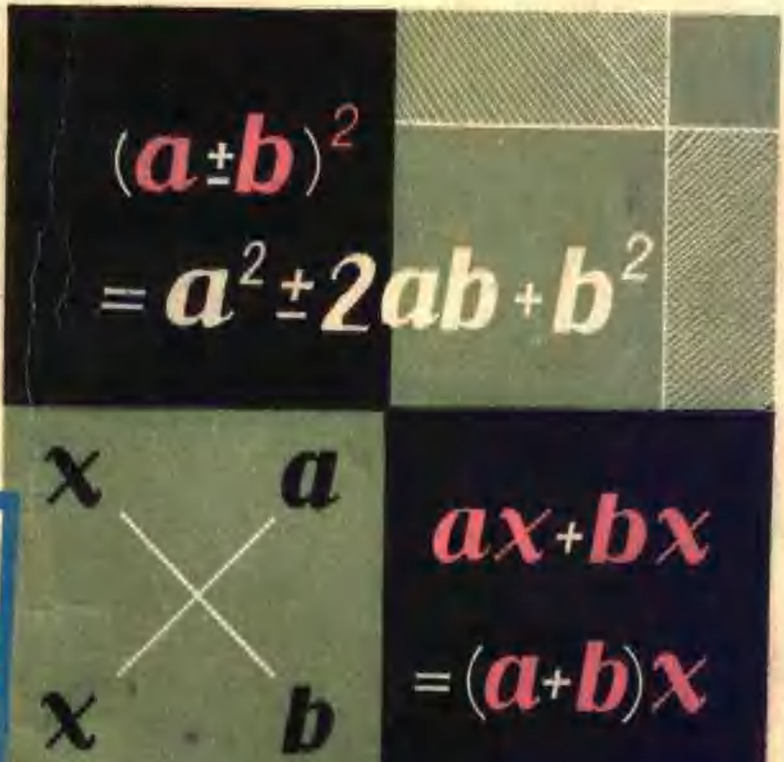
中学生导读丛书

刘进丁 主编
刘进丁 胡文华 编著

数学(初一)



上海科学技术文献出版社

数　学

（初　一）

刘进丁　主　编
刘进丁　胡文华　编　著

上海科学技术文献出版社

中学生导读丛书

数　　学

（初　一）

刘进丁　胡文华　编著

*

上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路 2 号）

新华书店经销

宜兴市第二印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 7.75　字数 167,000

1989 年11月第 1 版　1989 年11月第 1 次印刷

印数：1—8,500

ISBN 7-80513-249-9/O・16

定价：2.80元

前　言

我国正在从事现代化建设，需要培养大量的各类各级人才，这是一项极为重要的带根本性的任务。而中学教育有承上启下的重要作用，它担负着为高一级学校输送合格新生以及为国家建设培养劳动后备力量的双重任务。

为了帮助中学生掌握语文、数学、物理、化学、外国语等课程的基础知识和基本技能，我们组织上海师范专科学校、向明中学(上海市重点中学)、育才中学(上海市重点中学)、七一中学(上海市静安区重点中学)、上海南市区教育学院等部分教师、教育专家、教研人员编写了《中学生导读丛书》。

我们深知要编好这样一套实用性很强的入门书，做一个好的"导游"，并不容易，但我们力求做到：

实用，便于自学。在编写时，我们以中学各科最新教学大纲为依据，从基础知识、基本技能训练着眼，突出各门课程的重点和难点，有目的地作详细讲述、分析，这无疑有助于学生掌握基础知识和基本技能。

通俗易懂，全面提高。我们在编写时，力求语言生动，比喻形象确切。每个单元包括教学要求、解题指导和习题三项内容。所附习题均经过精选，提问有启发性，解答有详细分析。对优等生能帮助其透彻理解，熟练掌握；对后进生帮助其加深对课文的理解，掌握学习方法，学会观察、实验、计算、分析、判断以及区别容易弄错的概念等等。

本丛书在编写过程中，承戴山同志对若干方面作了必要的

订正、补充和修改，数学由上海市南洋模范中学(上海市重点中学)袁义沛同志审阅，在此谨表谢忱。

由于时间仓促，水平有限，缺点、错误在所难免，敬请读者批评、指正。

编　者

1988年6月

目　录

一、有 理 数

(一) 内 容 解 析

初一代数里的有理数部分，包括有理数的有关概念、有理数的绝对值和有理数运算等三部分内容。

1. 有理数的有关概念

正确理解负数的引进是掌握有理数概念的关键。课本是以讨论具有相反意义的量作为引进负数的出发点，这是很容易理解的。如气温的零上与零下，地面标高的高出海平面与低于海平面，行程中的前进与后退，这些具有相反意义的量，要把它们表示明白，只有从数字的表示法上来加以区别。数学家们规定用“+”“-”两种符号表示出恰恰相反的两种量，“负数”就这样进入了代数。

引进“+”“-”符号以后，我们称小学算术中的整数(零除外)和分数为正数，“+”号通常省略不写；而带有“-”号的整数和分数，如-5，$-\frac{1}{3}$等称为负数。零不要单纯地理解为“一无所有”，应当把零看做起点，零是正数与负数的分界数，既不算正数，也不算负数。

因此，有理数常见有以下两种分类方法：

$$有理数\begin{cases}正数(正整数、正分数)\\零\\负数(负整数、负分数)\end{cases}$$

$$有理数\begin{cases}整数(正整数、负整数、零)\\分数(正分数、负分数)\end{cases}$$

相反数、倒数、负倒数、非负数等概念常见于各类数学书籍中，应认真掌握。相反数除课本上"只有符号不同的两个数叫做互为相反数"的定义外，还可作这样理解：如果两个数的和是零，那末这两个数互称为相反数，如 3 与 -3；-7.5 与 7.5。相反数具有这样的特点，它们在数轴上所对应的两个点分别在原点两侧，且与原点的距离相等，即关于原点对称。零的相反数是零。

倒数，如果两个数的乘积为 1，则称这两个数是互为倒数。如 -5 的倒数是 $\frac{1}{-5}$，$\frac{1}{3}$ 的倒数是 3，$a+b$ 的倒数是 $\frac{1}{a+b}$ $(a+b\neq0)$，零没有倒数。

负倒数，如果两个数的乘积为 -1，则称这两个数是互为负倒数。如 2 的负倒数为 $-\frac{1}{2}$，-0.3 的负倒数为 $\frac{10}{3}$。

正数和零亦称非负数，这是数学里常用的一个概念。

2. 有理数的绝对值

有理数的绝对值是较难掌握的一个重要概念。它是这样定义的：一个正数的绝对值是它的本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。要表示一个数的绝对值，只要在这个数的两旁各画一条竖线。如 -3.8 的绝对值记作 $|-3.8|$。美国有些教科书上对绝对值作这样的定义：一个数去掉正、负号以后所得的数值，叫做这个数的绝对值。必须注意，一个数的绝对值一定是非负数。如

$$|-2.5|=2.5;\quad |7.9|=7.9;$$

$$|(a-b)^2|=(a-b)^2;$$

$$|a-b|=\begin{cases}a-b, & \text{当 } a>b \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } a=b \text{ 时}\\ b-a, & \text{当 } a<b \text{ 时}\end{cases}$$

在数轴上看，一个数的绝对值就是表示这个数在数轴上的点离开原点的距离。

3. 有理数的加、减、乘、除运算法则

有理数加法法则：同号两数相加，取原来的符号，并把绝对值相加；异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值，互为相反数的两个数相加得零。一个数同零相加，仍得原数。如$(-9.3)+(-6.7)=-16$（同号两数相加）；

$$(21)+\left(-19\frac{1}{3}\right)=1\frac{2}{3}$$

（异号两数相加）

有理数减法法则：减去一个数，等于加上这个数的相反数。这就是说，在进行有理数减法运算时，把减数的符号改变后，就可以按加法的法则进行运算了。如$(-14)-(-8)=-14+8=-6$；$(-14)-(+7)=(-14)+(-7)=-21$。不难看出有理数的加、减法运算，根据减法法则可以统一成加法运算。如

$$\begin{aligned}&(-20)-(-7)+(-5)-(-6)\\&=(-20)+(+7)+(-5)+(+6)\\&=-20+7-5+6=-12。\end{aligned}$$

象这样把加减法统一写成加法的式子，叫做代数和，上例中

$$(-20)+(+7)+(-5)+(+6) \text{ 和}$$

$$-20+7-5+6$$

都是代数和的形式，读作“负 20，正 7，负 5，正 6 的和”。

有理数乘法法则：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘。任何数同零相乘都得零。几个不等于零的有理数相

乘,先决定积的符号,再把它们的绝对值相乘。积的符号由负因数的个数决定，当负因数有奇数个时,积为负,当负因数的个数有偶数个时,积为正。例如,

$$(-3)\times\left(+1\frac{1}{6}\right)\times\left(-1\frac{4}{7}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\left(3\times\frac{7}{6}\times\frac{11}{7}\times\frac{1}{4}\right)=-1\frac{3}{8}。$$

因为乘数有三个负数,

$$-3、-1\frac{4}{7}、-\frac{1}{4},$$

这样积符号为负,随后因数的绝对值相乘。

有理数除法法则:两个数相除,同号得正，异号得负，并把绝对值相除。零除以任何一个不为零的数都得零。零不能作除数。如

$$(-5)\div(-15)=\frac{1}{3},$$

$$\frac{4}{9}\div\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}。$$

在进行有理数除法时，经常利用这一法则：一个数除以另一个数,等于被除数乘以除数的倒数,从而使除法运算统一为乘法运算。

如计算

$$-1\frac{1}{2}\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$$

(除法转化为乘法)

$$=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

4. 运算律

加法的交换律：两个数相加，交换加数的位置,和不变,记

作 $a+b=b+a$。不难推出，若干个数相加，任意交换加数的位置，和亦不变。

加法的结合律：三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后二个数相加，和不变，记作$(a+b)+c=a+(b+c)$。据此，不难得到，若干个数相加结合律也成立。

应用交换律和结合律能够使加法运算简便。例如，

$$(1)\ \frac{3}{5}+(-2)+\left(-\frac{1}{10}\right)+\left(-\frac{3}{14}\right)+\frac{1}{4}+\left(-\frac{2}{7}\right)$$

$$=\frac{3}{5}+\left(-\frac{1}{10}\right)+(-2)+\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{14}\right)+\left(-\frac{2}{7}\right)\ \text{(交换律)}$$

$$=\left[\frac{3}{5}+\left(-\frac{1}{10}\right)\right]+\left[(-2)+\frac{1}{4}\right]+\left[\left(-\frac{3}{14}\right)+\left(-\frac{2}{7}\right)\right]$$

$$\text{(结合律)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left(-\frac{7}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{4}=-1\frac{3}{4}$$

$$(2)\ 2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{8}+\left(-4\frac{2}{3}\right)$$

$$=\left(2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)+\left[\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-4\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=3\frac{5}{8}-5\frac{1}{2}=-1\frac{7}{8}$$

利用运算律，有时可把分母有倍数关系的分数先结合（如第1小题），有时可先把正项先加在一起，把负项加在一起，再做（如第2小题）；有时可把相加得零的数结合起来相加等，使计算比较简便。应该注意到这两个法则不适用于减法运算，但适用于代数和的运算或变形。如，

$$\left(2\frac{1}{7}\right)-\left(1\frac{1}{3}\right)+\left(-3\frac{5}{6}\right)-\left(-2\frac{6}{7}\right)$$

$$=2\frac{1}{7}-1\frac{1}{3}-3\frac{5}{6}+2\frac{6}{7}$$

$$=\left(2\frac{1}{7}+2\frac{6}{7}\right)-\left(1\frac{1}{3}+3\frac{5}{6}\right)$$
$$=5-5\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$$

乘法交换律：两个数相乘，交换因数的位置，积不变，记作 $ab=ba$。容易推广到几个数相乘，交换任二个因数位置，积仍不变。

乘法结合律：三个数相乘，先把前两个数相乘，或者先把后两个数相乘，积不变，记作 $abc=(ab)c=a(bc)$。

乘法对加法的分配律：一个数同两个数(或几个数)的和相乘，等于把这个数分别同这两个数相乘，再把积相加，记作

$$a(b+c)=ab+ac,$$ 如：

$$(-999.9)\times160$$
$$=(-1000+0.1)\times160=-160000+16=-159984$$

5. 有理数大小比较法则

两个正数的大小比较在小学里学过了，引进负数以后，可根据以下原则比较大小。正数都大于零，负数都小于零，正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小。利用数轴比较大小更直观，更准确。只要记住，在数轴右边的点所表示的数总比它左边的点所表示的数大。

［例］ 按大小顺序(从大到小)排列下列各数：

$$3.2,\ -4\frac{1}{2},\ 5.5,\ -3,\ 0,\ -2.$$

［解］ 3.2，5.5为正数，且5.5大于3.2；-2、$-4\frac{1}{2}$、-3为负数，且 $\left|-4\frac{1}{2}\right|>|-3|>|-2|$，所以，

$$5.5>3.2>0>-2>-3>-4\frac{1}{2}$$

6. 幂的概念

求 n 个因数(相同)的积的运算，叫做乘方，乘方的结果叫做幂。如 $\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n$，乘方是一种运算，而幂是运算的结果。有理数的整数幂，仍为有理数。在式子 a^n 中，a 叫做底数，n 叫做指数，读作 a 的 n 次方或 a 的 n 次幂。如 $(-0.7)^5$，(-0.7) 是底数，5 是指数，读作 (-0.7) 的 5 次方或 (-0.7) 的 5 次幂。根据乘法法则，不难得出正数的任何次方都是正数，负数的奇数次方是负数，负数的偶数次方是正数。如

$$(-3)^5=-243,\ (-3)^4=81。$$

7. 有理数的混合运算法则

有理数混合运算法则是有理数这节内容的一个重点和难点。读者应通过大量的练习，加深理解并掌握这一运算法则。一个算式里含有加、减、乘、除、乘方等几种运算时，要按照下面顺序进行演算：先算乘方，再算乘除，最后算加减。如果有括号，就先算括号里面的。例如，

计算 $-5-\left[-3+\left(1-0.2\times\frac{3}{5}\right)\div(-2)^2\right]$

$$=-5-\left[-3+\left(1-\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\right)\div4\right]\text{(先括号内乘方运算)}$$

$$=-5-\left[-3+\left(1-\frac{3}{25}\right)\div4\right]\text{(再算小括号内的乘法)}$$

$$=-5-\left[-3+\frac{22}{25}\times\frac{1}{4}\right]\text{(完成小括号内运算)}$$

$$=-5-\left[-3+\frac{11}{50}\right]\text{(完成中括号内的乘法运算)}$$

$$=-5-\left[-2\frac{39}{50}\right]=-2\frac{11}{50}\text{(最后算加减)}$$

初学有理数混合运算时，切忌步骤跳跃，过程简略，应象上

例按步就班，在运算过程中理解、体会混合运算法则，为以后熟练进行混合计算打下扎实的基础。

（二）解题指导

1. 解关于有理数概念的习题时，应紧扣每一个数学概念的定义，切勿想当然。解概念辨析题，还要学会举反例说明。

［**例 1**］ 下列各论断是否正确？为什么？

(1) 把正有理数集合与负有理数集合并在一起，就是有理数集合。

(2) 一个有理数的二次幂必定是正数。

(3) 任何两个有理数之间，至少有一个有理数。

［**解**］ (1) 这个论断是错误的。零是有理数，但它既不是正有理数，也不是负有理数。

(2) 这个论断是错误的。零是有理数，但它的二次幂仍为零。

(3) 这个论断是正确的。因为任何两个有理数的算术平均数必定是有理数，且在这两个有理数之间。由此可以得出任两个有理数之间有无限多个有理数。

从这个例子的 (1)(2)，不难看出判断一个论断是错误的，最有说服力的论据，就是举出反例。举反例，就是寻找满足题设（即已知）要求，但与题断（即结论）不符的例子，只要找到一个，就可说明问题。

2. 关于有理数绝对值的习题，常见的有二种类型，绝对值的计算和含绝对值的代数式化简。下面我们结合例题介绍解题的方法。

［**例 2**］ 计算 $|-16|\times\left|3\frac{1}{2}\right|-(|5.2|-|-3.56|)$

[解] 原式$=16\times\frac{7}{2}-(5.2-3.56)=56-1.64=54.36$

[说明] 作绝对值的计算题，可采用"+、−"号与绝对值符号一起去掉的方法，随后进行数值计算。上例中$|-16|=16$，$|-3.56|=3.56$，$|5.2|=5.2$，就是把绝对值符号与符号一起去掉得到的，这样处理计算题速度较快。

[例 3] 化简 ① $b\cdot|-b|$ ② $a+|a|$ ③ $|2x-4|-|x+1|$

[分析] $|a|$不能采用上面方法去掉绝对值符号，因为我们不知道a的符号究竟是正还是负？$|a|=a$是常见错误，应注意避免。由于我们不知道$-b$，a，$2x-4$，$x-1$的符号，因此解这类习题都必须进行讨论。

[解]

①
$$b\cdot|-b|=\begin{cases} b^2 & \text{当 } b>0 \text{ 时}(\because -b<0 \quad \therefore |-b|=b) \\ 0 & \text{当 } b=0 \text{ 时} \\ -b^2 & \text{当 } b<0 \text{ 时}(\because -b>0 \therefore |-b|=-b) \end{cases}$$

②
$$a+|a|=\begin{cases} 2a & \text{当 } a>0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } a=0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } a<0 \text{ 时} \end{cases}$$

③ $|2x-4|-|x+1|$

$$=\begin{cases} \text{当 } x\geqslant 2 \text{ 时} & 2x-4-(x+1)=x-5 \\ \text{当 } -1\leqslant x<2 \text{ 时} & -(2x-4)-(x+1)=-3x+3 \\ \text{当 } x<-1 \text{ 时} & -(2x-4)+(x+1)=-x+5 \end{cases}$$

[说明] 有些学生不知道怎样分情况讨论，上面三种不同情况是怎样确定的?这是解题的一个难点。其实，$2x-4$为正数或负数的"分界数"是2，$x+1$的"分界数"为-1。-1和2把数轴切成$x<-1$，$-1\leqslant x<2$，$x\geqslant 2$三段，按这三种情况解题即可。因此，解这类习题的步骤是，先确定每一个绝对值的"分界数"，再把各"分界数"标在数轴上看数轴被分成几段，每一段就

是一种情况，最后按这几种情况，分别化简。去掉绝对值符号应严格按照定义进行。

利用有理数的绝对值是非负数，还可以解这样一类习题。

［例 4］ 已知$|-3a|+|7b-7|=0$，求$2a^2+3b^{100}$的值。

［解］ $\because |-3a|\geqslant 0$，$|7b-7|\geqslant 0$，而$|-3a|+|7b-7|=0$

$\therefore |-3a|=0$，且$|7b-7|=0$ 得$-3a=0, 7b-7=0$，

$\therefore \quad a=0,\ b=1$

$\therefore \quad 2a^2+3b^{100}=2\cdot 0^2+3.1^{100}=3$

3．有理数运算

进行有理数混合运算时，应注意：① 严格按照各运算法则进行演算，② 严格按照混合运算的顺序进行，③ 注意应用运算律使运算简便，④ 算式中若有分数、小数，一般把小数化成分数，⑤ 只有乘除混合运算时，先把除化为乘，使之成连乘积形式，若有带分数，一般把其化为假分数。

［例 5］ $3\frac{1}{7}\times\left(3\frac{1}{7}-7\frac{1}{3}\right)\times\frac{7}{22}\div 1\frac{1}{21}$

$=\frac{22}{7}\times\left(\frac{22}{7}-\frac{22}{3}\right)\times\frac{7}{22}\times\frac{21}{22}$（除化为乘，带分数化为假分数）

$=\left(\frac{22}{7}\times\frac{7}{22}\right)\left(\frac{22}{7}-\frac{22}{3}\right)\times\frac{21}{22}$（乘法交换律与结合律）

$=\frac{22}{7}\times\frac{21}{22}-\frac{22}{3}\times\frac{21}{22}=3-7=-4$

［例 6］ $15\frac{3}{5}\left[\left(-1\frac{1}{13}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{25}{26}\right)\times 1\frac{1}{3}-\frac{7}{78}\right]$

$=\frac{78}{5}\left[-\frac{14}{13}\times\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{25}{26}\right)\times\frac{4}{3}-\frac{7}{78}\right]$

$=\frac{78}{5}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{5}{3}+\frac{78}{5}\cdot\left(-\frac{25}{26}\right)\times\frac{4}{3}+\frac{78}{5}\times\left(-\frac{7}{78}\right)$

$$=28+(-20)+\left(-\frac{7}{5}\right)=6\frac{3}{5}$$

注意到$15\frac{3}{5}$化为$\frac{78}{5}$，78 恰为括号内各项分母的最小公倍数，故采用乘法对加法分配律，使计算简便。

（三）练　　习

1. 回答下列问题

（1）水位上升$7\frac{1}{2}$厘米，下降$5\frac{1}{3}$厘米，怎样表示？

（2）产量增加 10 万斤，减少 1 万斤，分别应如何表示？

（3）某时刻的室温是 5℃，下降 8℃ 后是几度呢？

（4）某时刻的室温是 5℃，下降 5℃ 后是几度呢？

2. 回答下列问题

（1）请你写出正整数，负整数，正分数，负分数各四个。

（2）什么是中性数？它有几个？

（3）把下列各数填在相应的集合圈里（只需填上序号就可以了，见表 1。）

表 1

序	1	2	3	4	5	6
数	48.8	-8	$5\frac{1}{4}$	9	0	3.1416
序	7	8	9	10	11	12
数	$-6\frac{1}{3}$	360	$24\frac{2}{3}$	0.7	-88.8	0.0002

整　数　　　　分　数　　　　正　数