高中数学40个专题分析

原春信　张世温　史海涌　编著

（上册）

高中数学40个专题分析

主编　原春信　张世温
史海涌

山西教育出版社

高中数学40个专题分析（上册）

主编：原春信　张世温　史海涵

·

山西教育出版社（太原并州北路11号）

山西新华印刷厂印刷　山西省新华书店发行

·

开本：787×1092 1/32 印张：12.875 字数：280千字

1991年5月第1版　1991年5月山西第1次印刷

印数：1—6,500册

·

ISBN 7—80578—377—2

G·371　定价：4.30元

前　言

对数学某方面的知识和内容，如何加以完整而准确的理解；一道数学题，究竟从何处入手分析，才能达到正确而快速解题的目的，这常常是中学生苦苦思索的一个问题，也是力求掌握的一种技能。我们山西省康杰中学数学教研组组织编写了《高中数学40个专题分析》一书（该书分上、下两册），可以使高中生在这方面获得启发和帮助。

本书根据数学教学大纲，将高中数学主要内容分成四十个专题，每个专题在基础知识、基本技能和解题能力诸方面都进行一番探讨和研究，找出规律性的东西，融会在本书内容之中。例题和习题的编排由易到难，各具特点，代表性强，能收到解一题而触类旁通，举一反三的效果。专题后配有习题答案与提示，供高中学生复习时参考。本书对高中教师也有一定的参考价值。

原春信、张世温、史海涌、李永福、陈百年、任向阳、卫会民、贺云生、李良、史庚林同志参加了此书的编写工作。山西省教育学院数学系副教授刘作斌对全书作了审定。

由于水平有限，本书难免有错漏不足之处恳请广大师生批评指正。

编　者

1990年12月

目　录

一、集 合 初 谈

一、集合的概念

集合，是指具有某种属性的对象的全体，集合里的各个对象叫做这个集合的元素。

（1）集合中的元素有如下三个特征。

确定性：对于任何一个对象，都能确定它是不是某一给定集合的元素。

（2）互异性：一个给定集合中所含的任何两个元素都是不同的对象。即集合里的元素没有重复现象。

（3）无序性：对于一个集合，通常不考虑元素之间的顺序。

集合表示法有

（1）把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，称列举法。

（2）把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，称描述法。

二、集合的子集、交集、并集和补集

（1）子集：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作：$A\subseteq B$或$B\supseteq A$

如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作：$A\subset B$，或$B\supset A$。

对于两个集合A、B，如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，则集合A与集合B叫做相等，记作，$A=B$

任何集合是它本身的子集；空集是任何集合的子集；空集是任何非空集合的真子集。

对于集合A、B、C。

①如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$

②如果$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$

（2）交集：由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A、B的交集，记作，$A\cap B$，即$A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$

对于任何集合A、B有：

$A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cap B=B\cap A$。

（3）并集：由所有属于A或属于B的元素所组成的集合，叫做A、B的并集，记作：$A\cup B$即，$A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$

对于任何集合A、B有：

$A\cup A=A$，$A\cup\phi=A$，$A\cup B=B\cup A$

（4）补集：在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，用符号I表示，也就是说，全集含有所要研究的各个集合的全部元素。

已知全集I，集合$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\overline{A}$，即，$\overline{A}=\{x|x\in I$，且$x\notin A\}$。

对于任何集合A，有

$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$，$\overline{\overline{A}}=A$，

三、常用的几个公式

(1) 对于任何三个集合A、B、C有

①$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

②$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

③$(A\cup B)\cap A=A$

  $(A\cap B)\cup A=A$

(2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(3) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

四、举例

例1 用适当的符号($\in$, $\notin$, $=$, $\supseteq$, $\subseteq$, $\supset$, $\subset$)填空:

a ____ $\{a\}$, a ____ $\{a, b, c\}$, d ____ $\{a, b, c\}$, $\{a\}$ $\underline{\subset}$ $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$ ____ $\{b, a\}$, $\{3, 5\}$ ____ $\{1, 3, 5\}$ ϕ ____ $\{1, 2, 3\}$, $A\cap B$ ____ A, $A\cap B$ ____ $B\cap A$, A ____ $A\cap B$, ϕ ____ $B\cap A$.

解 分别依次填:$\in$, $\in$, $\notin$, $\subset$, $=$, $\subset$, $\subset$, $\subseteq$, $=$, $\supseteq$, $\subseteq$.

例2 写出集合$\{a, b, c\}$的

(1) 所有子集,(2) 含有元素a的真子集,

(3) 不含a的非空子集.

解 (1) $\{a, b, c\}$的所有子集有:ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, $\{a, b, c\}$

(2) $\{a, b, c\}$中含有a的真子集有:$\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$

(3) $\{a, b, c\}$不含a的非空子集有:$\{b\}$, $\{c\}$, $\{b, c\}$

例3 已知：$A=\{x|\ x=3n,\ \frac{n}{2}\in N\}$，$B=\{y\ |y=m,$

$m\in N\quad \frac{24}{m}\in N\}$

求：$A\cap B$，$\overline{A}\cap B$

解 $A\cap B=\{6,\ 12,\ 24\}$

$\overline{A}\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8\}$

例4 已知：$A=\{x|\ x=-t^2,\ t\in R\}$，$B=\{x\ |x=3+|t|,\ t\in R\}$，$I=R$，求，$\overline{A\cup B}$

解 由题设条件得：$A=\{x|\ x\leqslant 0\}$，$B=\{x\ |x\geqslant 3\}$，

$\therefore\quad \overline{A\cup B}=\{x|\ 0<x<3\}$.

例5 已知函数$f(x)=x^2+ax+b(a,b\in R)$而$A=\{x|\ x=f(x)$，且$x\in R\}$，$B=\{x|\ x=f[f(x)]$，$x\in R\}$，

（1）求证：$A\subseteq B$

（2）当$A=\{-1,\ 3\}$时，求B.

（1）**证明** 设$x\in A$，则$x\in R$，且$x=f(x)$，$f[f(x)]=f(x)=x$，$\therefore\quad x\in B$，故$A\subseteq B$

（2）$\because\quad A=\{-1,3\}$，代入$x=f(x)$中，解得：$a=-1$，$b=-3$，$\therefore\quad f(x)=x^2-x-3$，而$f[f(x)]=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$，整理因式分解得：$(x^2-3)(x^2-2x-3)=0$，解得：$x=3$，$-1$，$\pm\sqrt{3}$，$\therefore\quad B=\{-\sqrt{3},-1\ \sqrt{3},\ 3\}$

例6 某地有甲、乙两电视台，某日在560名观众中作调查，知兼收看两台的观众人数与甲台观众人数及乙台观众的人数是1∶2∶3的比例，求在此调查中分别看甲台与乙台的人数

各是多少人？

解 设$n(A\cap B)=K$，则$n(A)=2K$，$n(B)=3K$，由公式：$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\therefore$ $2K+3K-K=560$，解得$K=140$

$\therefore$ $n(A)=280$，$n(B)=420$

故看甲、乙两台的人数各是280人，420人。

例7 已知集合$M=\{x, xy, \lg xy\}$，$N=\{0, |x|, y\}$，且$M=N$，求x，y的值。

分析 由$M=N$及$0\in N$知$0\in M$，但$x\neq 0$ 且 $y\neq 0$，故只有lgxg$=0$，$\therefore$ $xy=1$，又$xy\in M$，$\therefore$ $1\in N$，当$x=y=1$时，M与N中都有两个相同的元素，不可能，$\therefore$ 只有$x=y=-1$。

解 略。

例8 已知集合$M=\{x\,|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$N=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$P=\{x|\ x^2+x-6=0\}$，且$M\cap N\supset\phi$，$M\cap P=\phi$，求$a$的值。

解 由条件可得：$N=\{2, 3\}$，$P=\{2, -3\}$，

$\because$ $M\cap N\supset\phi$，$\therefore$ 2，3中至少有一个属于M，但$M\cap P=\phi$ $\therefore$ $2\notin M$ $\therefore$ 只有$3\in M$将$x=3$代入$x^2-ax+a^2-19=0$中得$a=5$或$a=-2$

当$a=5$时，$M=\{2, 3\}$这与$M\cap P=\phi$矛盾，

$\therefore$ $a=-2$。

例9 设集合$A=\{x|\ x=n^2+2, n\in N\}$，集合$B=\{y|\ y=n^2-2n+3, n\in N\}$，求证：$A\subset B$

证明 设$x_0\in A$，则 $x_0=n_0^2+2=(n_0+1)^2-2(n_0+1)+3$，$\because$ $n_0\in N$ $\therefore$ $n_0+1\in N$，$\therefore$ $x_0\in B$ 由子集的定

义 $A\subseteq B$

又∵ $n=1$时，$y=2$，即$2\in B$，但由于A的元素 $x=n^2+2>2$，∴ $2\notin A$，故$A\subset B$

例10 已知正整数集合$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2\}$，其中 $a_1<a_2<a_3<a_4$，$A\cap B=\{a_1,a_4\}$，且$a_1+a_4=10$，$A\cup B$中所有元素之和为124。

(1) 求a_1和a_4的值。 (2) 求集合A。

解 (1) 由于a_1、$a_4\in B$，∴ a_1，a_4都是自然数的平方数，又∵ $a_1+a_4=10$，$a_1<a_4$，可判定$a_1=1$，$a_4=9$。

(2) 由(1)知$B=\{1, a_2^2, a_3^2, 9^2\}$，又∵ $a_4=9$，则a_2与a_3中必有一个是3，再从$A\cup B$中所有元素和为124，即$a_2+a_3+1+a_2^2+a_3^2+9^2=124$得：$a_2+a_3+a_2^2+a_3^2=42$

若$a_3=3$，代入上式$a_2=5$，这与$a_2<a_3$矛盾，故应有$a_2=3$，代入上式$a_3=5$。

∴ $A=\{1, 3, 5, 9\}$

例11 已知直角坐标平面内的点集$A=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant1\}$，$B_m=\left\{(x, y)\,|\,y=\frac{1}{2}(x-m)^2+m+\frac{3}{2}\right\}$，$m\in R$，设集合$B$是所有集合$B_m(m\in R)$的并集，求$A\cap B$之面积。

解 由B_m知：$y=\frac{1}{2}(x-m)^2+m+\frac{3}{2}$，$m\in R$ 即，

$m^2+2(1-x)m+x^2-2y+3=0$

∴ $\Delta=4(1-x)^2-4(x^2-2y+3)\geqslant0$，化简得 $y\geqslant x+1$，∴ $B=\{(x, y)\,|y\geqslant x+1\}$

又由集合的元素所表示的区域，可得 $A\cap B$ 的点表示单

位园中一弓形，可得面积为$\frac{1}{4}(\pi-2)$

习　题　一

1．设$I=\{0,1,2,3,4,5\}$，$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{0\}$，指出下列式子是否正确？不正确请改正确．

(1) $0\in A$，(2) $\{0\}\in A$，(3) $\{0\}\subset A$，(4) $0\in C$，(5) $B\subset A$，(6) $\phi\in A$，(7) $\phi\subset B$，(8) $\phi\in C$，(9) $\overline{A}\in\overline{B}$，(10) $C\subset\overline{B}$，(11) $A\cup B=A$，(12) $A\cap C=C$．

2．已知方程$2x^2-px+q=0$的解集是A，方程：$6x^2+(p+2)x+5+q=0$的解集是B，又$A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，求$A\cup B$．

$\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},-4\right\}$

3．已知：$A=\{x\,|x^2\geqslant4,\ x\in R\}$，$B=\{x|\ \frac{6-x}{1+x}\geqslant0,\ x\in R\}$，$C=\{x|\ |x-3|<3,\ x\in R\}$，$I=R$，求，$A\cap\overline{(B\cap C)}$．　$x\geq6$　$x\leq2$

1,2,3,4,5

4．设$I=\{$最小的5个自然数$\}$，　$A=\{x|\ \lg x+\lg(x-3)=\lg2\}$，$B=\{x|\ x^2-4x+3\leqslant0,\ x\in Z\}$．

(1) 求$\overline{A}\cap B$，　　(2) 求$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$

(3) 求$(A\cap\overline{B})\cap A$

5．选择题：

(1) 数0与空集ϕ的关系是(D)

(A) $0=\phi$，(B) $0\in\phi$，(C) $0\subset\phi$，(D) $0\notin\phi$

（2）方程组$\begin{cases}x+y=5\\3x-4y=-6\end{cases}$的解集是（ C ）

（A）$\{2,\ 3\}$，（B）$\{x=2,\ y=3\}$，（C）$\{(2,\ 3)\}$，

（D）以上答案都不对。

（3）设A＝{有理数}，B＝{无理数}，则$A\cap B$为 D

（A）$\{0\}$，（B）{空集}，（C）$\{\phi\}$，（D）ϕ。

（4）设集合$A=\{x|\ x=\cos\frac{5m\pi}{12},\ m\in N\}$，$B=\{y|\ y=\cos\frac{n}{12}\pi,\ n\in N\}$，则$A$、$B$关系是（ A ）

（A）$A\subset B$，（B）$B\subset A$，（C）$A=B$，

（D）$A\cap B=\phi$。

（5）设A、B是非空集合，且$A\subset B$，I为全集，则下列集合中为空集的是（ D ）

（A）$A\cap B$，（B）$\overline{A}\cap B$，（C）$A\cap\overline{B}$，

（D）$\overline{A}\cap\overline{B}$。

（6）$A\cup B=A\cup C$的必要条件是（ A ）

（A）$B=C$，（B）$A\cap B=A\cap C$，

（C）$A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$，（D）$\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$。

6．设全集$I=\{1,\ 4,\ m^2-m\}$，$A=\{4,\ |m-2|\}$，$\overline{A}=\{6\}$，求实数m的值。

7．设全集$I=\{(x,\ y)|\ x\in R,\ y\in R\}$，$A=\{(x,\ y)|\log_x y=1\}$，$B=\{(x,\ y)|\ y=x\}$，求$\overline{A}\cap B$

8．设$A=\{(x,\ y)|\ (x-y)^2\leqslant 1\}$，$B=\{(x,\ y)|\ x^2+y^2\leqslant 1\}$，求$A\cap B$的面积。

二、函数方程的一般解法

我们经常碰到这样一类等式，$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$，$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$，$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$……。象这种含有未知函数的等式叫做函数方程。若一个函数$f(x)$对于自变量x在其定义域内的所有值均满足已知的函数方程，则$f(x)$就叫做此函数方程的解。求函数方程的所有解（即$f(x)$的解析式）或证明函数方程无解的过程叫做解函数方程。

有关函数方程的问题大致有推证函数方程中的函数的性质和解函数方程两个类型。下面仅采用几种初等数学方法解一些比较简单的函数方程。

一、观察法

例1 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$ $g\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$

求：$f(x)$，$g(x)$的解析式。

解 $\because$ $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$

3

$$-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$\therefore\quad f(x)=x^3-3x$

$\because\quad g\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

$-\frac{1+x}{x}+1$

$\therefore\quad g(x)=x^2-x+1$

说明 从此例可以看出，观察法主要是将函数方程中的解析式凑成函数符号下的式子关系，然后将此式子用自变量x代换式，所以观察法要求必须具备较强的变形能力.

例2 已知$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$ 且 $f(0)=0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. 求$f(x)$的一个表达式.

解 $\because\quad \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$

且$\sin 0=0\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

$\therefore\quad f(x)=\sin x$.

说明 类比正弦函数的化积公式为正弦函数在0和$\frac{\pi}{2}$的函数值，便可得出答案. 所以观察法还要求具有一定的类比联想的能力.

二、代换法

例3 已知$f\left(\frac{x+5}{2}\right)=x^2+3$. 求$f(x)$的解析式,

解 设$u=\frac{x+5}{2}$，则$x=2u-5$

将$x=2u-5$代入得

$$f(u)=(2u-5)^2+3=4u^2-20u+25+3=4u^2+20u+28$$

$$\therefore\quad f(x)=4x^2-20x+28$$

说明 可以看出这种代换法的基本思路是将函数符号内的式子用一个字母代换，解出自变量x，将x的表达式又代入原函数方程，从而得出$f(x)$的表达式，我们把这种代换称为第一类代换。

例4 函数$f(x)$满足$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$（$a$，$b$，$c$为常数，且均不为零，$a^2-b^2\neq 0$）。求$f(x)$的表达式。

解 假设存在满足方程的函数$f(x)$，考虑到f下的变量间存在着互倒关系，故作代换：

$x\longrightarrow\frac{1}{x}$，得$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=c\cdot\frac{1}{x}$

解方程组$\begin{cases}af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=c\cdot\frac{1}{x}\\ af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx\end{cases}$

得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(acx-\frac{bc}{x}\right)$

经检验$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(acx-\frac{bc}{x}\right)$是原方程的一个解

注： 这里的检验是解函数方程的一个有机组成部分，因为求$f(x)$时，首先假定了方程存在解$f(x)$，这样求出的

$f(x)$只满足必要性，即只有原方程有解，求出的$f(x)$才是原方程的解，若原方程无解，则求出的$f(x)$并不是原方程的解，因此要检验充分性。

例5 解函数方程 $xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$。

解 假设存在满足已知方程的函数 $f(x)$，作代换 $x\longrightarrow\frac{x-1}{x+1}$，得，

$$\frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=1$$

这里，除了$f(x)$和 $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$之外，又出现了新的“未知”式 $f\left(-\frac{1}{x}\right)$。

于是，再对原式作代换 $x\longrightarrow-\frac{1}{x}$，得

$$-\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right)+2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=1$$

这里除了$f\left(-\frac{1}{x}\right)$外，又出现了“不受欢迎”的未知式 $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$