高中数学

双基综合教学

主编王乾岭　付主编崔思贤

审订　翟连林

北京理工大学出版社

高中数学

双基综合教学

主编　王乾岭　副主编　崔思贤
审订　翟连林

北京理工大学出版社

（京）新登字149号

内容简介

本书是由全国十多个省市重点中学的部分特、高级教师根据《1992年全国高考数学科说明》及1992年全国高考数学试题的形式精心选编的，共25套综合训练题，文、理合卷（含解答）.

本书选题灵活、新颖，不偏难，覆盖面广，注重基础训练和基本技能的培养，旨在提高学生综合运用“双基”的能力，是数学教师指导高三学生进行综合复习的良好的教学参考书，亦可供高三学生综合训练使用.

高中数学双基综合教学

主编　王乾岭　副主编　崔思贤

审订　翟连[illegible]

北京理工大学出版社出版

（北京海淀区白石桥路 7 号）

北京市怀柔县平义分印刷厂印刷

*

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经销

开本：787×1092毫米 1/32　6.25印张 137千字

1992年10月第 1 版　1992年10月第 1 次印刷

印数：1-10000册　定价：2.90元

ISBN 7-81013-630-5/G·150

目　　录

综合训练题一

（一）选择题*（$3' \times 18 = 54'$）

1．已知集合$A \cup B = \{1,2,3,4\}$，$A = \{1,3\}$，则集合B的子集最多可能有（　）．

（A）2个；（B）3个；（C）4个；（D）16个。

2．若$\log_a \frac{1}{2} < 1$，则实数a的取值范围是（　）．

（A）$a>0$且$a \neq 1$；　（B）$a>1$；

（C）$a<\frac{1}{2}$；　（D）$a>1$或$0<a<\frac{1}{2}$．

3．奇函数$f(x)$在区间$[-b,-a]$上单调递减，且$f(x)>0$（$0<a<b$），则$|f(x)|$在$[a,b]$上是（　）。

（A）单调增函数；　（B）单调减函数；

（C）非单调函数；　（D）单调性不确定。

4．函数$y=\frac{ax+1}{bx-1}$的反函数是它本身，则a，b满足的条件是（　）。

（A）$a=0$，$b=0$；　（B）$a=0$，$b=1$；

（C）$a=1$，b为任意实数；　（D）a，b均为任意实数。

5．如果α、β均为锐角，则$\cos\alpha > \sin\beta$的充要条件为（　）．

（A）$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$；　（B）$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$；

（C）$\alpha>\beta$；　（D）$\alpha<\beta$．

---

*本书中的所有选择题均为单项选择题，即在给出的代号为A、B、C、D的四个结论中有且只有一个是正确的．

6. 函数$y=3\sin(2x+\theta)$的图象关于y轴对称，则θ的值是（　）.

(A) $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$;　(B) $\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$;

(C) $\theta=\frac{k\pi}{2}$;　(D) $\theta=4k\pi\pm\pi$.（均为$k\in Z$）

7. 在三棱柱$ABC-A'B'C'$中，$AB=AC$，侧面$A'ABB'$与侧面$A'ACC'$的面积相等，则$\angle BB'C'$的度数为（　）.

(A) 90°;　(B) 120°;　(C) 60°;　(D) 不确定.

8. 中心角为$\frac{3\pi}{4}$，面积为S_1的扇形围成一个圆锥，圆锥的全面积为S_2，则$S_1:S_2$等于（　）.

(A) 8:11;　(B) 3:8;　(C) 5:8;　(D) 8:13.

9. 若点$A(3,2)$，F是抛物线C：$y^2=2x$的焦点，点P在抛物线C上，当$|PA|+|PF|$取最小值时，点P的坐标是（　）.

(A) $(0,0)$;　(B) $(1,\sqrt{2})$;

(C) $(2,2)$;　(D) $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

10. 设点$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，若平移坐标轴后点P_1的新坐标为$(2x_1,-2y_1)$，则点P_2的新坐标为（　）。

(A) $(x_1-x_2,\ 3y_1+y_2)$;　(B) $(x_1+x_2,\ y_2-3y_1)$;

(C) $(2x_2,\ -2y_2)$;　(D) $\left(\frac{1}{2}x_2,\ \frac{1}{2}y_2\right)$.

11. 五人排成一排，若甲只能排在第一或第二两个位置，乙只能排在第二或第三两个位置，则不同的排法种数是（　）.

(A) 12;　(B) 18;　(C) 24;　(D) 36.

12. 设两个正实数的等比中项为a和b，且$a<b$，则复数

$(a+bi)^5$的辐角主值是（　）.

(A) $-\frac{\pi}{4}$; (B) $\frac{\pi}{4}$; (C) $\frac{3\pi}{4}$; (D) $\frac{7}{4}\pi$.

13. 已知方程$x^2+5x+m=0$的两个虚根为z_1和z_2，且$|z_1-z_2|=3$，则实数m的值是（　）.

(A) 17; (B) $\frac{17}{2}$; (C) $\sqrt{17}$; (D) $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

14. 若$(ax+1)^{2n}$和$(x+a)^{2n-1}$的展开式中含x^n项的系数相等（$n\in N$, $a\neq 0$），则实数a的取值范围是（　）.

(A) $a>1$; (B) $a=\frac{1}{2}$; (C) $0<a<1$;

(D) $a=\frac{n}{n+1}$.

15. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^n}{n(x-2)^n+n\cdot 3^{n+1}-3^n}=\frac{1}{3}$，则实数$x$的取值范围是（　）.

(A) $-1<x<5$; (B) $-1\leqslant x\leqslant 5$;

(C) $x<5$; (D) $x>-1$.

16. 已知边长为a的菱形$ABCD$，$\angle A=60°$，若以BD为棱将菱形所在平面折成$60°$的二面角，连结AC，则AC和BD的距离是（　）.

(A) $\frac{a}{4}$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$; (C) $\frac{3}{4}a$; (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

17. 方程$a^2\sin^2x+a\sin x-2=0$有解的条件是（　）.

(A) $|a|\leqslant 1$; (B) $|a|\geqslant 1$; (C) $|a|\geqslant 2$;

(D) $a\in R$.

18. $\triangle ABC$中，若$\sin A=\cos B\cos C$，则$\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C$的值是（　）.

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 无法确定。

（二）**填空题**（$3'\times 5=15'$）

19．不等式$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+8)<\log_{\frac{1}{2}}2x$的解集是______．

20．（理）设全集$I=\{x|\text{tg}(\text{arc tg}x)=x\}$，$A=\{x|\arcsin(\sin x)=x\}$，$B=\{x|\cos(\text{arc }\cos x)=x\}$，则$A\cap\overline{B}=$___．

（文）函数$y=\cos2x+2\cos x$的最小值为______．

21．（理）设x在$[0,2\pi]$上取值，则方程$1+\sin x+\cos x=2\cos^2x$的解集是____________．

（文）设$f(\text{tg}x)=\cos2x$，则$f(\text{ctg}x)$等于______．

22．设复数z_1，z_2满足$|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=1$，则$|z_1-z_2|$的值是______．

23．已知抛物线的极坐标方程是$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$，在抛物线上有一点$M$，它到准线的距离恰等于该点的极径，则点$M$的极坐标是_______．

（三）**解答题**（共$51'$）

24．（$9'$）设x，y，$x+y$都不等于$k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，$\sin(y-x)=\sin x\cos y$，求证：$\text{tg}(x+y)=\frac{3\sin2x}{3\cos2x-1}$．

25．（$10'$）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，E、F分别是正方形ABB_1A_1和BCC_1B_1的中心。（1）求直线D_1E和A_1F所成角的大小（用反三角函数表示）；（2）求三棱锥$F-A_1D_1E$的体积。

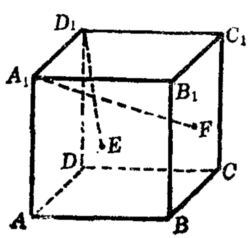

图 1-1

26．（$10'$）设$C_{18}^{n}=C_{18}^{n+2}$，$2C_m^2=C_{m+1}^2$，求$(1+\sqrt{m}i)^n$

的展开式中各实数项的和。

27.（10′）过抛物线$y^2=2px$的焦点F，作垂直于对称轴的弦AB，若M为AF的中点（如图1-2），过M作弦PQ,使$\triangle AMP$面积与$\triangle BMQ$面积相等,试求直线PQ的倾角及此时$|PQ|$的长度。

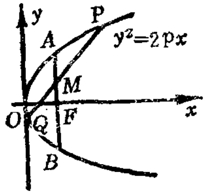

图 1-2

28.（12′）已知$f(x)=(x-1)\lg x$，$g(x)=r\lg(x-1)$ $(r\neq 0,1)$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，对于任何$n\in N$，有$(a_n-a_{n-1})\cdot g(a_{n-1}+1)+f(a_{n-1})=0, n\geqslant 2$。（1）用$a_{n-1}$表示$a_n$；（2）试求出$a_2$，$a_3$，猜想出$a_n$，并用数学归纳法证明你的猜想。

参 考 答 案

（一）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
答案	D	D	A	C	A	B	A	A	C	B	B	D	B	B	A	C	B	A

（二）19．$\{x|0<x<2或4<x<+\infty\}$；

20．（理）$\left\{x\middle|-\frac{\pi}{2}\leqslant x<-1或1<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，（文）$-\frac{3}{2}$；

21．（理）$\left\{0,\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right\}$，（文）$-\cos 2x$；

22．$\sqrt{3}$；23．$\left(\frac{3}{2},\ \mathrm{arc\ tg}2\sqrt{2}\right)$或$\left(\frac{3}{2},\ -\mathrm{arc\ tg}2\sqrt{2}\right)$；

（三）24．由$\sin(y-x)=\sin x\cos y$ 得 $\sin y\cos x=2\sin x\cos y$.

∵ x、$y\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，∴ $\cos x\neq 0$，$\cos y\neq 0$. 以 $\cos x\cdot\cos y$ 同除以上式两边，得 $\operatorname{tg}y=2\operatorname{tg}x$.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\frac{3\operatorname{tg}x}{1-2\operatorname{tg}^2x}=\frac{3\cdot\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}}{1-2\left(\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2}$$

$$=\frac{3\sin 2x(1+\cos 2x)}{(3\cos 2x-1)(1+\cos 2x)}=\frac{3\sin 2x}{3\cos 2x-1}.$$

25.（1）连结A_1B，则E为A_1B中点.连结BC_1，则F为BC_1中点取BF中点为G，连结EG，则$EG\parallel A_1F$. 再连结D_1G.

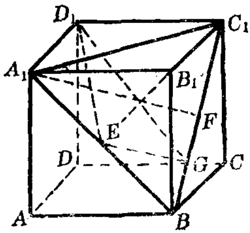

图 1-3

∵ $D_1A_1\perp A_1B$,

∴ $D_1E^2=A_1D_1{}^2+A_1E^2=\dfrac{3}{2}a^2$.

∵ $D_1C_1\perp BC_1$,

∴ $D_1G^2=D_1C_1^2+C_1G^2=\dfrac{17}{8}a^2$.

又∵ A_1F是正$\triangle A_1BC_1$的高线.

$$\therefore\quad EG=\frac{1}{2}A_1F=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}\,a=\frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

于是，在$\triangle D_1EG$中，令$\angle D_1EG=\alpha$，则可得 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{6}$. 故

$\alpha=\pi-\arccos\dfrac{1}{6}$，即所求角为$\arccos\dfrac{1}{6}$.

（2）$S_{\triangle A_1D_1E}=\dfrac{1}{2}\cdot A_1D_1\cdot A_1E=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^2$，又点$F$到平面$A_1D_1E$的距离即点$F$到平面$BCD_1A_1$的距离，而点$F$到平面$BCD_1A_1$的距离为$B_1$到平面$BCD_1A_1$距离$B_1E$的一半，即$\dfrac{1}{2}B_1E=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$.

$$\therefore\quad V_{F-A_1D_1E}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1D_1E}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a=\frac{1}{24}a^3.$$

26. 由 $\begin{cases} C_{18}^{n}=C_{18}^{n+2}, \\ 2C_m^2=C_{m+1}^2. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} n=8, \\ m=3. \end{cases}$

故 $(1+\sqrt{m}\,i)^n=(1+\sqrt{3}\,i)^8$.

注意到 $(1+\sqrt{3}\,i)^8$ 的展开式中的每一项不是实数就是纯虚数，所以展开式中各实数项的和即为 $(1+\sqrt{3}\,i)^8$ 的实部.

又 $(1+\sqrt{3}\,i)^8=[2(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)]^8$

$=2^8(\cos480^\circ+i\sin480^\circ)=-2^7+2^7\cdot\sqrt{3}\,i.$

因此，展开式中各实数项的和为 $-2^7=-128$.

27. 由已知条件得 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，$A\left(\frac{p}{2},p\right)$，$M\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right)$.

又 $S_{\triangle AMP}=S_{\triangle BMQ}$，$|MB|=3|MA|$，故有 $|MP|=3|MQ|$ ①

设直线 PQ 的方程为 $\begin{cases} x=\frac{p}{2}+t\cos\alpha \\ y=\frac{p}{2}+t\sin\alpha \end{cases}$ （t为参数）

代入 $y^2=2px$，得 $t^2\sin^2\alpha+(p\sin\alpha-2p\cos\alpha)\,t-\frac{3}{4}p^2=0.$

$$\therefore \begin{cases} t_1+t_2=\dfrac{2p\cos\alpha-p\sin\alpha}{\sin^2\alpha} & ② \\ t_1t_2=-\dfrac{3p^2}{4\sin^2\alpha} & ③ \end{cases}$$

由①式得 $t_1=-3t_2$，代入②式和③式得

$$\begin{cases} t_2=\dfrac{p\sin\alpha-2p\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} & ④ \\ t_2{}^2=\dfrac{p^2}{4\sin^2\alpha} & ⑤ \end{cases}$$

由④和⑤消去 t_2 得 $(\sin\alpha-2\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha$,

解得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ $\left(\alpha=\frac{\pi}{2}\text{舍去}\right)$.

此时，$t_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}p$，故有 $|PQ|=|t_1|+|t_2|=2\sqrt{2}p$.

28.（1）由所给关系式得

$$(a_n-a_{n-1})\cdot r\lg a_{n-1}+(a_{n-1}-1)\lg a_{n-1}=0.$$

又 $\lg a_{n-1}\neq 0$，故 $(a_n-a_{n-1})r+(a_{n-1}-1)=0$.

由此解得 $a_n=\frac{1}{r}+\left(1-\frac{1}{r}\right)a_{n-1}$.

所以 $a_2=\frac{1}{r}+\left(1-\frac{1}{r}\right)a_1=2-\frac{1}{r}=1+\left(1-\frac{1}{r}\right)$,

$$a_3=\frac{1}{r}+\left(1-\frac{1}{r}\right)a_2=2-\frac{2}{r}+\frac{1}{r^2}=1+\left(1-\frac{1}{r}\right)^2.$$

又 $a_1=2=1+\left(1-\frac{1}{r}\right)^0$，据此猜想出：$a_n=1+\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-1}$.

证明：（i）当$n=1$时命题显然成立.

（ii）假设当$n=k$时命题成立，即 $a_k=1+\left(1-\frac{1}{r}\right)^{k-1}$,

则 $a_{k+1}=\frac{1}{r}+\left(1-\frac{1}{r}\right)a_k$

$$=\frac{1}{r}+\left(1-\frac{1}{r}\right)\left[1+\left(1-\frac{1}{r}\right)^{k-1}\right]=1+\left(1-\frac{1}{r}\right)^k.$$

即当$n=k+1$时命题也成立.

综合（i），（ii）可知，上述猜想对任何自然数n都成立.

综合训练题二

（一）选择题（$3'\times 18=54'$）

1．设$I=R$，$M=\{x|x\geqslant 2\}$，$N=\{x|0<x\leqslant 7\}$，则$\overline{M}\cup\overline{N}$是（ ）。

（A）$\{x|x>7\}$；（B）$\{x|x>7$或$x<2\}$；

（C）$\{x|x<2\}$；（D）$\{x|2\leqslant x\leqslant 7\}$。

2. 一个正方体的顶点都在球面上，它的棱长为2，则这个球的表面积为（　）.

（A）8π；（B）12π；（C）24π；（D）48π.

3.（理）方程$\text{tg}3x=\text{tg}x$的解集是（　）.

（A）$\{x|x=\frac{1}{2}k\pi, k\in Z\}$；（B）$\{x|x=k\pi, k\in Z\}$；

（C）$\{x|x=2k\pi, k\in Z\}$；（D）$\varnothing$.

（文）方程$3^{2x-1}+2\cdot3^x=9$的解为（　）.

（A）-1；（B）1；（C）2；（D）-2.

4. 若椭圆的两个焦点将长轴三等分，那么这个椭圆的两条准线间的距离是焦距的（　）.

（A）4倍；（B）9倍；（C）12倍；（D）18倍.

5. 函数 $y=\sqrt{x+1}-2(x\geqslant-1)$的反函数是（　）.

（A）$y=(x+2)^2-1$；

（B）$y=(x+2)^2-1(x\geqslant-2)$；

（C）$y=(x+2)^2-1(x\geqslant-1)$；

（D）$x=(y+2)^2-1$.

6. 圆锥侧面展开图是半径为1，圆心角为270°的扇形，则该圆锥过顶点的截面三角形面积的最大值是（　）.

（A）$\frac{1}{2}$；（B）$\frac{\sqrt{3}}{4}$；（C）$\frac{15}{32}$；

（D）$\frac{3}{16}\sqrt{7}$.

7.（理）极坐标方程$\cos\theta=\frac{1}{3}(\rho\geqslant0)$所表示的曲线是（　）.

（A）两条射线；（B）一条射线；

（C）余弦曲线；（D）两条相交直线.

（文）直线 $(2m^2+m-3)x+(m^2+2m)y=4(m-1)$ 在 x 轴上的截距为1，则 m 的值一定等于（　）。

（A）2或 $-\frac{1}{2}$；（B）2；（C）$-\frac{1}{2}$；（D）1。

8．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}}$ 的值等于（　）。

（A）$\frac{8}{3}$；（B）4；（C）$\frac{4}{3}$；（D）$\frac{2}{3}$。

9．（理）曲线 $\begin{cases}x=-\cos\alpha\\ y=1-\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$）表示的图形是（　）。

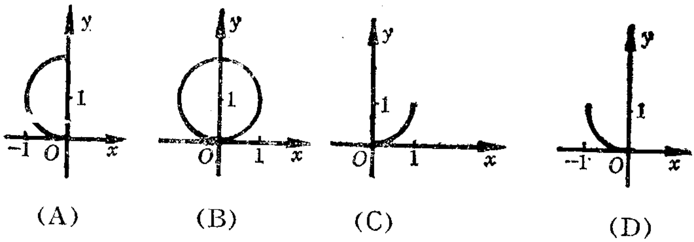

图 2-1

（文）三条直线 $x+y=2$，$x-y=0$，$x+ay=3$ 构成三角形，则 a 的值为（　）。

（A）$a\neq\pm1$；（B）$a\neq1$；（C）$a\neq-1$；

（D）以上答案都不全面。

10．$\left(\sqrt[3]{a}-\frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{12}$ 展开式中 a^2 项的系数是（　）。

（A）$-27C_{12}^{8}$；（B）$27C_{12}^{8}$；（C）$81C_{12}^{4}$；（D）$-81C_{12}^{4}$。

11．在空间下列命题中正确的是（　）。

(A) 两条直线若无公共点则必平行；

(B) 过平面α的一条斜线的平面一定不垂直于平 面α；

(C) 同垂直于平面α的二平面若相交，则交线必垂直α；

(D) 同平行于一直线的两平面平行。

12. 条件甲：$\begin{cases}1<x+y<7,\\0<xy<10;\end{cases}$ 条件乙：$\begin{cases}1<x<2,\\0<y<5,\end{cases}$

则甲是乙的（ ）。

(A) 充分但非必要条件； (B) 充要条件；

(C) 必要但非充分条件；

(D) 既非充分又非必要条件。

13. 若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$0<\theta<\pi$，则$\operatorname{tg}\theta=$（ ）。

(A) $-\frac{1}{2}$； (B) $-\frac{1}{2}$或-2；

(C) -2； (D) $\frac{1}{2}$或2。

14. 若数列$\{a_n\}$满足$a_n=q^n(q\neq0)$，则下列结论不恒 正确的是（ ）。

(A) $\{a_n^2\}$是等比数列； (B) $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列；

(C) $\{\lg a_n\}$是等差数列； (D) $\{\lg|a_n|\}$是等差数列。

15. （理）复数$z=(\arccos x-\arcsin x)+i(\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{arc\,ctg}x)$，若$z$的对应点在复平面内第三象限，则实数$x$的取值范围是（ ）。

(A) $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$； (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<0$；

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$； (D) $-1<x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（文）设函数 $f(x)=1-\frac{m}{e^x+1}$是奇函数，则m的值等于（ ）。

(A) 4； (B) 1； (C) 2； (D) 0.

16. 设等比数列$\{q^{n-1}\}$ （$q>1$，$n\in N$）的前n项和为S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+2}}{S_n}$ 的值是（ ）。

(A) 0； (B) 1； (C) $\frac{1}{q}$； (D) q^2.

17. 满足$C_n^0+1\cdot C_n^1+2\cdot C_n^2+\cdots+n\cdot C_n^n<450$的最大正整数$n$是（ ）。

(A) 4； (B) 5； (C) 6； (D) 7.

18. 下列关系式正确的是（ ）。

(A) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$；

(B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$；

(C) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$；

(D) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

（二）填空题（$3'\times5=15'$）

19. 经过$P(2, 3)$和圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$相切的切线方程是__________.