# 构造法解数学题

刘运生 黄建忠 黄经盛 王 钵 编著

广东高等教育出版社

# 构造法解数学题

刘运生　黄建忠　黄经盛　王　钵　编著

广东高等教育出版社

# 构造法解数学题

刘运生　黄建忠　黄经盛　王　钚　编著

*

广东高等教育出版社出版
广东省新华书店经销
深圳华夏硅谷技术实业有限公司电脑排版
深圳市文锦中学印刷厂印刷

---

787×1092毫米　32开　11.25印张　244千字
1991年8月第1版　　1991年8月第1次印刷
印数1—5000册

---

ISBN 7-5361-0697-1/O·30
出版社登记证号：(粤)09号
定价：4.50元

# 内容简介

用构造性思维法解数学题，这是较为有效的一种方法，而近年来对这种方法的研究是许多数学工作者的热门内容。因为不少数学题，特别是高考综合题和中学数学竞赛题，都可以用构造性思维方法通过重新组合成一种新的关系来解决，步骤简明，富有新意，能刺激数学爱好者更大的兴趣。本书比较全面地阐述构造法的思想方法和解题技巧，对于开拓思维、培养人才，能起积极作用。本书可作为中学生课外阅读参考书和第二课堂辅导材料，还可以作为师范院校学生的学习参考书。

# 前　言

有时候，解一道数学题，用从条件到结论的定向性直接思维解题方法遇到困难，甚至不能解决，这时，通过联想，把题目中的已知关系重新组合成一种新的关系，如构造出新的图形、表达式、方程、函数、数列、复数等，或者换一个角度来分析原来的已知条件，使抽象或隐含的条件清晰地显示出来，把复杂的问题化为简单的问题，从而使问题较快地解出。这种方法称为构造性解题方法。

多年来，我们致力于辅导学生参加高考，指导学生参加国内各级数学竞赛，实践经验告诉我们，通过对学生进行构造性思维训练，对开阔学生的视野，增强学习数学的兴趣，培养创造性思维能力都有积极的作用。

本书可作为高中学生课外阅读参考书，或作为第二课堂辅导读物，也可作为师范院校学生学习的参考资料。对于面临高考或参加数学竞赛的学生也值得一读。

本书除了结合许多实例论述构造法解题基本思想外，还编排了大量习题供学生自习并附有较简明的解答，为读者提供方便。我们恳望以此书抛砖引玉，能帮助学生提高解题能力，书中不足或错误之处请大家不吝指正。

编　者

1991.1

# 目　录

# 一、方程构造法与恒等式构造法

## 1. 构造方程解题

根据题设的特征，构造方程，利用方程的根的概念、求根公式、根判别式、根与系数之间的关系，探求数的属性，证明不等式，解不等式，求函数的极值.

**例1** 如果 $x$、$y$、$z$ 是有理数，并且

$\sqrt[3]{9}x+\sqrt[3]{3}y+z=0$. 求证：$x=y=z=0$

**证明** 令 $t=\sqrt[3]{3}$，若 $x\neq0$，构造一个关于 $t$ 的一元二次方程

$$xt^2+yt+z=o$$

$$t=\frac{-y\pm\sqrt{y^2-4xz}}{2x} \tag{1}$$

$$2xt=-y\pm\sqrt{y^2-4xz}$$

即 $2\sqrt[3]{3}x=-y\pm\sqrt{y^2-4xz}$

两边立方，整理得

$$6x^3+y^3-3xyz=\pm(y^2-xz)\sqrt{y^2-4xz}$$

因为 $x$、$y$、$z$ 是有理数，所以 $6x^3+y^3-3xyz$、$y^2-xz$ 为有理数，而 $\sqrt{y^2-4xz}$ 应为无理数，否则与（1）式矛盾，因此，

$$\begin{cases}6x^3+y^3-3xyz=0 & (2)\\ y^2-xz=0 & (3)\end{cases}$$

由（3）式 $y^2=xz$ 代入（2）式，得 $\frac{y}{x}=\sqrt[3]{3}$，左边是有理数，右边是无理数，这是不可能的. 因此 $x\neq0$ 不成立，故 $x=0$.

把 $x=0$ 代入原式，得 $\sqrt[3]{3}y+z=0$. 因为 $y$、$z$ 是有理

数，$\sqrt[3]{3}$ 是无理数，等式成立的充要条件是 $y=z=0$.

综合上述的结果：$x=y=z=0$.

**例2** 求证$\sqrt{3}+\sqrt{5}$是无理数.

整系数方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ ($a_0\neq 0$)，若有有理根$\frac{q}{p}$（既约分数），则 $p$ 是$a_0$的约数，$q$ 是$a_n$的约数.把$\sqrt{3}+\sqrt{5}$作为方程的一个根，构造一个整系数方程.若此方程不存在有理根，那么$\sqrt{3}+\sqrt{5}$就是无理数.

**证明** 构造方程

$$[x-(\sqrt{3}+\sqrt{5})][x+(\sqrt{3}+\sqrt{5})][x-(\sqrt{3}-\sqrt{5})][x+(\sqrt{3}-\sqrt{5})]=0 \quad (1)$$

整理得 $x^4-16x^2+4=0$ (2)

方程（1）与方程（2）是同解方程，若方程（2）有有理根，必是$\pm 1$、$\pm 2$、$\pm 4$，经检验，它们都不是方程的根，而$\sqrt{3}+\sqrt{5}$是方程（1）的一个根，它也是方程（2）的一个根，因此，$\sqrt{3}+\sqrt{5}$是无理数.

**例3** 化简$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

**解** 设$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

两边立方，整理得

$$x^3=4-3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)=4-3x$$

构造方程 $x^3+3x-4=0$

即 $(x-1)(x^2+x+4)=0$

对于方程 $x^2+x+4=0$

因为 $\Delta=1-4\times 4<0$，所以没有实根.

于是，方程$x^3+3x-4=0$ 有且只有一个实根 1. 即

$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

若应用一元二次方程根判别式求函数 $y=f(x)$ 的值域

或极值，可把函数 $y=f(x)$ 转化构造成一个关于自变量 $x$ 的一元二次方程，由 $x\in R$ 推出 $\Delta(y)\geqslant 0$，解这个关于 $y$ 的不等式，确定值域，找出极值. 这里要注意的是:

（1） 函数式转化为一元二次方程，变量的取值范围可能发生变化;

（2） 判别式只能是对一元二次方程有效，必须重视二次项系数的讨论;

（3） 定义域中存在实数对应值域中的极值.

**例 4** 求函数 $y=x+\sqrt{4-x^2}$ 的最值.

**解** 移项，两边平方. 构造一个关于 $x$ 的一元二次方程

$2x^2-2yx+y^2-4=0$

因为 $x\in R$，所以

$\Delta(y)=4y^2-8(y^2-4)\geqslant 0$,

解得 $-2\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{2}$.

由原式可知 $x\in[-2,2]$, $y\geqslant -2$.

因为 $-2\sqrt{2}<-2$ 所以 $-2\sqrt{2}$ 不是函数的最小值.

取 $y=-2$ 代入（1）式得

$x^2+2x=0$ 解得 $x=0$，$-2$.

0，$-2$ 是定义域中的实数.

则当 $x=0$ 或 $-2$ 时，$y_{\min}=-2$.

若取 $y=2\sqrt{2}$ 代入方程（1）

$2x^2-4\sqrt{2}x+4=0$

即 $(x-\sqrt{2})^2=0$

解得 $x=\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\in[-2,2]$.

则当 $x=\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=2\sqrt{2}$.

**例 5** 求函数 $y=\dfrac{2x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$ 的极值.

**解** 原式去分母，整理构造成一个关于 $x$ 的二次方程

$$(y-2)x^2-3(y-2)x+(2y-5)=0$$

当 $y-2=0$ 时，方程无解；

当 $y-2\neq 0$ 时，因为 $x\in R$，

$\Delta(y)=[3(y-2)]^2-4(y-2)(2y-5)\geqslant 0.$

即 $(y-2)(y+2)\geqslant 0$，

解得 $y\leqslant -2$ 或 $y>2$. 函数 $y$ 没有极小值.

把 $y=-2$ 代入原式解得 $x=\dfrac{3}{2}$，

则当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$y_{\max}=-2.$

我们还可以通过构造一元二次方程，利用根判别式证明不等式.

**例6** 已知 $a^2+b^2-kab=1$，$c^2+d^2-kcd=1$ 且 $a$、$b$、$c$、$d\in R$，$|k|<2$.

求证 $|ac-bd|\leqslant \dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$

**证明** 令 $ac-bd=t$

当 $d\neq 0$ 时，$b=\dfrac{ac-t}{d}$，代入 $a^2+b^2-kab=1$，消去 $b$，构造一个关于 $a$ 的一元二次方程.

$$(d^2+c^2-kcd)a^2-(2ct-tkd)a+t^2-d^2=0$$

因为 $c^2+d^2-kcd=1$，

所以 $a^2-(2ct-tkd)a+t^2-d^2=0.$

又因为 $a\in R$，所以 $(2c-kd)^2t^2-4(t^2-d^2)\geqslant 0$，

$[4c^2+k^2d^2-4(ckd+1)]t^2+4d^2\geqslant 0.$

由于 $ckd+1=c^2+d^2$，

不等式化为 $t^2(k^2-4)+4\geqslant 0.$

由于 $k^2<4$，可解得

$|t| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$　即 $|ac-bd| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$.

当 $d=0$ 时，由已知 $c^2=1$，

$t=ac$，把$a=\dfrac{t}{c}$ 代入 $a^2+b^2-kab=1$，

构造关于 $b$ 的一元二次方程

$b^2-kctb+t^2-1=0$.

因为 $b \in R$，所以$k^2c^2t^2-4\ (t^2-1)\ \geqslant 0$

即　$(k^2-4)\ t^2+4 \geqslant 0$，

则 $|t| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$，

即 $|ac-bd| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$.

应用韦达定理构造方程解题.

**例 7**　设 $n$ 和 $k$ 是正整数. $r=k+\dfrac{1}{2}+\sqrt{k^2+\dfrac{1}{4}}$.

试证: $r^n$ 的整数部分〔$r^n$〕能被 $k$ 整除.

**证明**　以$r=\dfrac{(2k+1)\ +\sqrt{4k^2+1}}{2}$，

$t=\dfrac{(2k+1)\ -\sqrt{4k^2+1}}{2}$为两个实根构造二次方程

$x^2-\ (2k+1)\ x+k=0$.

根据根的意义有

$$r^2-\ (2k+1)\ r+k=0, \tag{1}$$

$$t^2-\ (2k+1)\ t+k=0, \tag{2}$$

(1) 式和 (2) 式两边分别乘以$r^n$、$t^n$ 再相加得

$(r^{n+2}+t^{n+2})-(2k+1)(r^{n+1}+t^{n+1})+k(r^n+t^n)=0$

设 $a_n=r^n+t^n$，于是 $a_0=2$，$a_1=2k+1$.

$$a_{n+2}-(2k+1)a_{n+1}+ka_n=0.$$

$$a_{n+2}=k(2a_{n+1}-a_n)+a_{n+1}.$$

用数学归纳法不难证明$a_n$（$n\geqslant 1$）是整数且被 $k$ 除，余数是 1.

又 $r^n=a_n-t^n$,

$$[r^n]=[a_n-t^n]=a_n+[-t^n]$$

$$0=\frac{(2k+1)-\sqrt{(2k+1)^2}}{2}$$

$$<\frac{(2k+1)-\sqrt{4k^2+1}}{2}$$

$$=\frac{2k}{(2k+1)+\sqrt{4k^2+1}}<\frac{2k}{4k+1}<1.$$

$\therefore 0<t^n<1$, $[-t^n]=-1$,

则$[r^n]=a_n-1$,

即$[r^n]$能被 $k$ 整除.

**2. 构造恒等式解题**

解三角或代数问题，经常要构造辅助恒等式. 联系某一个模式进行思考，能有效地运用公式、定理、基本原理和方法，促使问题的解决.

利用平方差公式，构造恒等式，把无理式化为整式，对化简方程、解方程，求代数式的值都有积极的意义.

**例 8** 解方程 $\sqrt{x^2+3x+7}-\sqrt{x^2-x+10}=1.$

**解** 利用平方差公式，构造恒等式

$$(x^2+3x+7)-(x^2-x+10)=4x-3.$$

恒等式两边分别除以原方程,把所得的方程与原方程联立

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+3x+7}+\sqrt{x^2-x+10}=4x-3, & (1)\\ \sqrt{x^2+3x+7}-\sqrt{x^2-x+10}=1, & (2)\end{cases}$$

(1) + (2) 得 $\sqrt{x^2+3x+7}=2x-1$,

两边平方，整理得

$3x^2-7x-6=0$,

即 $(3x+2)(x-3)=0$，$x_1=3$，$x_2=-\frac{2}{3}$.

检验舍去增根$x_2$，原方程的解是 $x=3$.

**例 9** 已知$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$,

求$a^2+b^2$的值.

**解** 构造恒等式

$a^2(1-b^2)-b^2(1-a^2)=a^2-b^2$.

恒等式两边分别除以原式两边

$$\begin{cases} a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}=a^2-b^2, & (1) \\ a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1, & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) 得$2a\sqrt{1-b^2}=a^2-b^2+1$.

两边平方整理得:

$a^4+b^4+2a^2b^2-2a^2-2b^2+1=0$,

$(a^2+b^2-1)^2=0$.

则 $a^2+b^2=1$.

利用上述方法，推导椭圆标准方程.

**例 10** 若$b^2=a^2-c^2$ $(a>c>0)$，化简方程

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$.

**解** 构造恒等式

$[(x-c)^2+y^2]-[(x+c)^2+y^2]=-4cx$.

恒等式两边除以原式

$$\begin{cases} \sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\dfrac{2cx}{a}, & (1) \\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a, & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) 得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{cx}{a}.$$

两边平方，整理得:

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2)$$

把 $b^2=a^2-c^2$ 代入上式且两边同除$a^2b^2$得:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}=1.$$

构造一组等式，把题设中隐含的条件发掘出来，并用它解释结论的正确性.

**例 11** 设 $E=\{1,2,3,\cdots,200\}$

$G=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{100}\}\subset E$，且 $G$ 具有下列两条性质:

(i) 对任何$1\leqslant i<j\leqslant 100$ 恒有 $a_i+a_j\neq 201$;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i=10080.$

试证明，$G$ 中的奇数的个数是 4 的倍数，且 $G$ 中所有数字的平方和为一个常数.

**证明** 取 $E$ 中的 100 个偶数，其和为$\frac{2+200}{2}\times 100=10100$，显然，这 100 个数满足条件 (i) 且它的和比条件 (ii) 中的 10080 大 20, 因此，$G$ 中必含有若干个奇数，设奇数的个数为 $P$.

我们可以这样设想， 把 100 个偶数删去 $P$ 个，即 $2m_1$，$2m_2$，$\cdots$，$2m_p$ $(m_1<m_2<\cdots<m_p)$，换上 $P$ 个奇数，即$2k_1-1, 2k_2-1$，$\cdots$，$2k_p-1$ $(k_1<k_2<\cdots<k_p)$

构造等式组

$$
\begin{cases}
2(m_1+m_2+\cdots+m_p)-[(2k_1-1)+(2k_2-1) \\
\qquad +\cdots+(2k_p-1)]=20, & (1) \\
2m_1+2k_p-1=201, & (2) \\
2m_2+2k_{p-1}-1=201, & (3) \\
\cdots\cdots \\
2m_p+2k_1-1=201. & (p+1)
\end{cases}
$$

由（2）式+（3）式+…+（p+1）式得

$$
\begin{aligned}
&2(m_1+m_2+\cdots+m_p)+[(2k_1-1)+(2k_2-1) \\
&\qquad +\cdots+(2k_p-1)]=201p, \qquad (p+2)
\end{aligned}
$$

由（1）式+（p+2）式得

$$4(m_1+m_2+\cdots+m_p)=20+201P$$

即 $m_1+m_2+\cdots+m_p=5+50p+\frac{p}{4}$

$\because m_1$，$m_2$，…，$m_p$，5，$50p$都是自然数.

$\therefore G$ 中的奇数的个数是 4 的倍数.

$p$ 的存在性举例.

把 100 个偶数中的 100，102，104，106 分别换上 101，99，97，95，显然其和式满足条件（i）和（ii）.

下面证明 $G$ 中各数的平方和为常数.

把（1）式代入下式

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100} a_i^2 &= 2^2+4^2+\cdots+200^2-[(2m_1)^2+(2m_2)^2+\cdots \\
&\quad +(2m_p)^2]+[(2k_1-1)^2+(2k_2-1)^2+\cdots \\
&\quad +(2k_p-1)^2] \\
&= 2^2+4^2+\cdots+200^2+(2k_p-1+2m_1)(2k_p-1 \\
&\quad -2m_1)+(2k_{p-1}-1+2m_2)(2k_{p-1}-1-2m_2) \\
&\quad +\cdots+(2k_1-1+2m_p)(2k_1-1-2m_p)
\end{aligned}
$$

$$= 2^2 + 4^2 + \cdots + 200^2 + 201 [ (2k_p - 1) + (2k_{p-1} - 1) + \cdots + (2k_1 - 1) - 2 (m_1 + m_2 + \cdots + m_p) ]$$

$$= 2^2 + 4^2 + \cdots + 200^2 - 20 \times 201.$$

则 $G$ 中所有数字的平方和为一个常数.

**例 12** 已知$\sin\alpha = \frac{5}{7}$，$\cos(\alpha+\beta) = \frac{11}{14}$，$\alpha$、$\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，求 $\cos\beta$.

**解** $\because \alpha$、$\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore \alpha+\beta \in (0, \pi)$.

运用构造性恒等变形

$\beta = (\alpha+\beta) - \alpha$

$\cos\beta = \cos[(\alpha+\beta) - \alpha]$

$= \cos(\alpha+\beta)\cos\alpha + \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$= \cos(\alpha+\beta)\sqrt{1-\sin^2\alpha} + \sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}\ \sin\alpha$

$= \frac{11}{14}\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2} \cdot \frac{5}{7}$

$= \frac{22\sqrt{6} + 25\sqrt{3}}{98}.$

解与一元二次方程根与系数有关的代数问题，由根表示的代数式，往往需要进行构造性的恒等变形，以便应用韦达定理.

**例 13** 已知方程$ax^2 + bx + a\sin\theta = 0$有两个实根 $\alpha_1$、$\alpha_2$，方程 $ax^2 + bx + a\cos\theta = 0$ 有两个实根 $\beta_1$、$\beta_2$，求 $\theta$ 为何值时，使得