考试名家指导

考研数学专项训练系列

考研

2007版

高等数学(理工类)题型精讲

北京大学 林源渠 李正元 周民强 刘西垣 编著

第5版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学专项训练系列

高等数学题型精讲(理工类)

第 5 版

北京大学　林源渠　李正元　周民强　刘西垣　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是“考试名家指导”考研数学专项训练系列丛书之一，是根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试命题、阅卷及辅导的经验编写而成。全书按照“考试大纲”规定共分八章：函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程。每一章均包括四个部分：考试大纲要求、基本内容与重要结论、典型例题分析、自测练习题与参考答案。

本书作者为北京大学多年从事数学基础教学及参加过全国考研辅导工作的名师，具有丰富的教学和辅导经验，其所编写的教材、辅导书和教授的课程在历年参加考研的学生中具有相当大的影响。

本书题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理，可作为考研辅导班的辅导用书或考生自学用书，对本科生及数学工作者也是一本比较好的学习用书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学题型精讲.理工类/林源渠等编著.—5版.
—北京:机械工业出版社，2006.3
(考研数学专项训练系列)
ISBN 7-111-14277-2

Ⅰ.高... Ⅱ.林... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021726 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
责任编辑:徐春涛　责任印制:洪汉军
三河市宏达印刷有限公司印刷
2006 年 4 月第 5 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 23.5 印张 · 509 千字
定价:32.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话:(010)68326294
编辑热线:(010)68354423
本社服务热线电话:(010)68311609
本社服务邮箱:marketing@mail.machineinfo.gov.cn
投稿热线电话:(010)68354423
投稿邮箱:sbs@mail.machineinfo.gov.cn

出 版 说 明

由机械工业出版社与北京大学数学科学学院的几位老师策划、出版的“考试名家指导”考研数学专项训练系列丛书，其目的在于帮助有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息。这是一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的丛书。本丛书是根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验编写而成的。

本套丛书作者皆为北京大学多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

考研数学专项训练系列丛书分为四册：《高等数学题型精讲(理工类)》、《微积分题型精讲(经济类)》、《线性代数题型精讲》和《概率论与数理统计题型精讲》，这样不仅充分发挥了每个作者的特长，而且也方便读者根据自己的具体情况选购。

每册书都严格按照“考试大纲”的规定分章，每一章又都包括四个部分：

考试大纲要求——在这一部分中原原本本地介绍了大纲对本章考试内容以及考试要求的规定，使读者一览全局。

基本内容与重要结论——在这一部分中对大纲规定的考试内容以及重点、难点作了精心的总结和透彻的阐述，目的在于使读者对有关的基本概念、重要公式和定理获得深入的理解和全面的掌握。

典型例题分析——在这一部分中集中了经过精心挑选的部分历年考研真题和一批典型例题，总结了各种解题方法，许多解法构思精妙、匠心独运，对读者深入领会基本内容、开阔思路和灵活解题十分有利。

自测练习题与参考答案——在这一部分中有针对性地编排了若干题目(并附有答案)，供读者作为自测练习之用。由于本书篇幅所限，这里提供的练习题数量也许并不能完全满足备考的需要。为了作好研究生入学考试的复习，读者还需要从其他渠道获得更多的题目。

为了在研究生入学数学考试中取得高分，考生须切记以下几点：明确大纲规定的考试内容和要求，掌握历年数学命题的特点和重点是前提；深入掌握基本概念，牢记并能熟练运用基本公式和法则，确保基本计算准确熟练是基础；搞清有关知识间的纵向与横向的联系，按照解题为主线，重新组织有关知识，增强灵活运用知识解决综合题目的能力是关键。

研究生试题中有相当数量的综合题，即在一个题目中考查不同章节的多个知识点，甚至考

查不同学科内容的试题。这类题目着重考查考生对大纲内容的融会贯通与灵活运用，为此考生必须对所学知识进行重组，彻底搞清有关知识间的纵向与横向联系，把原来学过的内容按照解决特定问题的需要进行梳理，打乱次序后再重新编排，以期做到“成竹在胸，信手拈来”，迅速而准确地找到解决综合题的切入点。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大考生开拓思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

我们在出版这套书时力求能够体现出以上的特色，但是由于时间仓促，疏漏之处难免，恭请读者不吝指正。

机械工业出版社

前　　言

为了帮助广大考生加强考研数学科目的训练，提高应试能力，我们特编写了数学科目的考前复习指导书。

数学科目的考试分理工和经济两大类。对应每一大类，我们分别编写了《高等数学题型精讲（理工类）》和《微积分题型精讲（经济类）》。编写的指导思想、结构和内容以教育部制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”为依据。陈述方式除给出基本知识和重要结论外，均通过典型例题或历年真题来介绍解题思路与方法，使考生能即读即用。考虑到应试的实际情况，题型的选择与解法也可能是综合型的，即在保证重点的情况下不排除运用后续的知识。

历年考试命题的特点是量大、面广，在重要的知识点上还有一定的深度。为了取得理想的成绩，我们提出以下几点注意事项，供考生参考：

1．“先易后难”。这是考试的一般原则。

2．“一传到位”。这里借用排球运动的术语，是指在解题时一定要及时弄清楚本命题内容所涉及的范围，以及熟悉解决这类问题的基本途径或常规方法。例如，求函数的导数问题，首先要弄明白该函数是以什么形式出现的：若是分段函数，则在分段点处必须用左、右求导的方法进行；若函数以积分形式出现，如求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t$$

因为是对 x 求导，而积分号下又含有变量 x，这在定积分的学习中是没有的，所以我们只能设法通过变量替换，将积分号下的 x 化去，使得被积函数中不再出现 x，即写成

$$\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal[\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u]{x-t=u} -x\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

然后就可以求导了。

3．“胸有典型”。这里所说的“典型”是指每一部分内容里最基本且最常用的某些范例，而“胸有”的意思是必须熟悉这些事实。例如，微积分中的两个重要极限；基本初等函数的导数公式；重要的等价无穷小量，如：

$$\varphi(x)\sim\sin\varphi(x)\sim\tan\varphi(x)\sim\ln(1+\varphi(x))\sim 2(1-\sqrt{1-\varphi(x)})$$

其中 $\varphi(x)\to 0$；

p-级数，x^{-p}的广义积分；基本幂级数的和，如

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$$

以及基本初等函数的泰勒级数展开式等等。显然，若对这些事实能够做到“想到就来”，则将对解答问题会大有帮助。

4．“步步为营”。为了从形式上减少例题数量，也为检查考生的综合解题能力，试题中常出现多种概念、方法并存的所谓“综合题”。这时，我们必须将整个命题分成若干小题，一步一步地解出来。要做到这一点，第一要有信心，第二要分解步骤。如在 2001 年微积分部分有一道试题：

设有一高度为 $h(t)$(t 为时间)的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$$

(设长度单位为 cm，时间单位为 h)，已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9)，问高度为 130 cm 的雪堆全部融化需多少小时？

这一试题属于综合题型，从命题近 100 字的陈述中一句一句读下来，易知它涉及求体积、侧面积与时间，从而要分三个步骤一一解决。

第一步求体积：在任意的固定时刻 t，雪堆的侧面是由抛物线 $z = h(t) - \dfrac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$ 绕 z 轴旋转一周所产生的旋转抛物面。所以其体积为

$$V = \int_0^{h(t)} \pi x^2(z)\mathrm{d}z = \pi\int_0^{h(t)} \frac{h(t)}{2}(h(t) - z)\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\pi h(t)^3$$

第二步求侧面积：

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{利用极坐标}} \frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} [h^2(t) + 16r^2]^{\frac{1}{2}} r\mathrm{d}r = \frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

第三步求时间：由题意知

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0.9S \Rightarrow \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{13}{10} \Rightarrow h(t) = -\frac{13}{10}t + C$$

又 $h(0) = 130 \Rightarrow C = 130$，因此

$$h(t) = -\frac{13}{10}t + 130 \xrightarrow{h(t)\to 0} t = 100\ \mathrm{h}$$

即高度为 130 cm 的雪堆全部融化需 100 h。

总体来说，就是“先易后难、一传到位、胸有典型、步步为营”。此外，需要提醒读者的是，对于本书所编的例题和自测练习题，并非每题都要细读细做，而应根据自己的具体情况来定。虽然每年的试题都有些变化，但知识的范围和结构基本相同。因此，掌握基本概念、基础理论和常用方法是最重要的。精读，学会解决一定数量的范例不失为应试的重要方法。

目 录

第一章　函数、极限、连续

一、考试大纲要求

按照考试大纲，本章的考试内容包括：函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；反函数、复合函数、分段函数和隐函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数以及简单应用问题中函数关系的建立等方面；考试要求是：理解函数的概念；掌握函数的表示方法；了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性；理解复合函数及分段函数的概念；了解反函数和隐函数的概念；掌握基本初等函数的性质及其图形；会建立简单应用问题中的函数关系式.

在历年的试题中，既有单纯考察函数有关知识的题目，也有许多把函数有关知识融汇于其他内容当中的综合性题目.

极限是微积分的理论基础，研究函数的性质是通过研究各种类型的极限来达到的，如连续、导数、定积分、级数等等.本章的重点内容是极限.这部分的考试内容是：数列极限与函数极限的定义及它们的性质；函数的左极限和右极限；无穷小和无穷大的概念及其关系；无穷小的性质及无穷小的比较；极限四则运算；极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e};$$

洛必达法则；考试大纲对极限的要求是：理解函数极限的概念；理解函数左极限和右极限的概念以及极限存在与左、右极限的关系.掌握极限的性质及四则运算法则；掌握极限存在的两个准则并会利用它们求极限；掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小、无穷大的概念；掌握无穷小的比较方法；会用等价无穷小求极限；掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

由于函数的连续性是通过极限定义的，所以按定义判断函数是否连续以及判断间断点的类型等问题，本质上是求极限的问题.因此这部分也是本章的重点.这部分考试内容包括：函数连续性概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质.考试要求是：理解连续函数的概念(含左连续与右连续)；会判别函数间断点的类型；了解连续函数的性质和初等函数的连续性；理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)并会应用这些性质.

二、基本内容与重要结论

1.1 函数的有关概念和几类常见的函数

(一) 函数的定义

函数 设 D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定法则总有一个确定的数值和它对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**,记做 $y = f(x)$,数集 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的**定义域**, x 叫做**自变量**, y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的**函数值**,记做 $f(x_0)$,当 x 取遍 D 的每一个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**.

(二) 几类常见的函数

有界函数 如果存在数 $M > 0$,使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对于任何 $x \in X$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,数 M 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个界,否则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

如果函数 $f(x)$ 在其定义域上有界,则称为**有界函数**;否则称为**无界函数**.

单调函数 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D,区间 $I \subset D$.如果对于任何 $x_1, x_2 \in I$,只要 $x_1 < x_2$,就有 $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加(单调减少)**.

如果对于任何 $x_1, x_2 \in I$,只要 $x_1 < x_2$,就有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调不减(单调不增)**.

奇函数与偶函数 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.如果对于任何 $x \in D$,总有 $f(x) = f(-x)$ $(f(x) = -f(-x))$,则称 $f(x)$ 在 D 上为**偶函数(奇函数)**.

注 偶函数的图形关于 y 轴对称;奇函数的图形关于原点对称.

周期函数 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D.如果存在常数 $T \neq 0$,使得对于任何 $x \in D$,总有 $x \pm T \in D$,且 $f(x + T) = f(x)$,称 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**.

显然,如果 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期,则 T 的任何整数倍倍数也是函数 $f(x)$ 的周期;因而一个周期函数必有无穷多个周期.为了确定起见,我们所说的周期函数的周期都是指它的**最小正周期**.

设 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则在定义域内每个长度为 T 的区间上，$f(x)$ 的图形都有相同的形状.

(三) 反函数、复合函数、初等函数与隐函数

反函数 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z. 如果对于每个 $y \in Z$，存在惟一的 $x \in D$ 满足 $f(x) = y$，把 y 看做自变量，把 x 看做因变量，则 x 是一个定义在 $y \in Z$ 上的函数，记此函数为

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in Z),$$

称之为 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的**反函数**.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把反函数表达式中的 x 和 y 对换，写成

$$y = f^{-1}(x) \quad (x \in Z)$$

的形式. 这样一来，在同一个直角坐标系中，函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ $(x \in Z)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

很明显，单调函数一定有反函数；若某个函数不是单调函数，但是它的定义域能够分为若干个单调区间，则在每个单调区间中该函数就有一个相应的反函数.

复合函数 设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_f，值域是 Z_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域是 D_g，值域是 Z_g. 如果 $Z_g \cap D_f \neq \varnothing$，则称函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D = \{x \mid g(x) \in D_f\}$$

是由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的**复合函数**. 变量 u 称为**中间变量**.

初等函数 常数函数、幂函数、对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数等六种函数称为**基本初等函数**. 基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为**初等函数**.

初等函数有很多好的性质，它们是微积分的重要研究对象.

隐函数 设 $F(x, y)$ 是一个已知二元函数，I 是一个区间. 如果在区间 I 上存在函数 $y = y(x)$ 满足方程 $F(x, y) = 0$，则称这个函数 $y = y(x)$ 为方程 $F(x, y) = 0$ 在区间 I 上确定的**隐函数**.

(四) 分段函数与积分上限的函数

在自变量的不同变化范围中，自变量与因变量的对应法则需用不同的解析式来表示的函数称为**分段函数**. 绝对值函数 $y = |x|$，取整函数 $y = [x]$ 等都是分段函数.

若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，它在部分区间 $[a, x]$ 上的定积分在区间 $[a, b]$ 上定义了一个函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

称为**用变上限定积分定义的函数**或**积分上限的函数**.

这两类函数在考研数学试题中经常出现，因此必须重视这两类函数的有关概念和运算.

1.2　极限的性质与两个重要极限

(一) 基本性质

1. 极限的不等式性质

定理 1.1　设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. 若 $a > b \Rightarrow \exists N$，当 $n > N$ 时 $x_n > y_n$. 若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant y_n \Rightarrow a \geqslant b$.

推论(保正性)　设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. 若 $a > 0 \Rightarrow \exists N$，当 $n > N$ 时 $x_n > 0$. 若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 0$.

定理 1.2　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. 若 $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > g(x)$；若 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow A \geqslant B$.

推论(保正性)　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > 0$；若 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow A \geqslant 0$. 其他的极限过程也有类似的结论.

2. 极限的惟一性.

3. 有界性性质

定理 1.3　设 x_n 收敛 $\Rightarrow x_n$ 有界(即 $\exists$ 常数 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leqslant M$ $(n = 1,2,3,\cdots)$).

定理 1.4　设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 有界，即 $\exists \delta > 0, M > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x)| \leqslant M$.

注　定理 1.4 中函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内有界，是函数的局部有界性.
其他的极限过程如 $x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0, x \to +\infty, x \to -\infty$ 等等也有类似的结论.

(二) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}\left(\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e},\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1\right).$$

1.3　极限的存在与不存在问题

(一) 数列 x_n 敛散性的判别

1. 通过 x_n 与其他数列的关系

定理 1.5(夹逼定理)　若 $\exists N$,当 $n>N$ 时 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,又 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$,则

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

还有其他一些极限运算法则,不仅证明了 x_n 收敛,还可求其极限值.如 $x_n = y_n + z_n$ 或 $x_n = y_n \cdot z_n$,若 y_n, z_n 均收敛,则 x_n 也收敛.

2. 通过 x_n 的自身性质

定理 1.6(单调有界数列必存在极限定理)

若数列 x_n 单调上升且有上界,即 $x_{n+1} \geqslant x_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$ 并存在一个数 M 使得对任意的 n 有 $x_n \leqslant M$,则 x_n 收敛,即存在一个数 a 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 并有 $x_n \leqslant a \quad (n=1,2,\cdots)$.

若数列 x_n 单调下降且有下界,即 $x_{n+1} \leqslant x_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$ 并存在一个数 m 使得对任意 n 有 $x_n \geqslant m$,则 x_n 收敛,即存在一个数 a 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 且有 $x_n \geqslant a \quad (n=1,2,\cdots)$.

3. 通过数列与级数的关系

x_n 的敛散性与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 的敛散性是相同的.因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 的部分和是 $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k) = x_{n+1}-x_1$.

(二) 函数 $y=f(x)$ 的极限存在与否的问题

关于函数极限存在性有两个结论:

定理 1.7(夹逼定理)　设 $\exists \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

又
$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A$$
$\Rightarrow$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

定理 1.8(单侧极限与双侧极限的关系)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

对于分段函数

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x_0-\delta<x<x_0, \\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta. \end{cases}$$

考察 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在时,就要分别求

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} h(x) \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} g(x).$$

1.4 无穷小量及其阶

(一) 无穷小量、无穷大量

1. 定义

定义 1.1 在某一极限过程中以零为极限的变量称为**无穷小量**(或**无穷小**). 无穷小量记为 $o(1)$.

定义 1.2 若 $\forall M>0$, $\exists$ 自然数 N, 当 $n>N$ 时 $|x_n|>M$, 称 x_n 为**无穷大量**($\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\infty$).

类似地定义 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大量($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$), $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$).

也可类似定义**正无穷大量**和**负无穷大量**. 无穷大量也称为**无穷大**.

2. 无穷小量与极限, 无穷小量与无穷大量的关系

无穷小量与极限的关系: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)=o(1)$ $(x\to x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

无穷小量与无穷大量的关系: 在同一个极限过程中,

$$\begin{cases} f(x)\text{ 为无穷小量}, f(x)\neq 0\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}\text{ 为无穷大量}. \\ f(x)\text{ 为无穷大}\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}\text{ 为无穷小}. \end{cases}$$

(二) 无穷小的阶

1. 定义

定义 1.3 设在同一个极限过程中, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 为无穷小, 存在极限 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=l$. (1) 若 $l\neq 0$, 称 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 在该极限过程中为**同阶无穷小**; (2) 若 $l=1$, 称 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 在该极限过程中为**等价无穷小**, 记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$(极限过程); (3) 若 $l=0$, 称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**高阶无穷小**, 记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$(极限过程). 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(不为 ∞), 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 不可比较.

定义 1.4 设在同一个极限过程中, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 为无穷小. 以 $\alpha(x)$ 为基本无穷小, 若 $\exists\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=l\neq 0$, 即 $\beta(x)$ 与 $\alpha^k(x)$ 为同阶无穷小, 称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 **k 阶无穷小**.