21世纪高等学校教材

王顺凤 潘闻天 杨兴东 编著

高等数学

GAODENGSHUXUE

（下册）

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高　等　数　学

下册

王顺凤　潘闻天　杨兴东　编著

东 南 大 学 出 版 社
·南 京·

内容提要

本书将高等数学与复变函数两门课程有机地融合在一起，采用了单循环模式.上册包括函数、空间解析几何、极限、连续性、微分学；下册包括积分学、无穷级数与常微分方程.本书结构紧凑，叙述浅显易懂，例题较多，每节后附有基础练习题与作业题，每章后附有补充题，在保证教学基本要求的前提下，拓宽了适应面.书中打“*”号的内容不作为教学基本要求，可供专业要求较高的院校选择使用或参考.

本书可以作为高等院校理、工科(非数学专业)各专业的高等数学教材使用，也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王顺凤，潘闻天，杨兴东编著.—南京：东南大学出版社，2004.8

ISBN 7-81089-673-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①王…②潘…③杨… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第084600号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编210096)

出版人：宋增民

江苏省新华书店经销 姜堰市晨光印刷有限公司

开本：700mm×1000mm 1/16 印张：51.75 字数：1014千

2005年2月第1版 2005年2月第1次印刷

定价：59.00元(上、下册)

前　言

本教材是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试理、工类数学考试大纲和南京信息工程大学理、工科高等数学教学大纲，并结合近年来南京信息工程大学高等数学课程教学改革实践而编写的。主要有如下特点：

(1) 结合理、工科本科专业对数学的整体要求，对高等数学的教学内容进行了整合和改革，使全书内容更加紧凑，便于学时控制。

(2) 将复变函数的内容融入到高等数学中，既强调了各自内容的独立性，又注意到两者在处理问题方法上的相通性。在不提高教学要求和学习难度的基础上，使学生对微积分的内容有更高层次的理解。

(3) 对基本概念及重要理论、方法，尽可能介绍其几何意义或物理背景，使学生容易接受并加深理解。力求正确处理直观与抽象、实践与理论的关系，渗透数学建模的思想，以增强学生应用数学知识解决实际问题的能力。

(4) 本书例题丰富，安排从易到难、由浅入深，以适合各类读者的要求。

本书分上、下两册。上册包括基础知识、空间解析几何与一元、多元实函数与复函数的微分学及其应用，下册包括一元、多元实函数与复函数的积分学及其应用、无穷级数、常微分方程。

本书上册由王顺凤、潘闻天老师编写，下册由潘闻天、王顺凤、杨兴东老师编写，全书由王顺凤老师统稿。

感谢南京信息工程大学教务处、数学系领导和广大教师对本书编写的大力支持和鼓励。数学系徐晶、吴亚娟、朱凤琴、陈丽娟等老师对本教材的编写提出了许多有益的意见和建议，并和官元红、符美芬、成荣等老师一起做了大量的校对工作，在此，我们表示衷心的感谢。同时感谢东南大学出版社领导和有关编辑在本书出版过程中给予的支持和帮助，对他们负责、敬业的精神表示我们由衷的敬意。

限于时间和编者水平，错漏、不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2004 年 8 月

目　录

第 8 章　不定积分

8.1　原函数与不定积分

8.1.1　原函数概念及其性质

在许多科学技术问题中，不仅需要计算已知函数的导数，有时还要由已知一个函数的导函数，还原出这个函数. 例如从直线运动的运动方程 $s = s(t)$，求导可得出速度 $v = \dfrac{ds}{dt}$，还可以再求出加速度 $a = \dfrac{dv}{dt}$，但在实践中，有时需要解决反面的问题：已知加速度 a 与时间 t 的关系 $a = a(t)$，要求速度 v 与 t 的关系，进而要求位移 s 与 t 的关系. 也就是说，要求由已知函数 $a = a(t)$，还原出一个函数 $v = v(t)$，满足 $v'(t) = a(t)$，再由 $v = v(t)$，求一个函数 $s = s(t)$，使 $s'(t) = v(t)$.

定义 1　如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即 $F'(x) = f(x)$（或 $F(x)$ 的微分为 $f(x)dx$），则称在区间 I 上 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

例如，因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内，$(\sin x)' = \cos x$，故在 $(-\infty, +\infty)$ 内，$\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数；

又如，在 $x \in (1, +\infty)$ 内，$[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$，所以，在 $x \in (1, +\infty)$ 时，$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 是 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 的一个原函数.

由定义，容易推出原函数有以下性质：

性质 1　若在区间 I 内，$f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则对任何常数 C，$F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数.

由 $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$，即得上述结论.

性质 2　若 $F(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两个原函数，则

$$F(x) - \varphi(x) = C(\text{常数})$$

因为在 I 上，$[F(x) - \varphi(x)]' = F'(x) - \varphi'(x) = f(x) - f(x) = 0$，由微分中值定理知

$$F(x)-\varphi(x)=C$$

由上述性质可知，若 $f(x)$ 存在原函数，则必有无穷多个原函数，但任意两个原函数之差必为常数；换言之，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，则 $f(x)$ 的全体原函数的集合可表示为 $\{F(x)+C \mid C$ 为任意常数$\}$.

8.1.2　不定积分概念

定义 2　在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$. 其中，记号"$\int$"称为积分号；$f(x)$ 称为被积函数；$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式；x 称为积分变量.

由原函数性质知，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C \qquad (C\text{ 为任意常数})$$

例 1　求 $\int x\mathrm{d}x \quad (x\in(-\infty,+\infty))$.

解　因为 $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$，所以 $\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C$.

例 2　求 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \quad (x\neq 0)$.

解　当 $x>0$ 时，由于 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$$

当 $x<0$ 时，由于 $[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$，所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C$$

综上可得

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$$

不定积分的几何意义：设

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

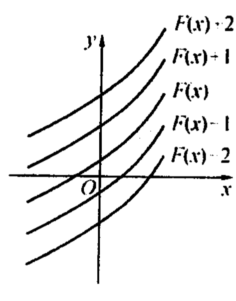

图 8-1

则 $F(x)$ 的导数 $f(x)$ 是曲线 $y=F(x)$ 的切线的斜率，$f(x)$ 也是曲线 $y=F(x)+C$ 的切线的斜率，因此，如果 $y=F(x)$ 是要找的曲线之一，则只需把它沿 Oy 轴方向上下平移，便可得到所有的解. 这些曲线称为 $f(x)$ 的积分曲线(图 8-1).

不定积分的物理意义：设直线运动的加速度为 $a = a(t)$，则 $\int a(t)\mathrm{d}t$ 就表示运动的速度，在这个表达式中含有一个未定常数 C，如果已知 $v(t_0) = v_0$，可以用它确定式中常数 C 的值，从而得到一个确定的速度函数 $v(t)$. 类似地，若已知直线运动的速度为 $v = v(t)$，则 $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = s_1(t) + C$ 表示运动的位移，如果已知 $s(t_0) = s_0$，将它代入可确定 C 的值，从而求出位移随时间 t 的变化规律.

例 3　质点以速度 v_0 铅直上抛，不计阻力，求它的运动方程.

解　如图 8-2 所示，把质点所在的铅直线作为坐标轴，正向朝上，轴与地面的交点取作坐标原点 O.

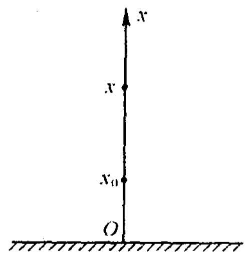

图 8-2

设质点抛出的时刻为 $t = 0$，当 $t = 0$ 时质点所在位置的坐标为 x_0，在时刻 t 时，质点位于 x，则 $x = x(t)$ 就是所要求的函数.

由导数的物理意义知

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t), \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(t)$$

按题意，$a(t) = -g$，即 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g$，则

$$v(t) = \int(-g)\mathrm{d}t = -gt + C_1$$

由 $v(0) = v_0$，得 $C_1 = v_0$，故 $v(t) = -gt + v_0$，

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int(-gt + v_0)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2$$

由 $x(0) = x_0$，得 $C_2 = x_0$，于是，

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0 \qquad (t \in [0, T])$$

其中，T 表示质点回落到地面的时刻.

最后把本节所叙述的 $F(x)$ 的导函数 $f(x)$，即 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 之间的关系用公式表达为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x) \quad \text{或} \quad \mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad \text{或} \quad \int \mathrm{d}[F(x)] = F(x) + C$$

可见,微分运算(以记号“d”表示)与积分运算(以记号“$\int$”表示)互为逆运算.

习题 8.1

作业题

1. 验证$\frac{1}{2}e^{2x}$,$e^x\sinh x$,$e^x\cosh x$ 都是 e^{2x} 的原函数.

2. 曲线通过点$(e^2,3)$,且曲线上任一点的切线的斜率等于切点的横坐标的倒数,求此曲线的方程.

3. 质点由静止开始作直线运动,t 秒后的速度为 $3t^2$ 米 / 秒,问:

(1) 3 秒后离出发点多远?

(2) 走完 360 米需多少时间?

4. 求函数 $f(x)=5x^2$ 的通过点$(\sqrt{3},5\sqrt{3})$ 的积分曲线.

5. 试证函数 $F(x)=(e^x+e^{-x})^2$ 与 $G(x)=(e^x-e^{-x})^2$ 是同一函数的原函数.

6. 设炮弹发射的倾角为 α,初速度为 V_0,求弹道曲线的方程(不计空气阻力).

8.2 不定积分计算

8.2.1 基本积分表

由不定积分定义及求导公式,可得以下不定积分公式,这些公式是不定积分计算的基础.

(1) $\int 0\mathrm{d}x=C$

(2) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$

(3) $\int x^\mu\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C \quad (\mu\neq -1)$

(4) $\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \ln x + C & (x>0) \\ \ln(-x)+C & (x<0) \end{cases} = \ln|x|+C$

(5) $\int e^x dx = e^x + C$

(6) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(8) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(9) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(10) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 dx = -\cot x + C$

(11) $\int \sec x \cdot \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \sec x + C$

(12) $\int \csc x \cdot \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\csc x + C$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

(14) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

(15) $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

(16) $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

8.2.2 分项积分法

定理1 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都存在原函数,则

$$\int[k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1\int f(x)dx + k_2\int g(x)dx$$

其中,k_1,k_2 是常数.

证 由于

$$\begin{aligned}
&[k_1\int f(x)dx + k_2\int g(x)dx]' \\
&= k_1[\int f(x)dx]' + k_2[\int g(x)dx]' \\
&= k_1 f(x) + k_2 g(x)
\end{aligned}$$