂直于平面CDE的中线EP，且$|BC|=|EP|$。等腰梯形$GKHL$是棱锥的截面，其顶点G、K、H、L相应在棱AE、BE、CE、DE上，且$|GE|=3|GA|$，$|CH|=|EH|$。求梯形$GKHL$与$\triangle CDE$的面积比。

1983

试卷1.

1.解不等式

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqslant \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

2.解方程

$$\log_2\left(\cos 2x+\cos\frac{x}{2}\right)+\log_{1/2}\left(\sin x+\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

3.$\triangle ABC$的周长为$2p$，边AC的长为a，锐角$\angle ABC=\alpha$，该三角形的内切圆O与BC相切于K，求$\triangle BOK$的面积.

4.求满足下列方程组有唯一组解的全部a值：

$$\begin{cases} \left|62\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{2}}-5\right|-\left|12\sqrt{\cos\dfrac{\pi x}{2}}-7\right|+ \\ \left|24\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{2}}+13\right|=11-\sqrt{\sin\dfrac{\pi(x-2y-1)}{3}}, \\ 2\left[x^2+(y-a)^2\right]-1=2\sqrt{x^2+(y-a)^2-\dfrac{3}{4}}. \end{cases}$$

5.已知三棱锥$ABCD$，在AD上取一点F，在DB上取一点N，使$|DN|:|NB|=1:2$.经F、N和$\triangle ABC$的重心引一平面，该平面与CB交于H.经H引另一平面平行于平面ADB，且与CA、CD分别交于L、K.已知$|CH|:|HB|=(|AF|:|FD|)^2$，一小球内切于棱锥$CHLK$，如果由D向面ABC所引垂线的长为h，求$\triangle ABC$与棱锥$ABCD$全表面积的比值.

试卷2.

1.解不等式

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$