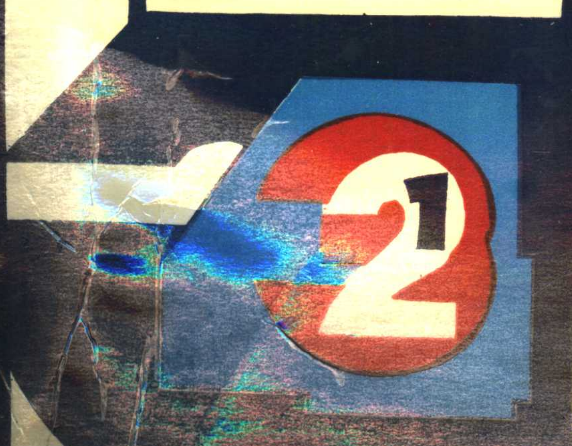
ZHONG XUE SHU XUE ZONG
HE TI DE JIE FA FA XIAN

中学数学综合题的解法发现

过伯祥　杨象富著

江苏教育出版社



中学数学综合题的解法发现

过伯祥　杨象富　　编著

江 苏 教 育 出 版 社

中学数学综合题的解法发现

过伯祥　杨象富　编著

江 苏 教 育 出 版 社 出 版

江苏省新华书店发行　　淮阴新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 9.25　字数194,000

1988 年 3 月第 1 版　1988 年 3 月第 1 次印刷

印数 1-25,750 册

ISBN 7-5343-0358-3/G·336

定价：1.90 元（贴塑）

责任编辑　王建军

序

苏联教育家加里宁说过："数学是思维的体操。"这确是至理名言。学好数学，能使思维敏捷、清晰、精细。据闻外国企业家请数学系毕业生去管理工厂时这样说："我需要的是你的数学脑袋，而不仅是你的数学知识。"这又从一个侧面说明数学对思维发展的重要作用。心理学家的研究表明，各种竞赛中，只有数学竞赛和物理竞赛，几乎是思维能力和思维的灵敏性起决定的作用，课外补充的知识(例如熟悉微积分)，往往占不了多少便宜。遗憾的是，作为"思维体操"教练的数学家和数学教师，至今仍不大清楚数学的训练价值究竟在何处，其思维规律是什么。至于这套"体操"应有哪几节，该如何去做，更是模模糊糊。流行的办法是"大运动量"训练，认为做题千万，奥妙自得，无须问什么规律。这当然谈不上科学性，"熟读唐诗三百首，不会做诗也会吟"，乃是找不到"规律性"时不得已而为之的，时至今日，似乎已到了大力研究数学思维的规律，科学地设计"思维体操"的时候了。我国著名数学家华罗庚先生、苏步青先生等在这方面做了许多开拓性的工作，为我们树立了榜样。

摆在案上的《中学数学综合题的解法发现》一书，是过伯祥、杨象富两位先生精心之作。他们也是有志研究数学思维的拓荒者。据我看，这项研究已取得相当成绩。它没有某些思维科学研究文章中那些古怪难懂的术语，也不象有些数学

解题书籍只管杂乱堆砌，而是用“念头”、“思路”、“试探”、“引伸”等写法把千变万化的解题路子梳理成若干条清晰的解题思维规律，编织成一张中学数学解题思维之网。世界数学名家波利亚(G.Polya)曾写道：“人们力图这样去理解一切：将孤立的和有关的事实作对照；将新的发现和熟知的知识相联系；不习惯的与习惯的相类比；特殊的结论推广到一般，一般的结论给予适当的特殊化；复杂情况分解为一些部分；通过概括从细节窥知全貌。”波利亚精心选择、编排和研究数学分析的问题，写成盖世名著《数学分析中的问题和定理》。过、杨两位先生写作本书，似乎也是沿着这条路子在走的。“借透彻分析例题阐发思想方法，用思维规律启示引导解题过程”，我想这是本书比“题型分类”、“罗列解答”等常见做法较高一筹之处。“文章千古事，得失寸心知”，作者用心良苦，总是期望有所建树，至于效果如何，当然得由读者来裁定了。

数学思维规律的探索，乃是造福于整个人类乃至子孙后代的重大研究课题，现在恐还处于襁褓时期，本书付梓在即，因对过伯祥、杨象富先生的尝试寄予厚望，遂为之序。

张奠宙

1987年春节于华东师大

编者的话

这是一本有独特风格的中学数学综合题集。其侧重点完全放在问题的解法发现与研究上，旨在开拓读者的思维，发展他们的探索发现能力与研究一个问题的能力。

本书遵照笛卡尔、波利亚、波普尔等科学大师的方法论思想编著。对每个例题通过合乎本书规范的分析方法，都自然地提出了多个引导问题、变化问题、推广问题等，组成了一个问题系列。学完一题，不仅能使读者掌握这个例题的几种解法，也熟悉了相关的一批题目，并了解多个问题间的内在联系。

当前，关心中学数学教学的各方人士，都在摸索、探讨与研究如何让学生能从"题海"中求得部分解脱，以及能卓有成效地发展新一代的智能。本书是我们两人从事30多年中学数学教学一份浅陋的答卷，希冀对关心这场探讨的某些人士会有点启发。

限于编者水平，错漏不当之处，恐难幸免，切望老师、同学与海内外专家指教！

三十年来迷习题，
日琢夜磨穷析理；
不求机遇觅通径，
自成一统树桃李。

就以此作结。

编　者

1987年2月

目　　录

第一章　数学解题的思维过程

解题的思维过程，指的是探索思路，寻求解答的那个过程，大致就是波利亚所说的“弄清问题，拟定计划”的阶段．

解题的思维过程究竟应是什么样儿的才最为合适？许许多多人都在思考与研究这个大问题．

心理学家中间流行着如下两种模式：

1．解决问题的四阶段模式．

（1）准备——由问题情境的刺激引起多方面的联想，经过筛选，抛弃一些对解决问题无用的观念，逐渐辨明问题的特点，发现解题的头绪．

（2）孕育——如果问题较复杂，往往要经过或长或短时间的酝酿、搁置乃至多次反复．

（3）明朗——孕育之后，常因无意中遇到某种情境而受到启发，突然使解决问题的方向明朗起来．

（4）验证——明朗阶段所获得的解决办法，还需要经过实践的检验．如行不通，尚需重复上述过程．

2．范围渐趋缩小的汇综模式（K．邓克尔）．

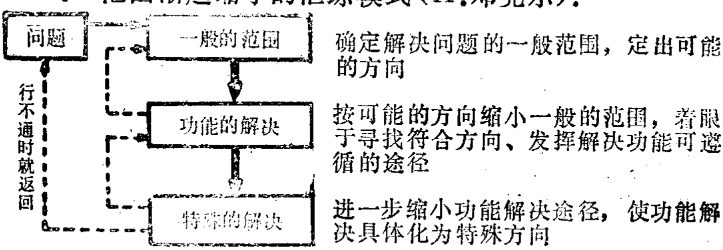


图 1-1

人工智能是研究如何用机器求解需要用人的智慧才能解决的问题的一门学问．它的基本问题是研究求解问题的基本方法．

人工智能专家认为，问题有三个最重要的特征，即状态、操作（行动）和目标．问题**状态**是指在问题所涉及的范围内，在解题过程的某一时刻成立的所有表达式．每一状态就相当于一个子问题．**操作**指的是允许你对已知表达式或过程中产生的新的表达式采取的行动，相当于数学中每类问题允许的运算与变换．**目标**则是人们希望使之在问题范围内成立的终点表达式，或是符合要求的终点状态．对一个问题的解答，就是一个操作指令的有序集合．状态图（图 1-2）是用来表示状态（通常用节点表示）和操作（通常用线段表示）之间的关系的，问题求解就是要找到一条从初始状态的节点通向目标状态的节点的径道．

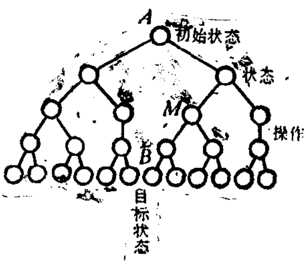


图 1-2

按照这种理论，问题解决的过程，就是搞清有哪些允许行动（允许的操作），并编制与搜索状态图的过程．

再来看一下，几位著名的数学家、心理学家与科学哲学家的主张：

苏联著名数学家 C.A. 雅诺夫斯卡娅对“解题是什么”的回答惊人的简单：“解题就是把习题归结为已经解过的问题．”就是说，要努力把非基本题分解成或归结为基本题．苏联心理学家鲁宾斯坦认为，“人们解题是一个改编习题的过程”．在

这个过程中，通过综合习题条件和要求之间的联系，对这些条件和要求进行不间断的分析，从而解题是一个分析、综合与概括的过程。

世界著名数学家波利亚指出，要构想出一个解题计划的思路，经常有用的办法是：不断地变换你的问题，“试验对问题作各种修改。我们必须一再地变化它……直到最后成功……”.因为问题之间本来就是千丝万缕联系着的，不断地变化试验，人们就可能“以更深入的理解来探索各种可能，通过自己的错误与缺点来学习”.在解决问题方面，人比动物干得好得多，就是因为人能“更聪明地变化他的问题的缘故。”

波利亚的著名的“怎样解题”表，拟出的就是能启引你不断地变换问题的一批问句与建议。概括他的思想，可以绘成如下的波利亚数学发现图式：

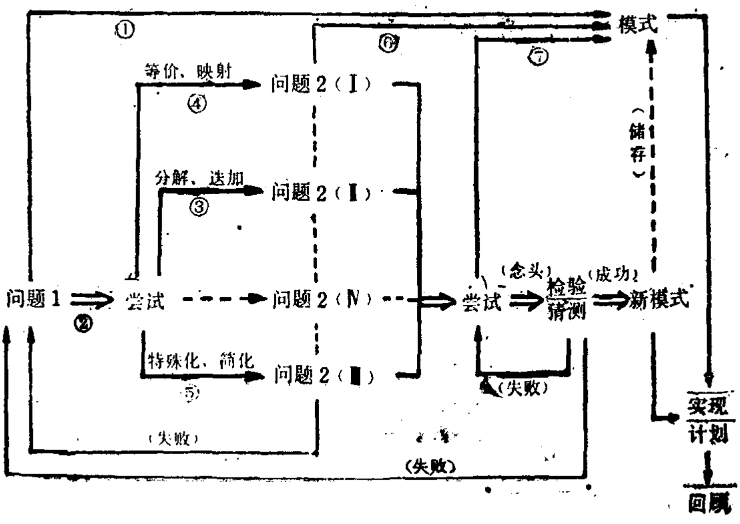
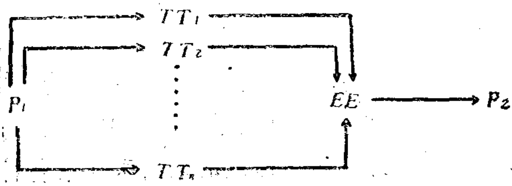


图 1-3

在当代科学哲学巨匠K·波普尔看来，发现的方法就是试错法，即猜测与反驳的学说。他在晚年，把自己半个世纪的研究工作，凝缩成如下的“四段图式”：



问题1 ⟶ n种猜测、假设、试探性的理论 ⟶ 验证消除错误 ⟶ 问题2

图 1-4

综上所述，解决数学问题的思维过程，可以认为就是不断地变换问题的过程，从而也是一种试错的过程。

下面，看两个典型范例。

【范例1】 已知 $a\cdot b=a-b=1$，

$$u_n=a^n-a^{n-1}b+a^{n-2}b^2-\cdots+(-1)^nb^n,$$

求证：$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$。

【信息、念头与思路】

1° 你的第一个念头可能是：条件中的 u_n 的表示式比较复杂，能化简它吗？

问题1 化简 $u_n=a^n-a^{n-1}b+a^{n-2}b^2-\cdots+(-1)^nb^n$。

$$\because\quad u_1=a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b},$$

$$u_2=a^2-ab+b^2=\frac{a^3+b^3}{a+b},$$

$$u_3=a^3-a^2b+ab^2-b^3=\frac{a^4-b^4}{a+b},$$

事实上，数列 a^n，$-a^{n-1}b$，$a^{n-2}b^2$，…，$(-1)^n b^n$ 是以 $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$为公比的等比数列，根据求和公式，得

$$u_n=\frac{a^{n+1}-(-1)^{n+1}b^{n+1}}{a+b}.$$

于是，本题就可转化为：

问题 2　已知 $a\cdot b=a-b=1$，求证：

$$a^{n+1}-(-b)^{n+1}=[a^n-(-b)^n]+[a^{n-1}-(-b)^{n-1}]\quad(n\geqslant 3).$$

2°　第二个念头：着眼于局部，认准要素，先作分析。先考察 a^n、a^{n-1}、a^{n-2} 之间及 b^n、b^{n-1}、b^{n-2} 之间的关系。问题归结为：

问题 3　已知 $a\cdot b=a-b=1$，试求

① a^n、a^{n-1}、a^{n-2} 之间的关系；

② b^n、b^{n-1}、b^{n-2} 之间的关系。　$(n\geqslant 3)$

为此，或作代换：$1=a\cdot b$，$1=a-b$；

或利用关系：　$a=1+b=\dfrac{1}{b}$，$b=a-1=\dfrac{1}{a}$。

有　$b^n=b^{n-1}(a-1)=ab^{n-1}-b^{n-1}=b^{n-2}-b^{n-1}$；

同样有　$a^n=a^{n-1}+a^{n-2}$。于是

$$\begin{aligned}
u_n&=a^n\ \vdots -a^{n-1}b\ \vdots+\cdots\ \vdots+(-1)^{n-2}a^2b^{n-2}\ \vdots+(-1)^{n-1}ab^{n-1}+(-1)^n b^n\\
u_{n-1}&=a^{n-1}\ \vdots -a^{n-2}b\ \vdots+\cdots\ \vdots+(-1)^{n-2}ab^{n-2}\ \vdots+(-1)^{n-1}b^{n-1}\\
u_{n-2}&=a^{n-2}\ \vdots -a^{n-3}b\ \vdots+\cdots\ \vdots+(-1)^{n-2}b^{n-2}\ \vdots
\end{aligned}$$

把右边按竖线分开的每三项相加，范例的结论即可得证。

3°　第三个念头：着眼于整体，先考察 u_k 与 u_{k-1} 之间有什么联系，即有下述问题：

问题 4　已知　$a\cdot b=a-b=1$,

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{n-k}b^k,$$

试求 u_n 与 u_{n-1} 之间的关系.　$(n\geqslant3)$

$\because$　$u_n=a[a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+(-1)^{n-1}b^{n-1}]+(-1)^n b^n$

即　$u_n=au_{n-1}+(-1)^n b^n$,

同理　$u_{n-1}=au_{n-2}+(-1)^{n-1}b^{n-1}$.

利用 $a\cdot b=a-b=1$, 消去上面两式中的 a、b, 也可证得原范例.（作为一种变形练习，建议读者完成之）

4°　第四个念头：求证式中左、右两边关于字母 a、b 的幂次数不等，这个信息能利用吗？

条件表明，u_n 为 n 次齐次式，而 u_{n-1}, u_{n-2} 分别为 $(n-1)$ 次，$(n-2)$ 次的齐次式。要证 $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$, 从左到右，幂次数依次下降了一次、二次. 联想已知条件 $ab=a-b=1$ 中，$a-b$ 与 ab 正好是一次式与二次式，抓住这一重要信息，利用“同次化”的思想，我们就可尝试性地提出：

问题 5　已知 $a\cdot b=a-b=1$,

$$u_n=a^n-a^{n-1}b+a^{n-2}b^2-\cdots+(-1)^n b^n,$$

试问 $(a-b)u_{n-1}+ab\cdot u_{n-2}=u_n$ 成立吗？

推证是容易的，但这个猜想是大胆的，需要以丰富的经验为基础！

5°　利用 $a\cdot b=1$, 可以令 $a=\operatorname{tg}\alpha$, $b=\operatorname{ctg}\alpha$. 这样就减少了参变量，原题化成了如下的三角问题.

问题 6　已知 $\operatorname{tg}^2\alpha=1+\operatorname{tg}\alpha$, $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\operatorname{tg}^{n-2k}\alpha$,

求证：$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$　$(n\geqslant3)$.

只要注意到

$$u_n = \mathrm{tg}^n\alpha - \mathrm{tg}^{n-2}\alpha + \mathrm{tg}^{n-4}\alpha - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{tg}^{2-n}\alpha + (-1)^n\mathrm{tg}^{-n}\alpha,$$

$$u_{n-1} = \mathrm{tg}^{n-1}\alpha - \mathrm{tg}^{n-3}\alpha + \mathrm{tg}^{n-5}\alpha - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{tg}^{1-n}\alpha$$

$$u_{n-2} = \mathrm{tg}^{n-2}\alpha - \mathrm{tg}^{n-4}\alpha + \mathrm{tg}^{n-6}\alpha - \cdots$$

是容易证明的．

【余味与引申】

1° 可以赋 a、b 以一定的几何意义，如：

习题 1 直径为 AB 的半圆内，内接一个边长为 1 的正方形 $CDEF$，C、D 在 AB 上，令 $AC=b$，$CB=a$，且 $u_n = a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^n b^n$，求证 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$．

2° 本题可以一般化，即有

习题 2 已知 $a-b=s$，$ab=t$，s、t 为常数，

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{n-k}b^k,$$

求证：$u_n = su_{n-1} + tu_{n-2}$．

也可以把过程倒转过去，这样有

习题 3 已知数列$\{u_n\}$：$u_1 = a-b$，$u_2 = a^2 - ab + b^2$，…，$u_n = u_{n-1}\cdot u_1 + u_{n-2}(u_2 - u_1^2)$ $(n\geqslant 3)$．试用 a、b 表示通项 u_n．

【范例 2】 已知 a、b、c 是三角形的三边，S 是该三角形的面积．试确定 $P = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{S}$ 的最小值．

【信息、念头与思路】

1°（1） 可先看一下特殊三角形的情形，以增进对该问

题的了解。

问题 1 （可以引导你猜测答案的问题）

试对下列三角形，分别计算代数式$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{S}$的值：

①等边三角形； （$4\sqrt{3}$）

②等腰直角三角形； （8）

③边长之比为 3∶4∶5 的三角形； $\left(\dfrac{25}{3}\right)$

④边长之比为 2∶3∶3 的三角形． $\left(\dfrac{11\sqrt{2}}{2}\right)$

（2）也可以减弱条件，先解一下：

问题 2 试对下列几种特殊三角形，分别确定代数式$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{S}$的最小值：

①等腰三角形；

②直角三角形．

并比较这两个最小值的大小．

比如①，若 $a=b$，h 为 c 边上的高，则

$$a^2+b^2=2a^2=2h^2+2\left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

于是

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{S}=\frac{2h^2+2\left(\dfrac{c}{2}\right)^2+c^2}{\dfrac{1}{2}ch}$$

$$=4\cdot\frac{h}{c}+3\cdot\frac{c}{h}\geqslant 2\sqrt{4\cdot\frac{h}{c}\cdot 3\cdot\frac{c}{h}}=4\sqrt{3}.$$

其中等号仅当 $4\cdot\dfrac{h}{c}=3\cdot\dfrac{c}{h}$，即$\dfrac{h}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时成立，这时的三

角形为等边三角形。

①也可以借助三角方法来处理：

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{S}=\frac{a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos C}{\frac{1}{2}ab\sin C}$$

$$=\frac{4a^2-2a^2\cos C}{\frac{1}{2}a^2\sin C}=4\cdot\frac{2-\cos C}{\sin C}.$$

于是，问题 2 ①转化为如下的三角形式：

问题 2 ③ C 为锐角，求 $\frac{2-\cos C}{\sin C}$ 的最小值。

这个问题有如下两种常用解法：一是令 $\cos C=x$，$0<x<1$，就归结为求

$$y=\frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0<x<1)$$

的最小值。

上式两边平方、去分母再移项，得

$$(1+y^2)x^2-4x+(4-y^2)=0.$$

用判别式法，得

$$4-(1+y^2)(4-y^2)\geqslant 0,$$

所以 $y^2\geqslant 3$ 或 $y^2\leqslant 0$ （不合）。

得 $y=\frac{2-\cos C}{\sin C}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，当 $C=60°$ 即该三角形为等边三角形时取得。

另一法，由 $\frac{2-\cos C}{\sin C}=y$，

化为 $y\sin C+\cos C=2$，

再引进辅助角 ϕ，即设 $\operatorname{tg}\phi=\frac{1}{y}$，$0<\phi<\frac{\pi}{2}$，则有