

石油科学进展 6

油藏数值模拟基础

D. W. 皮斯曼著

石油工业出版社

石油科学进展 6

油藏数值模拟基础

[美] D.W. 皮斯曼 著

孙长明 刘青年 译 陈钟祥 校

石油工业出版社

内 容 提 要

油藏数值模拟理论和方法的研究已成为渗流力学的一个十分活跃的研究领域。美国著名油藏渗流力学专家D. W. Peaceman的这本书是总结这一研究领域最新成果的第一部专著。

本书专门讨论用有限差分方法进行油藏数值模拟的问题。全面系统地综述了最基本的理论材料,如各种渗流差分方程的构造,差分方程对微分方程的收敛性,差分方程的稳定性及各种迭代求解方法的收敛速度等。书中也着重介绍了各类问题的解法及油藏模拟中各种实际问题的处理。

本书取材精练,典型性强,行文流畅,概括性强,适于从事油藏渗流力学研究工作的科学工作者及工程师阅读,也可供石油院校有关专业师生参考。

DONALD W. PEACEMAN

FUNDAMENTALS OF NUMERICAL RESERVOIR SIMULATION

Developments in Petroleum Science, 6

ELSEVIER SCIENTIFIC PUBLISHING

COMPANY New York 1977

石油科学进展 6

油 藏 数 值 模 拟 基 础

〔美〕D. W. 皮斯曼 著

孙长明 刘青年 译 陈钟祥 校

石油工业出版社出版

(北京安定门外外馆东后街甲 36 号)

北京通县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米¹/₁₆,开本8¹/₁₆,印张205千字印1—2,500

1982年8月北京第1版 1982年8月北京第1次印刷

书号: 15037·2312 定价: 0.75元

序 言

近十年来,运用高速电子计算机进行油藏数值模拟,以对世界上广泛变化的各种油气藏进行工程研究,这在整个石油工业中已被广泛采纳。这些油藏模拟模型是为油藏工程师们设计的,但他们可能少有或不具备作为模拟模型基础的数值数学方面的知识。尽管我们致力于改进数值方法,使得作出的油藏模拟模型尽可能是可靠的、有效的和自动的,但模拟模型的使用者仍然总是面临着与他真正要解决的实际问题毫不相关的大量选择。他必须就与他手头的问题无直接密切关系的各种数值问题作出选择。例如,他可能要在用不同数值方法的几种模拟模型中选择一种,他可能必须选取一种迭代方法。肯定他将必须选出作为油藏描述的一部分的网格分布,也许还将必须选择时间步长之大小。大概其中最令人头痛的是迭代参数之选择。

写这本书的时候,我想到的是这样一些工程师(用户),他们想学会如何更有效地处理上面提到的数值方面的选择。我希望他也对“黑盒”(Black box),即油藏模拟模型之内部工作具有某些兴趣,同时,我已试着去满足他的兴趣,以及培养他能阅读文献,如果他希望学习最新的进展以及比我们在这里所给出的更为深入的进一步研究的话。

第一章把概述油藏力学的基本概念与推导油藏模拟模型要求解的微分方程相结合。以下的四章提供了关于求简单的偏微分方程的数值解的基本理论。最后一章综合这些基本理论将其用于求多维、多相流问题的数值解。

我力图使这本书尽可能自身独立。假定读者具有偏微分方程和简单矩阵代数方面的知识,其它的数学工具在需要的地方给出。在推导数值理论时,我已尽力使之比标准的数值分析教科书更好地适合工程师的需要,因标准数值分析教本不是太严密就是太一般化。我不打算在数学证明上十分严格,但作了充分的推导,使各种数学论证尽可能讲得通。

在写此书时我想到的并不只是工程师(用户)。当然,数值分析的数学内行将发现,材料的大部分对他们来说是熟悉的。然而,第一章将为他们介绍油藏力学的基本原理,本书的其余各章将给他们指明数值分析中我认为对油藏流动问题的数值解是重要的那些论题。我已写入了并不为人们熟知的某些材料,例如,连续超松弛方法这一节讨论Neumann边界条件的影响和各相异性的影响,而在标准教本中只就Dirichlet边界条件和各相同性问题进行讨论。最后一章中的材料对大多数数值分析工作者来说应都是新鲜的,因为它是多相油藏流动领域的十分专门的材料。我希望这本书将为推动油藏数值模拟的进一步发展提供营养。

虽然关于用变分方法求解偏微分方程的大量工作目前都已作出,但还未发展到油藏模拟的实际应用阶段。目前实际应用的大多数油藏模拟模型是以有限差分法作为基础的。因此,本书只涉及有限差分法。

熟悉油藏工程的读者将会注意到违背实用的一种做法,我觉得这在矿场上是太普遍的,就是流动方程中含有一些数量常数。本书的所有方程中均无数量常数,这些常数依赖于使用单位,并对任何一致的单位系统都适用。自由量纲方程的应用应当变得更加通用。因此,在每章后面的术语中我已说明了以公斤·米和秒的SI单位制的基础以及力是牛顿(kgm/s^2),压力是巴(N/m^2)的导出单位。这些形成了一个统一的单位系统。如果读者愿意的话,则任何

其它的一致单位系统也能采用，而诸方程仍是对的。

在北大西洋公约组织发起的于1969年5月在意大利米兰举办的“用计算机进行油气藏模拟训练班”上我作了一系列讲演，本书的材料主要是为这些讲演而准备的笔记。在Exxon生产研究公司内部以及1974年1月在洛杉矶SPE部门进修教导队上我也作过同样的讲演。许多看过这些讲演笔记的人都催我将其扩充并出版。我觉得原来的笔记不甚完全，因此补充了一些章节。

我承蒙Exxon生产研究公司经理部允许出版这本书和给以鼓励。

目 录

序 言

第一章 油藏中流动的微分方程

§ 1 引论	(1)
§ 2 单相流	(1)
1. 达西定律	(1)
2. 一维单相可压缩流动	(2)
3. 二维单相可压缩流动	(3)
4. 三维单相可压缩流动	(4)
5. 微分算子	(5)
6. 单相流的一般方程	(5)
7. 边界条件	(6)
8. 单相流的特殊情况	(6)
具有恒定压缩性的理想液体	(7)
具有轻微压缩性的液体	(7)
理想气体	(8)
不可压缩流动	(8)
§ 3 二阶微分方程的类型	(8)
1. 抛物型方程	(9)
2. 椭圆型方程	(9)
3. 双曲型方程	(9)
4. 方程的分类	(9)
5. 一阶双曲型方程	(9)
§ 4 两相流	(10)
1. 引言	(10)
2. 达西定律	(10)
3. 各相守恒方程	(11)
4. 两相流的微分方程	(11)
5. 两相流的另一种微分方程	(11)
压力微分方程	(11)
压力微分方程的特征	(12)
不可压缩情况的总流速	(12)
饱和度微分方程	(13)
饱和度方程的特征	(14)
扩散-对流方程	(14)
饱和度方程的性质	(15)
一维情况	(15)
§ 5 三相流	(16)
1. 引言	(16)

2. 达西定律	(16)
3. 各相的守恒方程	(16)
4. 微分方程	(16)
5. 微分方程的另一种形式	(16)
§ 6 具有相间转移的流动	(17)
1. 一般多组分模型	(17)
组分的平衡	(17)
微分方程	(17)
辅助关系式	(17)
2. 黑油模型	(18)
简化的双组分烃类模型	(18)
黑油模型的微分方程	(19)
3. 有限组分模型	(20)
有挥发性的双组分烃类系统	(21)
微分方程	(21)
§ 7 结语	(22)
术语	(22)
第二章 基本有限差分	
§ 1 引论	(25)
§ 2 一阶差商	(25)
§ 3 二阶差商	(27)
§ 4 网格系统	(27)
1. 块中心网格	(28)
2. 点中心网格	(28)
3. 两种网格之比较	(28)
§ 5 截断误差	(29)
术语	(31)
第三章 一个未知变量的抛物型问题的数值解	
§ 1 前差分方程	(23)
§ 2 稳定性的调和分析 (Von Neumann 准则)	(33)
§ 3 隐式差分方程	(35)
1. 后差分方程	(35)
2. 三对角算法	(36)
3. Crank-Nicolson 差分方程	(37)
§ 4 其它显式差分方程	(37)
1. 时间中心显式方程	(37)
2. Dufort-Frankel 逼近	(38)

§ 5 多维问题..... (39)	5. 联立替换方法(Jacobi方法)..... (69)
1. 前差分方程..... (39)	6. 点松弛方法的矩阵表示 (69)
2. 隐式差分方程..... (40)	Jacobi方法..... (69)
§ 6 交替方向法..... (41)	连续超松弛方法..... (70)
1. Peaceman-Rachford 方法..... (41)	7. Jacobi 迭代收敛速度的调和和分析 (71)
2. Douglas-Rachford 方法..... (43)	点中心网格Dirichlet边界条件下的误差
3. Brian和Douglas 方法..... (45)	展式..... (71)
术语..... (46)	点中心网格Neumann边界条件下的误差
第四章 一个未知变量的一阶双曲型问题的数值解	展式..... (71)
§ 1 引论..... (48)	块中心网格 Neumann边界条件的误差
§ 2 差分方程..... (48)	展式..... (71)
1. 距离权衡..... (48)	Neumann边界条件的收敛分析..... (71)
2. 时间权衡..... (49)	Neumann边界条件下各向异性对敛速的
3. 差分方程的一般形式..... (49)	影响..... (73)
4. 差分方程的线性化..... (49)	Dirichlet边界条件的敛速..... (73)
§ 3 稳定性..... (50)	8. Jacobi迭代敛速的特征分析方法..... (74)
1. 距离中心方程的稳定性..... (50)	特征值和特征向量的定义..... (74)
2. 距离后差分方程的稳定性..... (51)	收敛性和特征值间的关系..... (74)
3. 距离前差分方程的稳定性..... (51)	对Jacobi迭代的应用..... (75)
§ 4 截断误差分析——数值弥散..... (52)	9. 连续超松弛方法的敛速..... (75)
1. 局部截断误差..... (52)	性质 Δ (76)
2. 数值弥散..... (54)	SOR迭代矩阵的特征值..... (76)
3. 数值和物理弥散的迭加..... (54)	关于Jacobi迭代矩阵的其余特征值..... (78)
§ 5 算例..... (55)	SOR收敛性与Jacobi方法收敛性之
1. 计算的细节..... (55)	关系..... (78)
2. 显示数值弥散的解..... (55)	连续替换方法的敛速..... (79)
3. 无数值弥散的解..... (56)	SOR的最佳参数..... (79)
4. 不稳定解..... (75)	敛速之比较..... (80)
§ 6 结语..... (57)	各向异性和边界条件对SOR敛速的
术语..... (59)	影响..... (81)
第五章 一个未知变量的椭圆型问题的数值解	§ 6 线松弛方法..... (82)
§ 1 椭圆型差分方程..... (61)	1. 引言..... (82)
1. 公式..... (61)	2. 线联立替换(线Jacobi)..... (82)
2. 矩阵表示, 系数矩阵的结构..... (62)	3. 线连续超松弛(LSOR)..... (82)
§ 2 带形矩阵方程的直接法求解..... (64)	4. 线Jacobi迭代的敛速..... (82)
§ 3 带形算法对两维问题的应用..... (66)	Neumann边界条件 (82)
1. 标准次序..... (66)	Dirichlet边界条件 (83)
2. 非标准次序..... (67)	5. Neumann边界条件下收敛的加速..... (84)
§ 4 求解椭圆型问题的迭代法..... (67)	一维附加关系法..... (84)
§ 5 点松弛法..... (67)	二维附加关系法..... (86)
1. 引言..... (67)	6. LSOR和LSORC方法的敛速 (86)
2. Southwell松弛法..... (68)	Neumann边界条件 (87)
3. Gauss-Seidel方法(连续替换方法)..... (69)	Dirichlet边界条件..... (87)
4. 连续超松弛(SOR)方法..... (69)	7. 点和线松弛迭代敛速之汇总..... (87)

§ 7 交替方向迭代法 (A. D. I.)	(87)	3. 联立隐式方法	(108)
1. Peaceman-Rachford 迭代过程描述	(87)	稳定性分析	(108)
2. 收敛分析	(89)	交替方向迭代法求解	(109)
参数选择	(89)	强隐式方法求解	(111)
最佳参数和理想情况下的敛速	(90)	直接求解	(111)
ΔX 和 ΔY 变化的情况	(93)	非线性系数 S' 的计算	(112)
3. 其它交替方向迭代法	(93)	物质守恒检验	(112)
§ 8 强隐式方法 (S. I. P.)	(93)	小结	(113)
1. 近似因式分解	(93)	§ 5 交替数值解法	(113)
2. 系数的选择	(96)	1. 引言	(113)
简单方法	(96)	2. 跳蛙式方法	(113)
Dupont, Keudall和Rachford方法	(99)	稳定性	(114)
Stone 方法 (S. I. P.)	(98)	饱和度蔓延	(114)
§ 9 结语	(98)	3. 其它交替求解方法	(115)
术语	(102)	4. 用到总流速的交替求解方法	(116)
第六章 两相流问题的数值解		§ 6 隐式和半隐式的流度	(118)
§ 1 引论	(102)	1. 显式流度带来的限制	(118)
§ 2 微分方程	(102)	2. 隐式流度	(119)
1. 以相压力写出的基本方程	(102)	3. 半隐式流度	(120)
2. 另一种形式的方程	(103)	§ 7 数值弥散	(121)
§ 3 差分表示	(103)	§ 8 井的流速	(121)
1. 差分算子	(103)	1. 注入井	(121)
2. 注入采出项	(104)	2. 生产井	(121)
3. 中间处的绝对渗透率	(105)	显式采出速度	(122)
4. 流度权衡	(105)	半隐式采出速度	(122)
5. 一些特殊组合	(105)	3. 注入或采出总速度的分配	(122)
§ 4 联立数值解	(106)	4. 实际速度的给定方法	(122)
1. 显式差分方程	(106)	术语	(123)
2. 交替方向隐式方法	(106)	参考文献	(126)

第一章 油藏中流动的微分方程

§ 1 引 论

油藏模拟，我们指的是用该油藏模型的动态来表示真实油藏动态的过程。这种模型可以是物理的，像标配实验模型，或者是数学的。对我们来说，一个物理系统的数学模型，是一偏微分方程组和适当的一组边界条件的总体，它们能够描述在系统中发生的重要的物理过程。在油藏中发生的过程，主要是流体的流动和质量的转移。在不互溶的三相(水、油和气)同时流动的情况下，相间(主要是气相和油相之间)可能产生质量的转移。重力、毛细管力和粘滞力在流体流动过程中都是起作用的。

模型方程中必须考虑到所有这些力的作用，同时也应当考虑到能描述其非均质性和几何形态为任意的油藏。微分方程是由将各相的达西定律和各该相的简单的微分形式的物质守恒方程相结合而得到。在第一章里，我们将首先推导描述单相流的简单的微分方程，进而导出描述最复杂的多维、多组分三相流的联立的微分方程组。

在推导这些微分方程过程中，我们将引入油藏力学的许多基本概念。关于通过多孔介质的流体流动问题的一个较完整的论述，请读者参阅 Collins (1961)的书。

为用微分方程预测油藏动态，必须在适当的边界条件下对微分方程式进行求解。只是在均质油藏和极规则边界(像只有一口井的圆形边界)的这种最简单情况下，才能用经典的数学物理方法求解。另一方面在高速计算机上实现的数值方法，其适用性是极普遍的，同时对极复杂的油藏情况的求解已被证明是高度成功的。这样一个油藏数值模型，就是运用数值方法去获得数学模型的近似解的一个计算程序。

近十年来，油藏数值模拟在整个石油工业中已广泛被采用，这主要是由于下列三个因素：a) 计算速度和能力的惊人增长，导致计算费用的降低；b) 求解偏微分方程的数值算法的改进；以及或许是最重要的；c) 油藏模拟模型所具有的普遍适用性使得可更真实地模拟世界上存在的各式各样的油气藏。

本书的其余各章将略述包含在用有限差分法求偏微分方程数值解中的某些基本思想，并指出它们对油藏动态方程的应用。

§ 2 单相流

1. 达西定律

单相流达西定律说的是，在一水平系统中，流经长为 L ，断面积为 A 的孔隙介质岩样的体积流速 \hat{Q} ，由下列公式表示：

$$\hat{Q} = \frac{KA}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (1-1)$$

式中 Δp ——作用在岩样上的压力降； μ ——流体粘度； K ——介质的绝对渗透率。当流动只

在一个方向(譬如平行于x轴)发生时, 我们能为达西定律写下述的微分形式:

$$v = \frac{\hat{Q}}{A} = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-2)$$

式中 $v = \hat{Q}/A$ 为面积流速, 而 $\partial p / \partial x$ 是沿x方向的压力梯度。注意方程(1-2)中的负号, 它指明压力是沿流动方向降落的。

达西定律的微分形式可以推广到三维流动的情况:

$$v_x = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-3a)$$

$$v_y = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1-3b)$$

$$v_z = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1-3c)$$

式中 v_x , v_y 和 v_z 是在三维空间中指向某个任意方向的速度向量 \vec{v} 的x、y和z分量。然而, 方程组(1-3)并未考虑重力因素, 必须修改成考虑重力项的方程。为了一般性, 我们将 \bar{D} 可取深度D为座标(x, y, z)的任意函数, 而不是一开始就限于把任一座标(常常是z)等同于深度。这时达西定律的微分形式就变为:

$$v_x = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (1-4a)$$

$$v_y = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \frac{\partial D}{\partial y} \right) \quad (1-4b)$$

$$v_z = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \frac{\partial D}{\partial z} \right) \quad (1-4c)$$

式中 ρ ——流体的密度; g ——重力加速度。

2. 一维单相可压缩流动

在推导一维流动微分方程时, 我们希望具有这样的可能性, 即流动的横断面积A以及深度D, 都是一个空间变量x的函数。我们将把流体的注入项变量q考虑进去, 它等于注入到单位油藏体积的质量速度(负q表示采出)。最后, 我们将认为流体的密度也随时间而变化(介质的孔隙度 ϕ 也常看成是随时间而变的)。

考虑如图1A所示的小单元的质量守恒。此单元长为 Δx , 左侧面积为A(x), 右侧面积为A(x + Δx)。在左侧面流入单元的流体质量速度由下式给出:

$$\rho(x) \cdot v_x(x) \cdot A(x) = (\rho v_x)_x$$

其右侧流出的质量速度为:

$$\rho(x + \Delta x) \cdot v_x(x + \Delta x) \cdot A(x + \Delta x) = (\rho v_x)_{x + \Delta x}$$

单元的体积是 $\bar{A} \Delta x$ 。这里 \bar{A} 表示介于x和x + Δx 之间的A的平均值, 于是注入该单元的流体的质量速度是:

$$\bar{q} \bar{A} \Delta x$$

单元中含有的流体质量是 $\bar{\phi} \bar{\rho} \bar{A} \Delta x$, 于是单元中质量的累积速度为:

$$\frac{\partial(\bar{\phi} \bar{\rho})}{\partial t} \bar{A} \Delta x$$

因为质量必须守恒, 于是我们有:

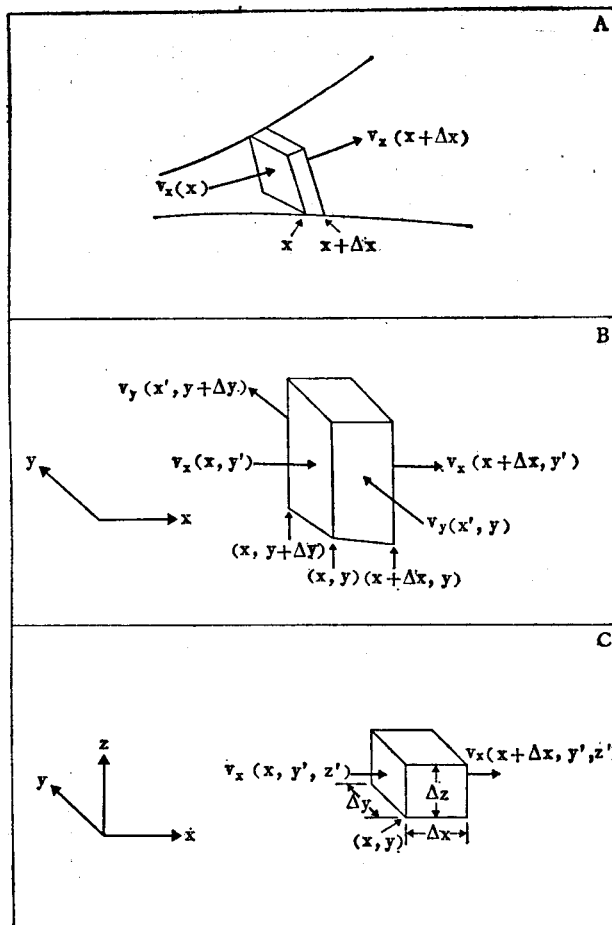


图1 微分体积单元
A—一维流动； B—二维流动； C—三维流动

〔流入速度〕 - 〔流出速度〕 + 〔注入速度〕 = 〔累积速度〕

(1-5)

这样,

$$(\overline{A\rho v_x})_x - (\overline{A\rho v_x})_{x+\Delta x} + \overline{q} \overline{A\Delta x} = \overline{A} \frac{\partial(\overline{\phi\rho})}{\partial t} \Delta x$$

除以 Δx , 则

$$-\frac{(\overline{A\rho v_x})_{x+\Delta x} - (\overline{A\rho v_x})_x}{\Delta x} + \overline{A} \overline{q} = \overline{A} \frac{\partial(\overline{\phi\rho})}{\partial t}$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时取极限(注意到导数用极限定义)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

以及 $\overline{A} \rightarrow A(x)$, $\overline{\rho} \rightarrow \rho(x)$, 等等, 于是我们得到:

$$-\frac{\partial(A\rho v_x)}{\partial x} + Aq = A \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (1-6)$$

3. 二维单相可压缩流动

在二维流动情况下，我们希望让油藏厚度是变化的， $H = H(x, y)$ 。现在考察图1B中所示的小单元的质量守恒。此单元的长为 Δx ，宽为 Δy 。此单元的中心位置的座标是 $x' = x + \frac{1}{2}\Delta x$ 和 $y' = y + \frac{1}{2}\Delta y$ 。其左侧面的面积为 $H(x, y') \cdot \Delta y$ ，左侧面上流体流入之质量速度为：

$$\rho(x, y') \cdot v_x(x, y') \cdot H(x, y') \cdot \Delta y = \Delta y (H\rho v_x)_{x, y'}$$

类似地，在右侧面流体流出的质量速度为：

$$\Delta y (H\rho v_x)_{x + \Delta x, y'}$$

流体流入正面的质量速度为：

$$\Delta x (H\rho v_y)_{x', y}$$

而流出背面的质量速度是：

$$\Delta x (H\rho v_y)_{x', y + \Delta y}$$

因为该单元的体积是 $\bar{H} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ ，注入到单元的质量流速是：

$$\bar{q} \bar{H} \Delta x \Delta y$$

此单元中质量累积速度为：

$$\frac{\partial(\bar{\phi} \bar{\rho})}{\partial t} \bar{H} \Delta x \Delta y$$

代入方程(1-5)，则

$$\begin{aligned} & [\Delta y (H\rho v_x)_{x, y'} + \Delta x (H\rho v_y)_{x', y}] - [\Delta y (H\rho v_x)_{x + \Delta x, y'} + \\ & + \Delta x (H\rho v_y)_{x', y + \Delta y}] + [\bar{q} \bar{H} \Delta x \Delta y] = \bar{H} \frac{\partial(\bar{\phi} \bar{\rho})}{\partial t} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

经过重新整理，除以 $\Delta x \Delta y$ ，并取 $\Delta x \rightarrow 0$ 和 $\Delta y \rightarrow 0$ 时的极限，我们得到

$$-\frac{\partial(H\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(H\rho v_y)}{\partial y} + Hq = H \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (1-7)$$

4. 三维单相可压缩流动

现在考察图1C所示长为 Δx ，阔为 Δy ，高为 Δz 的小单元的质量守恒，单元之中心位于 $x' = x + \frac{1}{2}\Delta x$ ， $y' = y + \frac{1}{2}\Delta y$ ， $z' = z + \frac{1}{2}\Delta z$ 。左侧面积是 $\Delta y \Delta z$ ，因此在左侧面上流体流入此小单元的质量速度为：

$$\rho(x, y', z') \cdot v_x(x, y', z') \cdot \Delta y \Delta z = \Delta y \Delta z (\rho v_x)_{x, y', z'}$$

右侧面上流出的速度是：

$$\Delta y \Delta z (\rho v_x)_{x + \Delta x, y', z'}$$

液体流入正面的速度是

$$\Delta x \Delta z (\rho v_y)_{x', y, z'}$$

而流出背面的速度为：

$$\Delta x \Delta z (\rho v_y)_{x', y + \Delta y, z'}$$

流体流入底面的速度为：

$$\Delta x \Delta y (\rho v_z)_{x', y', z}$$

流出顶面的速度是：

$$\Delta x \Delta y (\rho v_z)_{x', y', z + \Delta z}$$

该单元的体积是 $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ，这样，注入单元的质量速度是：

$$\bar{q}\Delta x\Delta y\Delta z$$

单元中质量累积的速度为:

$$\frac{\partial(\bar{\phi}\rho)}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

将这些速度代入方程(1-5), 除以 $\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$, 并取 $\Delta x\rightarrow 0$, $\Delta y\rightarrow 0$ 及 $\Delta z\rightarrow 0$ 时的极限, 我们得到:

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (1-8)$$

5. 微分算子

设 u_x , u_y 和 u_z 是向量 \vec{u} 的 x , y 和 z 方向之分量。这向量的散度写成 $\nabla\cdot\vec{u}$, 它是如下地作用于 \vec{u} 的微分算子

$$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1-9)$$

另一有用的微分算子是梯度, 它是一个向量, 由数量函数之导数形成。若 u 是一个数量函数, 其梯度记为 ∇u , 是一个向量, 其 x 分量是 $\partial u/\partial x$, y 分量是 $\partial u/\partial y$, z 分量为 $\partial u/\partial z$ 。这样, $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$ 和 $\partial p/\partial z$ 是 ∇p 之分量, 而 $\partial D/\partial x$, $\partial D/\partial y$ 和 $\partial D/\partial z$ 是 ∇D 之分量。现在我们将达西定律(方程(1-4))写成紧凑的形式:

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu}(\nabla p - \rho g\nabla D) \quad (1-10)$$

我们将常常见到的算子的联合是 $\nabla\cdot(f\nabla u)$, 这里 f 和 u 两个都是数量函数。由于 $f\partial u/\partial x$, $f\partial u/\partial y$ 和 $f\partial u/\partial z$ 是向量 $(f\nabla u)$ 之 x , y 和 z 方向的分量, 于是

$$\nabla\cdot(f\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (1-11)$$

这种联合的一个特例是函数之梯度的散度, 即 $\nabla\cdot(\nabla u)$ 。这称为 u 的拉普拉斯算子, 并缩写为 $\nabla^2 u$ 。在方程(1-11)中取 $f=1$, 我们得到:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1-12)$$

6. 单相流的一般方程

如果我们能对任何维数的情形使用相同的微分方程, 则在以后的讨论中将是方便的。我们能够通过定义下述的“几何因子”函数 α 来作到这一点:

$$\text{一维: } \alpha(x, y, z) = A(x) \quad (1-13a)$$

$$\text{二维: } \alpha(x, y, z) = H(x, y) \quad (1-13b)$$

$$\text{三维: } \alpha(x, y, z) = 1 \quad (1-13c)$$

这时方程(1-6), (1-7)和(1-8)的每一个均能写成:

$$-\frac{\partial(\alpha\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\alpha\rho v_z)}{\partial z} + \alpha q = \alpha \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (1-14)$$

我们假定, 在二维流动情况下 v_z 为零, 而在一维流动情况 v_y 和 v_z 均为零。这样我们就把方程(1-14)和方程(1-6)和(1-7)对应起来了。

由于 α 和 ρ 都是数量函数, 于是 $(\alpha\rho v_x)$, $(\alpha\rho v_y)$ 和 $(\alpha\rho v_z)$ 便是向量 $(\alpha\rho\vec{v})$ 的 x , y 和 z 方向之分量。应用散度的定义, 方程(1—14)能写成非常紧凑的形式:

$$-\nabla \cdot (\alpha\rho\vec{v}) + \alpha q = \alpha \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (1-15)$$

最后, 将(1—10)代入(1—15), 可得到单相流动的一个一般方程:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha\rho K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D) \right] + \alpha q = \alpha \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (1-16)$$

除了给定边界条件外, 也需要给定孔隙度及流体的状态方程, 即孔隙度、密度和压力之间的关系:

$$\phi = \phi(p), \quad \rho = \rho(p)$$

当这些都已作好的时候, 从理论上讲, 我们便有了求解问题必需的所有资料。

7. 边界条件

在油藏模拟时, 通常的边界条件是, 油藏介于某个无液流通过的闭曲线 C 之间, 而在井中注入和采出流体, 这些井都可按点源、点汇处理。严格地说, 我们将通过规定向量 \vec{v} 在曲线 C 上的法向分量等于零的办法表示不流动边界条件。对任意曲线, 要在数值计算上作到这一点是较困难的。然而, 对曲线边界附近的精确解决, 常常是意思不大的; 我们的兴趣主要是在油藏的內部。因此, 如图2所示用粗略的办法表示曲线边界就可以了。油藏被放入一个矩形(或长方的平行六面体)之中, 在闭曲线 C 之外, 函数 K 及 ϕ 都假定为零。

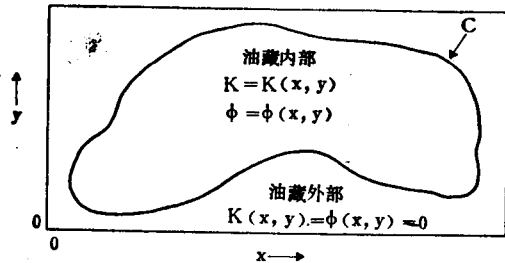


图2 不规则油藏示意图

如上说过的, 井等价于点源或点汇。在数值上, 我们不能给出真实的点源或点汇, 在这里, 除了井点而外 q 到处为零, 而在井点处, q 为无穷。我们还是采取近似的办法。设 Q 是所要注入井内的质量速度, 而 V 是井所在小单元的体积, 在此小单元内, 我们取

$$q = Q/V$$

在单元外, 取 q 为零。既然我们将要把计算区域划分成间隔为 Δx (对一维)、 Δx 和 Δy (对二维), 以及 Δx 、 Δy 和 Δz (对三维)的格子, 那么我们就取 $V = A\Delta x$ (对一维), $V = H\Delta x\Delta y$ (对二维), 或者 $V = \Delta x\Delta y\Delta z$ (对三维)。

当然, 有时我们希望油藏边界的部分或全部都是直线。在这种情况下, 不流动边界条件容易通过规定 \vec{v} 的法向分量为零的办法给出。穿越边界的流量也能够通过规定 \vec{v} 的法向分量的数值而给定; 另一个容易的处理方法是, 仍要求无液体通过此边界, 而在边界上或其附近的格子点放置假想井。在这样的假想井中注入流体表示流体穿越边界进入区域, 采出流体则表示流体穿越边界流出区域。

最后, 在所有可能的边界条件中, 还要包括无论在曲线或直线边界上或者在井点(即内点)给定压力而不是给定速度的边界条件。

8. 单相流的特殊情况

考察方程(1—16)的几种简化情况——引出数学物理的经典方程的简单情况——是有意义的。这些简单的方程并不是油藏模拟数值求解的直接对象, 但它们将作为解释用于模拟的

各数值方法的极好的典型。

最简化的情形就是假定重力的影响可以忽略,且流动区域内没有点源或点汇。当取 $\nabla D = 0$ 和 $q = 0$, 方程(1-16)能够写为:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\alpha \rho K}{\mu} \nabla p \right) = \alpha \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} \quad (1-17)$$

根据流体状态方程的不同选取, 方程(1-17)将有几种不同的情况。

具有恒定压缩性的理想液体

流体的压缩系数 c , 在等温条件下由下式定义:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (1-18)$$

在理想液体, 即具有恒定的压缩系数(也具有恒定的粘度)的液体的情况下, 积分得:

$$\rho = \rho_0 \exp(c(p - p_0)) \quad (1-19)$$

这里 ρ_0 是标准压力 p_0 下的密度。这个特殊的状态方程对大多数液体都是适用的, 除非它含有大量的溶解气。根据方程(1-18)有:

$$\rho dp = \frac{d\rho}{c}$$

$$\rho \nabla p = \frac{1}{c} \nabla \rho$$

于是方程(1-17)变为:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\alpha K}{\mu c} \nabla \rho \right) = \alpha \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t}$$

若孔隙介质和油藏还是均质的, 则 α 、 K 和 ϕ 都是均匀的, 于是我们得到:

$$\nabla^2 \rho = \frac{\phi \mu c}{K} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1-20)$$

这同下面要讨论的热传导的傅里叶方程形式完全相同。

具有轻微压缩性的液体

在有轻微压缩性的液体的情况, 对压力可写出和(1-20)同样的方程, 即

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1-21)$$

一些分析方法, 如拉普拉斯变换用于求解热传导方程以模拟油藏动态时较之式(1-20), 方程(1-21)最常被运用。这样作时, 重要的是认识轻微压缩性之假定的重要性。为了阐明这个假定之本质, 我们将方程(1-18)写为 $d\rho = c\rho dp$, 于是得到:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c\rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1-22)$$

及

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = c\rho \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-23)$$

将方程(1-23)对 x 微分, 则得

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = c\rho \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = c\rho \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c^2 \rho \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2$$

对 $\partial^2\rho/\partial y^2$ 和 $\partial^2\rho/\partial z^2$ 类似的表达式也成立, 这样一来

$$\nabla^2 p = c\rho\nabla^2 p + c^2\rho\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right] \quad (1-24)$$

将方程(1-22)和(1-24)代入(1-20)并除以 $c\rho$, 则得:

$$\nabla^2 p + c\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{\phi\mu c}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1-25)$$

为使方程(1-21)是(1-25)也是(1-20)的一个很好的近似, 必须

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \gg c\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right]$$

这就要求 c 很小。

理想气体

当理想气体通过多孔介质流动时, 我们仍能忽略重力影响, 其状态方程是:

$$\rho = \frac{M}{RT} p \quad (1-26)$$

式中 M 是分子量, R 是气体常数, 而 T 为绝对温度。将方程(1-26)代入(1-17)则有:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha K}{\mu} p \nabla p \right] = \alpha \frac{\partial (\phi p)}{\partial t}$$

若 α 、 K 、 ϕ 和 μ 仍视为常数时, 这个方程便能写成很简单的形式:

$$\nabla^2 p^2 = \frac{\phi\mu}{K\rho} \frac{\alpha p^2}{\alpha t} \quad (1-27)$$

方程(1-27)是非线性的, 它十分类似于式(1-21)。

不可压缩流动

单相流动问题的重要的一类是不可压缩流动。当 ρ 和 ϕ 都为常数时, 方程(1-16)变成:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D) \right] + \frac{\alpha q}{\rho} = 0 \quad (1-28)$$

定义势函数

$$\Phi = p - \rho g D$$

是方便的。

这时方程(1-28)就变成:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha K}{\mu} \nabla \Phi \right] + \frac{\alpha q}{\rho} = 0$$

在均质油藏(α 和 K 均为常数)以及粘度为常数的情况下, 此方程简化为泊松方程如下:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{q\mu}{K\rho} = 0$$

当区域中无源无汇时, 则变为拉普拉斯方程(见下):

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

在足够规则的边界条件下, 势论的结果(其中包含有拉普拉斯方程的解)能用于某些简单的油藏模拟问题。

§ 3 二阶微分方程的类型

二阶微分方程有三种基本类型, 抛物型、椭圆型和双曲型。我们需要有能力区别这些类

型, 因为对它们的数值求解方法需要分别考虑, 如同我们将在第三、第四和第五章中所要作的。在以下的讨论中, 变量 u 是一般化了的因变量。

1. 抛物型方程

典型的抛物型方程是描述扩散或热传导过程的傅里叶方程:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1-29)$$

它是在扩散、热传导和在电的传导(在纯电阻材料中)理论中产生的。这里 k 是扩散系数或热(或电)传导系数。

2. 椭圆型方程

拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = 0$ 和泊松方程 $\nabla^2 u = f(x, y, z)$ 是最简单的椭圆型方程, 它们是在静电场和磁场理论以及不可压缩流体动力学中提出的。

3. 双曲型方程

典型的双曲型方程是波动方程:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1-30)$$

它是在声学 and 电动力学中提出的。这里, v 是声音或电磁扰动的传播速度。

4. 方程的分类

如果我们限于两个自变量(x 和 y 或 x 和 t 两种情况)的情形, 则这些方程可写成下面的一般形式:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, u\right) \quad (1-31)$$

这个方程于是可被分成以下三种类型:

- 1) $A \cdot B > 0$, 椭圆型
- 2) $A \cdot B = 0$, 抛物型
- 3) $A \cdot B < 0$, 双曲型

这同代数方程

$$Ax^2 + By^2 = y$$

有明显的类似, 当 $A \cdot B > 0$ 时, 它是椭圆的方程, 当 $B = 0$, 是抛物线的方程, 而当 $A \cdot B < 0$ 时, 它是双曲线的方程。

5. 一阶双曲型方程

在一维情况下, 二阶双曲型方程(1-30)便是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

它能被因式分解为如下的两个一阶部分:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0$$

其第二个因子等价于一阶对流方程:

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1-32)$$