

普通高等教育基础课规划教材

线性代数简明教程

◆ 俞南雁 编著

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育基础课规划教材

线性代数简明教程

俞南雁 编著

机械工业出版社

本书为本科非数学专业(理工、经管、农林)教材,内容包括矩阵、行列式、向量、线性方程组、相似矩阵与二次型等.本书在编排上以矩阵为主线,叙述上适当突出变换、不变量、标准形和分类的数学思想,注重数学概念的实际背景及矩阵方法的实际应用.习题按基本要求和较高要求分为A、B两组(A组按节设置,B组按章设置),书末附有答案及提示,方便各类学校使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/俞南雁编著. —北京:机械工业出版社,2004
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 7-111-14884-3

I. 线... II. 俞... III. 线性代数—高等学校—教材 IV.
0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 067923 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑:郑丹 责任编辑:郑丹 版式设计:冉晓华
责任校对:李秋荣 封面设计:饶薇 责任印制:李妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5·5.5 印张·212 千字
定价:15.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话(010)68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

前 言

线性代数是高等学校众多专业必修的一门基础课程。它的任务是提供描述、分析和研究多个变量与多个变量之间线性关系的基本数学理论、数学思维和数学方法。本书以矩阵为主线，叙述矩阵及其运算，矩阵的相抵、相似和相合三种变换（归根结底也是运算）及相应的不变量（秩、迹、行列式、特征值、惯性指数等）和标准形，以及矩阵方法的两大典型应用——线性方程组和二次型。至于线性代数的几何理论，本书只限于介绍 n 维向量空间的基本结构及由可逆矩阵和正交矩阵表征的相应变换。这一方面是受学时数和大纲的限制，另一方面有了这个基础再抽象就不难了。

具体细节方面作如下几点说明：

1. n 维向量是作为矩阵的特款来定义的，较之另行定义更紧凑些；排列的逆序数的定义也作了一点简化；线性方程组的“结构式通解”、矩阵的“相似对角化”等提法，得到了许多作者的认同，本书仍然采用这种提法。

2. 矩阵的初等行变换不改变列向量组之间的关系，以及藉此得出的求向量组的秩、极大无关组和线性表示式的“一揽子”方法，已得到普遍的认同，本书仍采取这一精简有效的处理方法。

3. 行列式是方阵的一个重要数字特征，是方阵在转置和相似下的不变量，并且纵向关联许多内容，以此来定位它在课程中的地位。

4. 适当突出了变换、分类、标准形和不变量的数学思想，使条理更清晰，本质更容易把握。

5. 每章最后一节是专门讲述应用题材、应用背景的，它既可供教师系统讲授或选择若干材料穿插到有关部分讲授，也可作为学生的课外阅读材料。相信这些内容对提高学习兴趣、激发探索欲望以及提升数学素质是有益的。

6. 本书取材的上限是全国硕士研究生入学考试大纲数学一、数学三的有关部分，授课学时数为 32~40。某些内容及定理的证明可以酌

IV

情取舍.

7. 动脑动手做习题是学习数学不可或缺的重要环节. 本书习题分 A, B 两组: A 组属基本要求, 应力求全会; B 组带有提高性质, 有一定难度, 其中一部分选自历年考研试题, 可根据情况选用, 学有余力和有志考研者不妨多做. 两类习题书末均有参考答案或提示.

王政贤教授详细审阅了全部书稿, 并提出了不少改进意见, 在此谨表示诚挚的谢意. 此外还要感谢东南大学成贤学院、远程学院以及机械工业出版社, 正是由于他们的大力支持, 本书才得以顺利出版.

限于水平, 书中不当之处在所难免, 恳请同行专家和广大读者批评指正.

编者

目 录

前言

第 1 章 矩阵运算 行列式	1
1.1 矩阵及其运算	1
1.2 行列式的定义	11
1.3 行列式的性质及计算	17
1.4 逆矩阵	26
1.5 分块矩阵及其运算	36
* 1.6 用矩阵和向量描述多变量之间的线性关系	42
习题 A	47
习题 B	54
第 2 章 矩阵的相抵与线性方程组	57
2.1 消元法与矩阵的秩	57
2.2 向量组的线性相关性和秩	65
2.3 线性方程组解的结构	76
2.4 矩阵的初等变换与初等矩阵	81
2.5 向量空间 坐标变换 线性变换	88
2.6 内积和正交变换	93
* 2.7 最小二乘解及广义逆矩阵	100
习题 A	104
习题 B	112
第 3 章 矩阵的相似、相合与二次型	116
3.1 方阵的特征值和特征向量	116
3.2 相似矩阵	121
3.3 二次型及其标准形	129
3.4 实二次型的惯性定理及定性分类	136
* 3.5 马尔可夫链、线性系统、极值判定等	141
习题 A	148
习题 B	153
参考答案及提示	156
参考文献	170

第 1 章 矩阵运算 行列式

通俗地说,线性代数是研究多个变量与多个变量之间线性关系的数学.所谓“线性关系”,也就是“一次关系”.矩阵(包括向量)正是用来描写和研究这种线性关系的基本工具.

本章主要讨论矩阵的运算及行列式.

1.1 矩阵及其运算

1.1.1 矩阵概念

矩阵及其运算是在研究线性方程组(一次联立方程式)求解和研究多变量问题的变量代换过程中发展起来的.线性方程组既是线性代数最古老的问题,又是当代科技、经济等领域一种最常用的数学模型. n 个未知量(不妨设为 x_1, x_2, \dots, x_n)的 m 个一次代数方程联立所得的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

称为 $m \times n$ 线性方程组.式(1.1)中诸系数 a_{ij} 按原相对位置可以排成一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

其他许多场合,人们也常遇到类似的数字排成的矩形表格:工厂中每月各种产品的产量日报表或消耗定额表,学校中各班成绩统计表等.数学上为显示这类表格是一个整体并便于参加运算,常用括号包围起来.

定义 1.1 由 mn 个数排成的 m 行、 n 列矩形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

称为 $m \times n$ 矩阵, 记作 A 或 $A_{m \times n}$, 也记作 $(a_{ij})_{m \times n}$. 其中, 数 a_{ij} 称为 A 的 (i, j) 元素 ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$), 下标 i 和 j 依次称为 a_{ij} 的行标和列标.

如果矩阵 A 与 B 行数相同、列数相同, 且对所有 i, j , 都有 $a_{ij} = b_{ij}$, 则称矩阵 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 例如由

$$\begin{pmatrix} 3 & x & -1 \\ 2 & 4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

可得 $x=1, y=7, z=3$.

$n \times n$ 矩阵也称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵. 一阶方阵 (a) 也可写为 a .

$1 \times n$ 矩阵也称为 n 维行向量, $n \times 1$ 矩阵也称为 n 维列向量. 行向量和列向量统称为向量. 很显然, 我们现在所说的向量, 是几何向量 (有大小、有方向的量) 的坐标形式的自然推广. 向量的元素通常称为分量. 例如 $\alpha = (3, 1, 0, -2)$ 是四维行向量, 其第二分量是 1.

1.1.2 加法及数乘

定义 1.2 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 称 $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 为 A 与 B 相加所得的和, 记为 $A + B$, 即

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 1.3 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, k 是数, 称 $(ka_{ij})_{m \times n}$ 为数 k 和矩阵 A (数乘) 的积, 记为 kA 或 Ak , 即

$$kA = Ak = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

例 1

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) (-2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

元素全为零的矩阵为**零矩阵**,记为 \mathbf{O} 或 $\mathbf{O}_{m \times n}$,零向量记为 $\mathbf{0}$. 手写不易辨认时可以从上下文或等式的左右端辨别 $0, \mathbf{0}$ 或 \mathbf{O} 的属性.

矩阵 $(-a_{ij})_{m \times n}$ 称为 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 的**负矩阵**,记为 $-\mathbf{A}$. 例如

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 则 } -\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

利用负矩阵可以定义矩阵的**减法**: 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$, 规定

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

也即

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

矩阵的加法(含减法)及数乘统称矩阵的**线性运算**. 根据定义 1.2 和定义 1.3 不难验证,线性运算有以下基本性质:

- (1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (交换律)
- (2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (结合律)
- (3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$
- (4) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$
- (5) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$
- (6) $k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A}$
- (7) $(k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$
- (8) $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$

根据定义或根据基本性质,还可以验证以下性质:

- (9) $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ (移项规则)
- (10) $k\mathbf{A} = \mathbf{O} \Leftrightarrow k = 0$ 或 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$

这些性质与数的运算类似,是不难理解、记忆和运用的.

利用向量的线性运算,线性方程组(1.1)可以简洁地表示为向量形式

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b}$$

其中, \mathbf{A}_k 是以方程组中 x_k 的系数为分量的列向量.

1.1.3 乘法

在叙述矩阵乘法的定义之前,先看一个例子.

例 2 某装配工厂把 s 种零部件装配成三种产品. 用 a_{ij} 表示组装一个第 i 种产品 ($i=1,2,3$) 需要第 j 种零部件的个数 ($j=1,2,\dots,s$). 每种零部件又有国产和进口之分, 用 b_{j1} 和 b_{j2} 分别表示国产的和进口的第 j 种零件的单价 ($j=1,2,\dots,s$). 记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} \end{pmatrix}$$

则用国产或进口零件生产一个第 i 种产品, 在零件方面的成本分别是

$$\begin{aligned} c_{i1} &= a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{is}b_{s1} \\ c_{i2} &= a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{is}b_{s2} \end{aligned} \quad (i=1,2,3)$$

可注意到 c_{ij} 是 \mathbf{A} 的第 i 行与 \mathbf{B} 的第 j 列对应元素乘积之和. 以 c_{ij} 为元素可得到 3×2 矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

定义 1.4 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times s}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times n}$, 令

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$$

称 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的积, 记为 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

由定义 1.4 可知, 矩阵乘积 \mathbf{AB} 有意义的前提是 \mathbf{A} 的列数等于 \mathbf{B} 的行数; 积 \mathbf{AB} 的行数等于 \mathbf{A} 的行数, \mathbf{AB} 的列数等于 \mathbf{B} 的列数; \mathbf{AB} 的 (i, j) 元素等于 \mathbf{A} 的第 i 行与 \mathbf{B} 的第 j 列的对应元素乘积之和.

例 3

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ 无意义}$$

$$(3) (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i \right) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

$$(4) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 & y_1 x_3 \\ y_2 x_1 & y_2 x_2 & y_2 x_3 \\ y_3 x_1 & y_3 x_2 & y_3 x_3 \end{pmatrix}$$

回头看线性方程组(1.1). 记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则 $m \times n$ 线性方程组(1.1) 又可以简洁地表示为矩阵形式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

矩阵乘法有以下运算性质:

(1) 结合律: $(AB)C = A(BC)$

(2) 左分配律: $A(B + C) = AB + AC$

右分配律: $(B + C)G = BG + CG$

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

证 性质(2)、(3)由读者完成, 仅证性质(1). 设

$$A = (a_{ip})_{m \times k}, B = (b_{pq})_{k \times s}, C = (c_{qj})_{s \times n}$$

$$AB = U = (u_{iq})_{m \times s}, BC = V = (v_{pj})_{k \times n}$$

显然, $(AB)C = UC$ 及 $A(BC) = AV$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 它们的 (i, j) 元素分别是

$$\sum_{q=1}^s u_{iq} c_{qj} = \sum_{q=1}^s \left(\sum_{p=1}^k a_{ip} b_{pq} \right) c_{qj}$$

$$\sum_{p=1}^k a_{ip} v_{pj} = \sum_{p=1}^k a_{ip} \left(\sum_{q=1}^s b_{pq} c_{qj} \right) = \sum_{q=1}^s \left(\sum_{p=1}^k a_{ip} b_{pq} \right) c_{qj}$$

它们是相等的, 因此 $(AB)C = A(BC)$. □

由于矩阵乘法适合结合律, 因此有限个矩阵的乘积

$$A_1 A_2 \cdots A_s \quad (s \geq 3)$$

可以不用括号.

值得注意的是, 矩阵的乘法一般说来不满足交换律, 即“ $AB = BA$ ”不总是成立的. 事实上, AB 有意义时 BA 未必有意义, 如例 3 的(1)、(2); 即使 AB 与 BA 都有意义, 也未必相等, 如例 3 的(3)、(4). 为了区别相乘的次序, 称 AB 为“ A 右乘以 B ”或“ B 左乘以 A ”.

同样值得注意的是, 仅由 $AB = O$ 未必能推断 $A = O$ 或 $B = O$, 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

进一步, 仅由 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, 以及 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, 未必能断言 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, 即对于矩阵乘法, 消去律一般不成立.

以上两点是矩阵乘法与数的乘法的不同之处. 当然, 在某些特殊情况下, 乘法可以交换; 把 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 的条件适当加强后, 也能从 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ 得出 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. 这些在后面可以看到.

定义 1.5 (方阵的正整数幂) 设 \mathbf{A} 为方阵, 规定

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}, \dots, \mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \mathbf{A} \quad (k \text{ 为正整数})$$

根据矩阵乘法结合律, 易证方阵的幂有以下性质:

$$(1) \mathbf{A}^k \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}$$

$$(2) (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}$$

其中, k, l 均为正整数.

因为矩阵乘法没有交换律, 所以一般而言 $(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$. 根据同样的理由, 初中代数中的“乘法公式”及高中代数中的“二项式定理”, 对于同阶方阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 来说一般也不成立, 例如

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} - \mathbf{AB} - \mathbf{B}^2 \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$$

但是如果方阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} “可交换”, 即 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 则有

$$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k,$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$$

⋮

总之, 当 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 时, “乘法公式”(包括二项式定理) 都成立.

例 4 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = (b_1 \ b_2 \ b_3)$, 求 $(\mathbf{AB})^k$.

解 $\mathbf{BA} = (b_1 \ b_2 \ b_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^k &= (\mathbf{AB})(\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) \cdots (\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{BA})(\mathbf{BA})(\mathbf{BA}) \cdots (\mathbf{BA})\mathbf{B} \\ &= \mathbf{A}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^{k-1} \mathbf{B} \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^{k-1} \mathbf{AB} \end{aligned}$$

$$= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^{k-1} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

例 5 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 求证 $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$,

其中, n 为正整数.

证 用数学归纳法. $n=1$ 时公式显然成立. 设 $n=k$ 时公式成立, 即 $\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$, 则根据方阵的幂的定义, 乘法的定义及三角公式有

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+1} &= \mathbf{A}^k \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta & -\cos k\theta \sin\theta - \sin k\theta \cos\theta \\ \sin k\theta \cos\theta + \cos k\theta \sin\theta & -\sin k\theta \sin\theta + \cos k\theta \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

表明当 $n=k+1$ 时, 要求证的公式也成立. 因此对一切正整数 n , 公式成立.

1.1.4 矩阵的转置

定义 1.6 把 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 的各行依次改为列(必然地 \mathbf{A} 的列依次改为行), 所得到的 $n \times m$ 矩阵称为 \mathbf{A} 的转置矩阵或 \mathbf{A} 的转置, 记为 \mathbf{A}^T (或 \mathbf{A}') 即

$$\text{若 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

由定义可见, \mathbf{A}^T 的 (i, j) 元, 正是 \mathbf{A} 的 (j, i) 元. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

矩阵的转置有下述运算性质:

(1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(3) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

(4) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

证 性质(1)、(2)、(3)极易验证.下面证(4).

设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 则 $(AB)^T$ 与 $B^T A^T$ 都是 $n \times m$ 矩阵, 而

$$(AB)^T \text{ 的 } (i, j) \text{ 元素} = AB \text{ 的 } (j, i) \text{ 元素} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki}$$

$$B^T A^T \text{ 的 } (i, j) \text{ 元素} = \sum_{k=1}^s b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki}$$

它们的确相等, 因此 $(AB)^T = B^T A^T$. □

1.1.5 几种特殊矩阵

1. 对称矩阵, 反对称矩阵

满足 $A^T = A$ 的矩阵 A 称为对称矩阵. 显然, 对称矩阵一定是方阵, 而方阵 $A = (a_{ij})$ 为对称矩阵的充要条件是对一切 i, j 有 $a_{ji} = a_{ij}$. 对称矩阵的直观特点是关于“对角线”($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 一线)对称.

例如, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ 是一个三阶对称矩阵.

满足 $A^T = -A$ 的矩阵 A 称为反对称矩阵. 显然, 反对称矩阵也一定是方阵. $A = (a_{ij})$ 是反对称矩阵的充要条件是对一切 i, j 有 $a_{ji} = -a_{ij}$. 因此反对称矩阵的对角线元素全是零.

例如, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个三阶反对称矩阵.

例 6 证明任一方阵都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

证 设 A 是一个 n 阶方阵, 则

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \quad (1.3)$$

因为

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2}(A + A^T) \right\}^T &= \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ \left\{ \frac{1}{2}(A - A^T) \right\}^T &= \frac{1}{2}(A - A^T)^T = -\frac{1}{2}(A - A^T) \end{aligned}$$

所以, 式(1.3)中的 $\frac{1}{2}(A + A^T)$ 是对称矩阵, $\frac{1}{2}(A - A^T)$ 是反对称矩阵.

本书第3章中将会重点讨论对称矩阵的某些重要性质和应用.

2. 对角矩阵, 数量矩阵和单位矩阵

以下三种特殊方阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

依次称为对角矩阵、数量矩阵(或纯量矩阵)和单位矩阵,其中未写出的非对角元素全为零.

显然,这三种矩阵都是对称矩阵,并且对角矩阵是对称矩阵的特例,数量矩阵是对角矩阵的特例,单位矩阵又是数量矩阵的特例.

以 a_1, a_2, \dots, a_n 为对角元的对角矩阵也可记为 $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$$\text{例 7} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \lambda_3 a_{13} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{23} \end{pmatrix}$$

单位矩阵常用 I 或 I_n (也可用 E 或 E_n) 表示,数量矩阵常用 aI 或 aI_n 表示.符号 δ_{ij} 称为克朗内格(Kronecker)记号,其定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.4)$$

利用克朗内格记号,单位矩阵 I 也可以表示成 (δ_{ij}) ,而数量矩阵则可表示为 $(a\delta_{ij})$.

根据矩阵乘法的定义,可验知:同阶对角矩阵相乘只要把对应的对角线元相乘,即:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

单位矩阵或数量矩阵与其他矩阵相乘时

$$\begin{aligned} I_m A_{m \times n} &= A_{m \times n} = A_{m \times n} I_n \\ (aI_m) A_{m \times n} &= aA_{m \times n} = A_{m \times n} (aI_n) \end{aligned}$$

成立.

由此可见,数量矩阵 aI 在乘法中所起的作用如同数 a 乘矩阵.特别地,当 $m = n$ 时,有

$$(aI)A = aA = A(aI)$$

即任何方阵与同阶数量矩阵乘法可交换.

例 8 设 A, B 是 n 阶方阵, 且 $AB + BA = I$, 求证 $A^2B = BA^2$.

证 在已知等式两边左乘以 A , 得

$$A^2B + ABA = A$$

在已知等式两边右乘以 A , 得

$$ABA + BA^2 = A$$

所得两式相减, 得 $A^2B - BA^2 = O$, 即 $A^2B = BA^2$.

3. 三角矩阵

满足条件 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$ 的方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{对角线下方元素全为零})$$

称为上三角矩阵.

满足条件 $i < j$ 时, $a_{ij} = 0$ 的方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{对角线上方元素全为零})$$

称为下三角矩阵.

上、下三角矩阵统称三角矩阵. 显然, 对角矩阵也是三角矩阵的特例.

可以证明, 上(下)三角矩阵的积仍是上(下)三角矩阵.

4. 方阵的多项式

设 A 是 n 阶方阵, 多项式

$$f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

则定义

$$f(A) = a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

并称 $f(A)$ 为方阵 A 的多项式. 其中, I 是与 A 同阶的单位矩阵.

例 9 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, 求 $f(A)$.

解 $f(A) = 2A^2 - 3A + 4I$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

1.2 行列式的定义

本节和下节讨论方阵的一个数字特征——行列式.更确切地说,行列式是定义在方阵集合上的一个函数.先看二、三阶行列式.

1.2.1 二阶和三阶行列式

如大家所熟知的二元一次联立方程式,即 2×2 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

容易用加减消元法得出:当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1.5)有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (1.6)$$

为使式(1.6)更加简明便于记忆,把式中分母,即二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 的对角线元素乘积 $a_{11}a_{22}$ 减副对角线元素乘积 $a_{12}a_{21}$ 的差(“对角线法则”,见图 1.1),称为二阶方阵 A 的行列式,简称二阶行列式,记为 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.7)$$

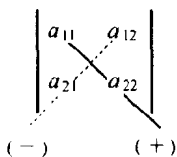


图 1.1

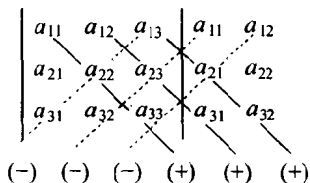


图 1.2

利用二阶行列式,式(1.6)可表示为