$$\begin{cases} x+2y+3z=26 \\ 2x+3y+z=34 \\ 3x+2y+z=39 \end{cases}$$

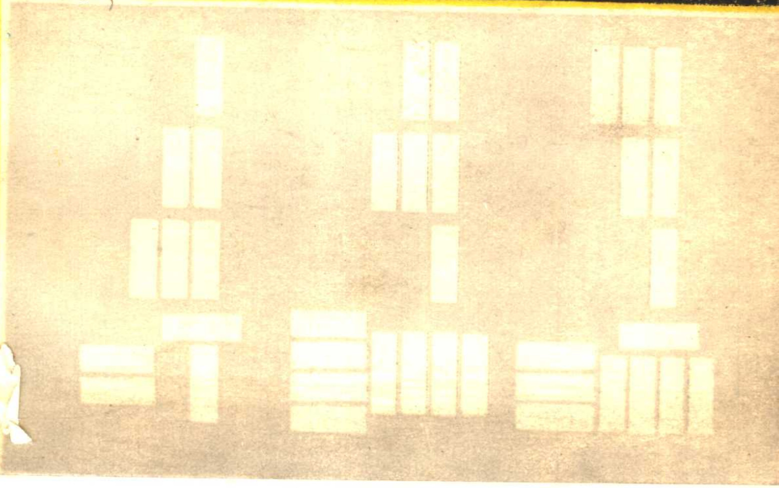
FANG CHENG YU FANG CHENG ZU DE JIE FA

初中学生数学读物

方程与方程组的解法

沈 超

福建教育出版社



初中学生数学读物

方程与方程组的解法

沈 超

福建教育出版社

内 容 提 要

本书通俗地介绍了方程与方程组的解题方法以及怎样列方程解应用题。书中对解方程的方法和原理作了深入浅出的探讨，对应用题的数量关系作了精辟的论述。

本书对初中学生学好课本中的方程知识很有帮助。

初中学生数学读物

方程与方程组的解法

沈 超

出版：福建教育出版社

发行：福建省新华书店

印刷：闽侯青圃印刷厂

787×1092毫米 32开本 4.25印张 87千字

1984年5月第一版 1984年5月第一次印刷

印数：1——32,750

书号：7159·917 定价：0.43元

引　言

方程在中学代数里占有很重要的地位。方程的知识与函数的知识有直接的联系，它可以帮助我们了解量与量之间的相互依存关系，方程也是数与式的运算的具体应用，在中学阶段，不论是在代数、几何、三角、解析几何、微积分等的学习中，有不少问题需要用方程的知识来解决。用方程来解决一些实际应用题，又比用算术四则运算来解题简便得多。

中学数学里所研究的方程有一次方程、二次方程、分式方程、根式方程、指数方程、对数方程以及三角方程、反三角方程等。在初中代数里，只研讨一次方程、二次方程、分式方程和根式方程，这些方程叫做代数方程，因为它们只含有限次加、减、乘、除、乘方、开方六种代数运算。其它的方程叫做超越方程，因为它们除了含有有限次代数运算外，还分别含有指数运算、对数运算、三角运算、反三角运算等，这些运算叫做超越运算。

这本小册子仅讨论某些代数方程的解法。

目　录

引　言

一、方程的解法……………………………………(1)

§1.方程的有关概念……………………………(1)

§2.方程的解法……………………………………(3)

习题一……………………………………………(23)

二、方程组的解法………………………………(26)

§1.方程组的有关概念……………………………(26)

§2.方程组的解法…………………………………(26)

习题二……………………………………………(48)

三、列方程(组)解应用题………………………(51)

§1.怎样列方程解应用题…………………………(51)

§2.怎样列方程组解应用题………………………(59)

§3.举例……………………………………………(64)

习题三……………………………………………(77)

四、方程与方程组解的研究……………………(81)

§1.方程解的研究…………………………………(81)

§2.方程组解的研究………………………………(95)

习题四……………………………………………(103)

附　录……………………………………………(104)

§1、韦达公式及其应用…………………………(104)

§2、根的判别式及其应用………………………(114)

习题五……………………………………………(128)

习题答案…………………………………………(130)

一 方程的解法

在中学代数里，方程这个课题的主要内容是解法与应用。

§1. 方程的有关概念

什么叫做方程？先说明什么叫做未知数。未知数就是还没有知道的、需要用与它有关的已知数求得的数。例如，兄弟二人现在年龄的和为 40 岁，弟弟今年 18 岁，求哥哥的年龄。这个问题里，哥哥的年龄还不知道，但可以从二人现在的年龄的和与弟弟今年的岁数求得，所以哥哥的年龄是一个未知数。

在代数里，常用文字表示数。所以我们常用 x、y、z 等字母表示未知数。

方程就是含有未知数的等式。例如 $2x+3=x-2$，$x^2+3x+2=0$，$1+\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x-2}$，$3x+2y=5$ 等都是方程，这里 x、y 是未知数。

对于方程，“元”和“次”这两个概念是很重要的。

“元”指的是未知数。一元方程指的是只含有一个未知数的方程，多元方程指的是含有两个或两个以上未知数的方程.例如，$2x+3=x-2$，$x^2+3x+2=0$，$1+\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x-2}$ 等是一元方程，而 $3x+2y=5$ 是二元方程(因为它含有两个未知数)。

我们知道，只有多项式才涉及到次数。例如，$2x+3$、$3x+2y$ 等是一次式，x^2+3x+2 是二次式，而 $1+\frac{2}{x-1}$ 谈不上次数，因为它不是多项式，象式子$(x^2+3x+2)-(x^2-x+1)$不是二次式而是一次式，因为它实际上是式子 $4x+1$。

因此，等式两边都是整式的方程(叫做整式方程)才能说是某某次方程.那么，如何确定这类方程的次数呢？首先应将方程移项、合并同类项，而后取次数最高的项的次数作为这个方程的次数。例如，方程 $2x+3=x-2$ 整理后得方程 $x+5=0$，所以它是一个一次方程；方程 $3x+2y=5$ 也是一个一次方程。方程 $x^2+3x+2=0$ 是一个二次方程；方程 $xy+3=x-y$整理后得方程 $xy-x+y+3=0$，所以也是一个二次方程。象方程 $x^2+3x+2=x^2-x+1$ 就不是二次方程，而是一次方程，因为整理后得方程$4x+1=0$。

一般地，一个方程经过整理后得方程 $ax-b=0$ ($a\neq0$) 时，叫做一元一次方程；整理后得方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 时，叫做一元二次方程；整理后得方程 $ax+by=c$(a、b 至少有一不为零)时，叫做二元一次方程；整理后得方程 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$(a、b、c至少有一不为零)时，叫做二元二次方程。

能使方程两边的值相等的未知数的值(如果是多元方程，我们就说未知数的值组)叫做方程的解。例如，方程$2x+3=x-2$ 的解是 $x=-5$；方程 $x^2+3x+2=0$ 的解是 $x=-1$ 与 $x=-2$；方程$3x+2y=5$ 的解是 $x=1$ 与 $y=1$、$x=0$ 与 $y=\frac{5}{2}$等等(这个方程有无数个解，我们就说它是一个二元一次不定方

程）。一元方程的解常叫做根。多元方程的解不能叫做根。例如 $x=1$ 与 $y=1$ 是方程$3x+2y=5$的解，不能说是它的根。

象方程 $x+2=x-3$ 就没有解，因为不论 x 取什么值，都不能使方程两边的值相等，这种方程（没有解的方程）叫做矛盾方程。

求方程的解或验证方程无解的过程叫做解方程。

§2. 方程的解法

因为多元方程的解有无数个，所以下面着重介绍某些一元代数方程的解法。

1. 一元一次方程的解法

一元一次方程解法的思路是先整理成 $ax-b=0$ 或$ax=b(a\neq0)$的形式而后求解，其步骤一般为（按先后次序）：

(1)去分母（这里所说的分母只是已知数，不含未知数）；

(2)去括号；

(3)移项；

(4)合并同类项使成 $ax-b=0$ 或 $ax=b(a\neq0)$的形式；

(5)用 a 除方程 $ax=b$ 的两边。

"去分母"为的是避免分数系数的计算，"去括号"、"移项"为的是合并同类项，从而使方程简化。

例1 解方程 $15-(7-5x)=2x+(5-3x)$。

这个方程没有分母，所以不需要作步骤(1)。

解： 去括号， $15-7+5x=2x+5-3x$。

移项， $5x-2x+3x=5+7-15$。

合并同类项， $6x=-3$。

$$\therefore \qquad x = -\frac{1}{2}.$$

例2 解方程 $\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{2}=\frac{x}{6}-(4-x)$。

解： 去分母(两边同乘以6)，

$$4x-3(x-2)=x-6(4-x).$$

去括号，$\qquad 4x-3x+6=x-24+6x$。

移项，$\qquad 4x-3x-x-6x=-24-6$。

合并同类项，$\qquad -6x=-30$。

$$\therefore \qquad x=5.$$

例3 解一元一次方程 $a(x-a)=2ab-b(x-b)$，这里 $a+b\neq 0$。

解： 去括号，$\qquad ax-a^2=2ab-bx+b^2$。

移项，$\qquad ax+bx=a^2+2ab+b^2$，

即 $\qquad (a+b)x=(a+b)^2$。

因为 $a+b\neq 0$，所以

$$x=a+b.$$

条件 $a+b\neq 0$ 是不可少的，否则这个方程就不是一次方程了。

例4 解方程 $|x-1|+|x+2|=5$。

解这个方程首先要去掉绝对值符号。由绝对值的意义知

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时，} \\ -(x-1), & \text{当 } x<1 \text{ 时；} \end{cases}$$

$$|x+2|=\begin{cases} x+2, & \text{当 } x\geqslant -2 \text{ 时，} \\ -(x+2), & \text{当 } x<-2 \text{ 时。} \end{cases}$$

所以解这个方程，要分三种情况（注意，$-2<1$）。

解：(1) $x<-2$（当然 $x<1$），这时 $|x-1|=-(x-1)$，$|x+2|=-(x+2)$，所以方程为

$$-(x-1)-(x+2)=5,$$

$$-2x=6,$$

$$\therefore \quad x=-3.$$

因为 $-3<-2$，所以 $x=-3$ 是原方程的根。

(2) $-2\leqslant x<1$，这时 $|x-1|=-(x-1)$，$|x+2|=x+2$。所以方程为

$$-(x-1)+(x+2)=5.$$

这是一个矛盾方程，所以无解。

(3) $x\geqslant 1$（当然 $x\geqslant -2$），这时 $|x-1|=x-1$，$|x+2|=x+2$。所以方程为

$$(x-1)+(x+2)=5,$$

$$2x=4,$$

$$\therefore \quad x=2.$$

因为 $2>1$，所以 $x=2$ 是原方程的根。

所以原方程的根为 -3 与 2。

2. 一元二次方程的解法

解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的思路是利用因式分解将左边式子 ax^2+bx+c 分解成两个一次因式的乘积，转化成一元一次方程求解。

我们知道，二次三项式 ax^2+bx+c 的因式分解一般用配方法。但对某些特殊的二次三项式用提公因子法、乘法公式法或十字相乘法因式分解较为简便。在实数范围里，不是所

有二次三项式都能因式分解。例如，当 $b^2-4ac<0$ 时，二次三项式 ax^2+bx+c 就不能因式分解。因此，在初中代数中，我们不能完全解决一元二次方程的求根问题；到高中学习了复数，才能完全解决一元二次方程的求根问题。下面只讨论 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法。

例5 解方程 $x^2-3x=0$。

解： 应用提公因子法因式分解。

$$x(x-3)=0.$$

$$\therefore \quad x=0 \text{ 或 } x=3.$$

注： 答案中两个根之间用了"或"字，这是因为 $x(x-3)=0$ 时必有 $x=0$ 或者 $x-3=0$（两者至少有一成立）。也可以把这个答案写成"这个方程的两根为0与3"，这里用"与"是因为这两个数都是这个方程的根。由此可知，说法不一样，所用的联系词也不一样。写答案时要注意。

例6 解方程 $4x^2-9=0$。

解法一： 应用乘法公式法因式分解。

$$(2x+3)(2x-3)=0.$$

$$\therefore \quad x=-\frac{3}{2} \text{ 或 } x=\frac{3}{2}.$$

解法二： 先移项而后两边开平方。

$$4x^2=9.$$

$$2x=\pm 3.$$

$$\therefore \quad x=\pm\frac{3}{2}.$$

例7 解方程 $2x^2-3x-2=0$。

解法一： 应用十字相乘法因式分解，

$$(x-2)(2x+1)=0,$$

$\therefore$ $$x=2 \text{ 或 } x=-\frac{1}{2}.$$

解法二： 应用配方法因式分解.

$$x^2-\frac{3}{2}x-1=0.$$

$$\left[x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2+1\right]=0,$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}=0,$$

$$\left(x-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)=0,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-2\right)=0,$$

$\therefore$ $$x=-\frac{1}{2} \text{或 } x=2.$$

例8 解方程 $x^2+x-1=0$.

用十字相乘法分解 x^2+x-1 的因式是很不客易的，因为出现无理数，所以这类方程一般应用配方法因式分解来求解.

解： $$\left[x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right]=0,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=0,$$

$\therefore$ $$x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{或 } x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

例 7 和例 8 告诉我们，任何 $b^2-4ac\geqslant0$ 的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$在实数范围里都可以应用配方法转化成一元一次方程求解。但配方法的过程比较麻烦、我们常应用配方法解一般一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$，将它的根作为一元二次方程的根的公式。

例9 解方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$。

解： 因为 $a>0$，所以有

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

$$\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\right]=0.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

因为 $b^2-4ac\geqslant0$，所以 $\sqrt{b^2-4ac}$ 有意义；又因 $a>0$，所以$\sqrt{4a^2}=2a$。于是有

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{或}x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根的公式。

注： 若$a<0$，则将方程 $ax^2+bx+c=0$ 改为 $-ax^2-bx-c=0$（这里$-a>0$），而后应用这个根的公式求解，得到的两根分别为

$$x_1=\frac{-(-b)+\sqrt{(-b)^2-4(-a)(-c)}}{2(-a)}$$

$$=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-(-b)-\sqrt{(-b)^2-4(-a)(-c)}}{2(-a)}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这两个根实际上就是上面的根的公式。所以不论 $a>0$ 还是 $a<0$，都可以用上面根的公式直接求解。

上面的例5到例8，应用这个根的公式求解如下：

例5： $a=1$，$b=-3$，$c=0$。

∴ $$x=\frac{3\pm\sqrt{9-0}}{2}=3,\ 0.$$

例6： $a=4$，$b=0$，$c=-9$。

∴ $$x=\frac{0\pm\sqrt{0+144}}{8}=\pm\frac{12}{8}=\pm\frac{3}{2}.$$

例7： $a=2$，$b=-3$，$c=-2$。

∴ $$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=2,\ -\frac{1}{2}.$$

例8： $a=1$，$b=1$，$c=-1$。

∴ $$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

例10 解方程 $-3x^2+2x+3=0$。

解： $$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+36}}{-6}=\frac{1\mp\sqrt{10}}{3}.$$

例11 解方程 $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x-2)$。

这个方程当然可以整理成 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的形式而后求解。不过按这样的方法求解比较烦。仔细观察，两边都有 $x-1$ 这个因式，所以可以先移项而后因式分解。

解： $(x-1)(2x+3)-(x-1)(x-2)=0.$

$(x-1)[(2x+3)-(x-2)]=0.$

$(x-1)(x+5)=0.$

$\therefore\quad x=1$ 或 $x=-5.$

要注意，不能把原方程两边约去因式$x-1$，因为这样就失去了1这个根。

3. 分式方程的解法

所调分式方程就是分母含有未知数的方程，例如$1+\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x-2}$就是分式方程.解分式方程的思路一般是去分母转化成整式方程而后求解。这样的解法有时会产生增根（将在后面“四”中讨论）。因此，分式方程求得根后，必须加以检验。

例12 解方程 $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x^2+4x-4}{x^2-4}=2+\frac{x}{x-2}.$

解法一： 两边同乘以最低公分母$(x+2)(x-2)$得

$$(x-2)(x+3)+(x^2+4x-4)$$
$$=2(x+2)(x-2)+x(x+2).$$

化简得

$$x^2-3x+2=0.$$

$\therefore\quad x=1$ 或 $x=2.$

当$x=2$时，原方程的分母x^2-4与$x-2$的值均为零，这是不允许的，所以2是增根。因此，这个方程的根是1。

解法二： 移项得

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x^2+4x-4}{x^2-4}-2-\frac{x}{x-2}=0.$$

左边通分得

$$\frac{(x+3)(x-2)+(x^2+4x-4)-2(x^2-4)-x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=0.$$

化简得

$$\frac{x^2-3x+2}{(x+2)(x-2)}=0,$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=0,$$

即
$$\frac{x-1}{x+2}=0.$$

由于只有在分子为零时，分式的值才为零，所以

$$x-1=0,$$

即
$$x=1.$$

这样就不出现解法一中的增根2。那么是不是任何分式方程按解法二的方法求解都不会产生增根呢？看下面的例13。

例13 解方程 $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x(x-1)}=0.$

解： 通分、化简得

$$\frac{x^2-2x+1}{x(x-1)}=0,$$

$$\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}=0,$$

$$\frac{x-1}{x}=0,$$

∴
$$x-1=0,$$

即
$$x=1.$$

$x=1$ 使原方程的分母 $x-1$ 与 $x(x-1)$的值为零，所以

1 是增根，因此这个方程无解。

由此可知，不同采用什么方法将分式方程转化成整式方程，总有产生增根的可能。所以，对于分式方程，验根是不可缺少的一个步骤。

例14 解方程 $\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-9}$.

这个方程如果直接用去分母转化成整式方程来解，在计算上是比较烦的，因为要作四次三个一次因式的乘积。仔细观察，这个方程有一个特点，四个分子都相同(都是 1)，四个分母都是一次式，而且两边两个分母的差相同(都是 1).因此按下法解较简便。

解： 两边各自通分并化简得

$$\frac{-1}{(x-5)(x-6)}=\frac{-1}{(x-8)(x-9)}.$$

$$\therefore \qquad (x-5)(x-6)=(x-8)(x-9).$$

$$\therefore \qquad x=7.$$

经检验，7 是这个方程的根。

注： 如果把这个方程写成 $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}$ 或 $\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-8}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-9}$，那么把两边各自通分而后求解，是否简便？为什么？

例15 解方程 $\frac{2(2x^2+x)}{x^2+6}+\frac{x^2+6}{2x^2+x}=3$.

这个方程去分母化成整式方程得到的是一个四次方程。解四次方程是比较麻烦的，现在我们还不会解。仔细观察，可以看到，$\frac{2x^2+x}{x^2+6}$ 与 $\frac{x^2+6}{2x^2+x}$ 是互为“倒数”的，所以可