中学数学教学参考丛书

幂的运算和幂函数

上海教育出版社

中学数学教学参考丛书

幂的运算和幂函数

顾鸿达 朱成杰 王致平 编

上海教育出版社

内 容 提 要

本书主要介绍幂的意义、性质，幂函数的定义、初等性质和解析性质，最后简要介绍了复数幂和复变数幂函数. 书中注意讲深讲透一些基本概念，例如有阶段的推广幂的概念，并依次讲清各种指数情况下幂的性质；又如介绍了幂函数的几种定义，特别是公理化的定义，以利于深入理解幂函数的本质. 并且，对于中学数学中常常用到的关于幂的运算技巧(包括恒等变形和不等式)，以及有关幂函数的复合函数的讨论，书中通过典型例题也一一作了介绍，并注意揭示规律性. 读者可从中对幂运算和幂函数有一个全面而系统的了解. 本书可供中学数学教师教学和业务进修参考，也可供中学生课外阅读。

中学数学教学参考丛书

幂的运算和幂函数

顾鸿达 朱成杰 王致平 编

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 江苏高邮印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 2.5 字数 53,000

1983 年 3 月第 1 版 1983 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—30,800 本

统一书号：7150·2856 定价：0.22 元

目　　录

一、幂 运 算

1. 幂指数概念的推广

我们知道，乘方是求相同因数积的运算．幂就是乘方运算的结果．通常记

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n,\qquad \text{其中 } n \text{ 为正整数},$$

把 a^n 叫做 a 的 n 次幂，或 a 的 n 次方；这里，a 是幂的底数，n 是幂的指数．由于 n 是正整数，这里定义的幂还特别叫做正整数指数幂．

当 a 为实数，m、n 为正整数时，由乘法性质，可直接推出正整数指数幂的运算律：

i．$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

ii．$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n}, & \text{当 } m>n \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } m=n \text{ 时},\\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{当 } m<n \text{ 时};\end{cases}$ （其中 $a\neq0$）

iii．$(a^m)^n=a^{mn}$；

iv．$(ab)^n=a^nb^n$；

v．$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$，其中 $b\neq0$．

现在来推广幂指数概念，把幂指数从正整数推广到整数、有理数和实数中去，但要使推广后的幂的运算律仍保持正整数指数幂的五条运算律．

定义1 当$a\neq0$时，规定

$$a^0=1,$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \qquad n\text{ 为正整数}.$$

在这里，零的零次幂及零的负整数次幂都没有意义.

我们把正整数指数幂、零指数幂和负整数指数幂统称为整数指数幂.

正整数指数幂的五条运算律，当指数推广到整数时是否还成立呢？下面先就m、n都为负整数的情况来讨论.

令$m=-s$、$n=-t$，则s、t是正整数. 当$a\neq0$、$b\neq0$时，运用有理分式的运算法则把问题转化为正整数指数幂的运算，从而有：

i. $a^m\cdot a^n=a^{-s}\cdot a^{-t}=\frac{1}{a^s}\cdot\frac{1}{a^t}=\frac{1}{a^{s+t}}=a^{-(s+t)}=a^{m+n}$.

ii. $a^m\div a^n=a^{-s}\div a^{-t}=\frac{1}{a^s}\div\frac{1}{a^t}=\frac{a^t}{a^s}$,

当$m>n$，即$t>s$时，

$$\frac{a^t}{a^s}=a^{t-s}=a^{(-s)-(-t)}=a^{m-n};$$

当$m=n$，即$t=s$时，

$$\frac{a^t}{a^s}=1;$$

当$m<n$，即$t<s$时，

$$\frac{a^t}{a^s}=\frac{1}{a^{s-t}}=\frac{1}{a^{(-t)-(-s)}}=\frac{1}{a^{n-m}}.$$

iii. $(a^m)^n=(a^{-s})^{-t}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^s}\right)^t}=a^{st}=a^{(-s)(-t)}=a^{mn}$.

iv. $(ab)^n=(ab)^{-t}=\frac{1}{(ab)^t}=\frac{1}{a^tb^t}=a^{-t}b^{-t}=a^nb^n$.

v. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{-t}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^t}=\frac{b^t}{a^t}=a^{-t}b^t=a^nb^{-n}=\frac{a^n}{b^n}$.

当m为正整数、n为负整数；或m为负整数、n为正整数；或m、n中至少有一个为零时，用类似的方法不难证明这时仍然保持这五条运算律. 验证的结果表明定义1是合理的. 并且，由于

$$a^m\div a^n=a^m\cdot a^{-n}=a^{m+(-n)},\quad (\text{其中 } a\neq 0,\ m、n \text{ 为整数})$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^nb^{-n},\quad (\text{其中 } a、b\neq 0,\ m、n \text{ 为整数})$$

便可将原来的五条运算律归并成三条：

i. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,

ii. $(a^m)^n=a^{mn}$,

iii. $(ab)^n=a^nb^n$,

其中m、n为整数，a、b为非零实数.

定义 2 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$; （其中 $a\geqslant 0$, m、n 是正整数）

$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$. （其中 $a>0$, m、n 是正整数）

这样就定义了分数指数幂. 我们把整数指数幂与分数指数幂统称为有理指数幂.

可以验证有理指数幂仍保持整数指数幂的三条运算律. 若令$\frac{m_1}{n_1}$、$\frac{m_2}{n_2}$分别为两个正的既约分数，下面仅就指数为$\frac{m_1}{n_1}$，$-\frac{m_2}{n_2}$的情况来验证. 运用根式的运算法则，可把有理指数幂转化为整数指数幂的运算，从而有

i. $a^{\frac{m_1}{n_1}}\cdot a^{-\frac{m_2}{n_2}}=\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n_2]{a^{m_2}}}=\sqrt[n_1n_2]{a^{m_1n_2-m_2n_1}}$

$=a^{\frac{m_1n_2-m_2n_1}{n_1n_2}}=a^{\frac{m_1}{n_1}+\left(-\frac{m_2}{n_2}\right)}$.

ii. $(a^{\frac{m_1}{n_1}})^{-\frac{m_2}{n_2}}=\frac{1}{\sqrt[n_2]{(\sqrt[n_1]{a^{m_1}})^{m_2}}}=\frac{1}{\sqrt[n_1n_2]{a^{m_1m_2}}}$

$$=a^{-\frac{m_1m_2}{n_1n_2}}=a^{\frac{m_1}{n_1}\left(-\frac{m_2}{n_2}\right)}.$$

iii. $(ab)^{\frac{m_1}{n_1}}=\sqrt[n_1]{(ab)^{m_1}}=\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\cdot\sqrt[n_1]{b^{m_1}}=a^{\frac{m_1}{n_1}}b^{\frac{m_1}{n_1}}$;

$$(ab)^{-\frac{m_2}{n_2}}=\frac{1}{\sqrt[n_2]{(ab)^{m_2}}}=\frac{1}{\sqrt[n_2]{a^{m_2}}\cdot\sqrt[n_2]{b^{m_2}}}=a^{-\frac{m_2}{n_2}}b^{-\frac{m_2}{n_2}}.$$

对于有理指数幂，除了两个指数都为整数指数不用验证外．另外还有两个分数指数都为正；都为负；一负一正；以及一个为分数指数，一个为整数指数等情况，都可用类似方法一一加以验证．

定义分数指数幂时，底数不能为负数．这是因为在实数范围内负数的 n 次方根不一定有意义．但是，因为任意实数的奇次方根还是有意义的，因此约定对负底数奇次方根的情况可沿用分数指数幂的记号 $a^{\frac{p}{2k+1}}$，其中 $a<0$、p 为整数、k 为正整数，即：

$$a^{\frac{p}{2k+1}}=\sqrt[2k+1]{a^p}.$$

定义分数指数幂时，底数不能为负数的另一原因是：即使负底数的分数指数幂有意义，也不一定能保持幂的运算律．正因为如此，负底数的分数指数幂只是一种记法而已，已不能套用幂的运算律，如果出现在运算过程中，通常先设法将负底数化成正底数，然后才进行运算．如前述式子 $a^{\frac{p}{2k+1}}$（其中 $a<0$，p 为整数，k 为正整数），当 p 为偶数时，

$$a^{\frac{p}{2k+1}}=\sqrt[2k+1]{a^p}=\sqrt[2k+1]{(-a)^p}=(-a)^{\frac{p}{2k+1}};$$

当 p 为奇数时，

$$a^{\frac{p}{2k+1}}=\sqrt[2k+1]{a^p}=-\sqrt[2k+1]{(-a)^p}=-(-a)^{\frac{p}{2k+1}}.$$

定义3 当 a 为正数、α 为无理数时，如果对于任一收敛于 α 的有理数列 $\{\alpha_n\}$ 所对应的 $\{a^{\alpha_n}\}$ 都收敛于同一个极限，则把这一极限值定义为 a^α，记成

$$a^\alpha=\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}.$$

还有，零的正无理次幂为零，零的负无理次幂无意义.

由于我们是用有理指数幂的极限去定义无理指数幂，就象对有理指数幂对底数的要求一样，只能是负数的无理指数幂无意义.

有理指数幂与无理指数幂统称为实数指数幂. 利用极限的性质和指数函数的连续性，可以验证实数指数幂仍保持有理指数幂的三条运算律. 下面只就 α、β 均为无理数的情形验证如下：

设有理数列 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 分别收敛于无理数 α、β，即

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha、\quad \lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta,$$

则有

i. $$a^\alpha a^\beta=\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}\cdot\lim_{n\to\infty} a^{\beta_n}=\lim_{n\to\infty}(a^{\alpha_n}a^{\beta_n})=\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n+\beta_n}$$
$$=a^{\alpha+\beta}.$$

ii. $$(a^\alpha)^\beta=\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n})^{\beta_m}=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}(a^{\alpha_n})^{\beta_m}=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a^{\alpha_n\beta_m}$$
$$=a^{\alpha\beta}.$$

iii. $$(ab)^\alpha=\lim_{n\to\infty}(ab)^{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}(a^{\alpha_n}b^{\alpha_n})=\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}\cdot\lim_{n\to\infty} b^{\alpha_n}$$
$$=a^\alpha b^\alpha.$$

当然，完整的证明过程还应包括 α、β 中一为无理数，另一为有理数的情形.

幂指数从自然数逐步推广到实数的过程中，指数幂始终保持着幂的三条运算律，但要注意扩充后的幂指数对于底数

的限制.

[例 1] 1) 当 a 为任意实数时, $(a+2)^0=1$ 恒成立吗?

2) 若代数式 $(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(x-2)^{\frac{1}{2}}$ 在实数范围内有意义,求 x.

解 1) 因为零的零次幂无意义, 故当 $a=-2$ 时 $(a+2)^0$ 无意义,此即表明当 a 为任意实数时 $(a+2)^0$ 不恒等于 1.

2) 如果原式在实数范围内有意义,底数必须满足:

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-2\geqslant 0.\end{cases}$$

解上述不等式组,得 $x=2$.

[例 2] 若 x^x 有意义,求实数 x 的范围.

解 当 $x>0$ 时, 因为正数的正实数次幂有意义, 所以 x^x 有意义.

当 $x=0$ 时,因为零的零次幂无意义,所以 x^x 无意义.

当 $x<0$ 时,分下面几种情形:

i. x 为负整数 $-n$ 时 (n 为正整数), $x^x=\frac{1}{(-n)^n}$, 这时 x^x 有意义;

ii. $x=\frac{p}{2k+1}$,其中 k 为正整数,p 为负整数,且 $2k+1$、p 互质,则

$$x^x=\left(\frac{p}{2k+1}\right)^{\frac{p}{2k+1}}=\sqrt[2k+1]{\left(\frac{p}{2k+1}\right)^p}.$$

这时 x^x 也是有意义的;

iii. $x=\frac{p}{2k}$, 其中 k 为正整数, p 为负整数, p 与 $2k$ 互质. 由于负数的偶次方根在实数范围内不存在, 所以这时 x^x 无意义.

iv. x 取负无理数，因为负实数的无理次幂无意义，所以这时 x^x 无意义.

综上所述，使 x^x 有意义的实数 x 范围是：正数、负整数和化成最简分数是形如 $\frac{p}{2k+1}$（其中 k 为正整数，p 为负整数，$2k+1$ 与 p 互质）的负分数.

2. 幂 的 运 算

前面分别用分式和根式定义负整数指数幂和分数指数幂，因此分式和根式都可以写成幂，分式和根式的运算也可以看成幂的运算. 反过来，幂的运算也常转化为分式与根式的运算.

[例 1] 计算

$$0.064^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+81^{0.75}-5^{-1}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{0}。$$

解 $\because$ $0.064^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{0.064}}=\frac{5}{2}$,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=(-3)^{2}=9,$$

$$81^{0.75}=81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^{3}}=27,$$

$$5^{-1}=\frac{1}{5},$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{0}=1,$$

$$\therefore\quad 原式=\frac{5}{2}-9+27-\frac{1}{5}+1=21.3.$$

[例 2] 化简 $\sqrt{\frac{2\cdot\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[5]{a}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{-2\cdot\sqrt[5]{a^{3}}}{\sqrt{a}}}$，其中 $a>0$.

解法一 如果限用根式的运算律，则有

$$\text{原式}=-\sqrt{\sqrt[15]{\frac{2^{15}\cdot 2^{5}a^{5}}{a^{3}}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[10]{\frac{2^{10}\cdot a^{6}}{a^{5}}}}$$

$$=-\sqrt[30]{2^{20}\cdot a^{2}}\cdot\sqrt[30]{2^{10}\cdot a}$$

$$=-\sqrt[30]{2^{30}a^{3}}=-2\sqrt[10]{a}.$$

由于这题仅是对 2、a 施行乘、除、乘方、开方运算，我们就可将同底数的幂指数按指数法则归并，使运算简化如下：

解法二 原式$=-2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$

$$=-2a^{\frac{1}{10}}=-2\sqrt[10]{a}.$$

对于某些含有分数指数幂项的算式，当几个幂中的指数绝对值较小的幂用辅助字母替换后，如果其余的幂均能化成正整数指数幂，这就可把含有分数指数幂的无理式的运算归结为有理式的运算.

[例 3] 化简 $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}+y^{-\frac{1}{6}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}-y^{-\frac{1}{6}}}$，其中 $x>0$、$y>0$、$x\neq y$.

解 若令 $x^{\frac{1}{6}}=s$、$y^{-\frac{1}{6}}=t$，则 $x^{\frac{1}{2}}=s^{3}$、$y^{-\frac{1}{2}}=t^{3}$. 所以，

$$\text{原式}=\frac{s^{3}+t^{3}}{s+t}-\frac{s^{3}-t^{3}}{s-t}$$

$$=(s^{2}-st+t^{2})-(s^{2}+st+t^{2})$$

$$=-2st=-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}.$$

[例 4] 如果 $x=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$、$y=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$，其中 $n>0$，求证 $y^{x}=x^{y}$.

证明 $y^{x}=\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n}}}$，

$$x^y=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}},$$

$$\therefore\quad y^x=x^y.$$

从例4的等式出发，可以得到一系列的数对，它们互为底数和幂指数时幂相等．例如，令 n 为1、2、$\frac{1}{2}$，就得到

$$4^2=2^4、\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}}、(3\sqrt{3})^{\sqrt{3}}=(\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}.$$

［例5］ 求证：$(2^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$。

分析 可以两边各自乘三次方来验证等式，但太繁．注意到右边恰巧成 a^2-ab+b^2 的形状，不妨左、右两边都乘上右边的有理化因子．

证明 $\because\left[\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1,$$

$$(2^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{3}}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot(2^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{3}}\cdot(1+2^{\frac{1}{3}})$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}[(2^{\frac{1}{3}}-1)(1+2^{\frac{1}{3}})^3]^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}[(2^{\frac{2}{3}}-1)(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{4}{3}}+1)]^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=1,$$

又因为$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\neq 0$, 所以原式得证。

[例 6]　a、b 是两个不相等的正数, $x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2ab}{a^2-b^2}}$, 求证

$$\frac{ab}{a^2+b^2}\left(x^{\frac{a}{b}}+x^{\frac{b}{a}}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}.$$

证明　左边$=\frac{ab}{a^2+b^2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2a^2}{a^2-b^2}}+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b^2}{a^2-b^2}}\right]$

$$=\frac{ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b^2}{a^2-b^2}}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+1\right]$$

$$=\frac{ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b^2}{a^2-b^2}}\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b^2}{a^2-b^2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}=\text{右边}.$$

对于条件恒等式,特别是已知条件中给出连比、连等关系的恒等式证明, 通常采用设辅助字母的方法, 将连比、连等式中的字母间关系转化为这些字母与辅助字母间关系, 从而可简化恒等式的证明.

[例 7]　已知$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, a、b、x、y 为正数, α 为实数, 求证

$$\frac{x^{\alpha+1}+a^{\alpha+1}}{x^\alpha+a^\alpha}+\frac{y^{\alpha+1}+b^{\alpha+1}}{y^\alpha+b^\alpha}=\frac{(x+y)^{\alpha+1}+(a+b)^{\alpha+1}}{(x+y)^\alpha+(a+b)^\alpha}.$$

证明　令$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k$, 则 $x=ak$, $y=bk$. 分别代入待证算式的两边:

$$\text{左边}=\frac{a^{\alpha+1}(k^{\alpha+1}+1)}{a^\alpha(k^\alpha+1)}+\frac{b^{\alpha+1}(k^{\alpha+1}+1)}{b^\alpha(k^\alpha+1)}$$

$$=(a+b)\left(\frac{k^{\alpha+1}+1}{k^{\alpha}+1}\right),$$

$$右边=\frac{(ak+bk)^{\alpha+1}+(a+b)^{\alpha+1}}{(ak+bk)^{\alpha}+(a+b)^{\alpha}}$$

$$=(a+b)\left(\frac{k^{\alpha+1}+1}{k^{\alpha}+1}\right).$$

这就证明了原式成立.

[例 8] 已知 $ax^n=by^n=cz^n$, 其中 n 为奇数, 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, 求证: $(ax^{n-1}+by^{n-1}+cz^{n-1})^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}$.

证明 令 $ax^n=bx^n=cx^n=k$, 则 $a=kx^{-n}$, $b=ky^{-n}$, $c=kz^{-n}$. 分别代入待证算式的两边:

$$左边=[k(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})]^{\frac{1}{n}}=k^{\frac{1}{n}},$$

$$右边=(kx^{-n})^{\frac{1}{n}}+(ky^{-n})^{\frac{1}{n}}+(kz^{-n})^{\frac{1}{n}}$$

$$=k^{\frac{1}{n}}(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})=k^{\frac{1}{n}},$$

这就证明了原式成立.

3. 幂的不等式

1. 幂的比较法则

运用不等式的基本性质, 可以直接推出关于底数为正数的幂的比较法则.

定理 1 如果 $a>b>0$, α 为任一正实数, 则有 $a^{\alpha}>b^{\alpha}$, $a^{-\alpha}<b^{-\alpha}$.

证明 以下分别就 α 为正整数, 正整数的倒数, 正有理数, 正实数等四种情况, 逐一进行论证.

i. 若 $\alpha=n$, 其中 n 是正整数. 根据乘法公式, 有

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}).$$

因为 $a>b>0$，所以 $a-b>0$，并有 $a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n}>0$。这就得到 $a^n-b^n>0$，即 $a^n>b^n$。

若 $\alpha=-n$，其中 n 是正整数．因为 $a>b>0$，所以 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$，从 i 的结论得 $\frac{1}{b^n}>\frac{1}{a^n}>0$，即 $a^{-n}<b^{-n}$。

ii．若 $\alpha=\frac{1}{m}$，其中 m 是正整数．因为

$$a^{\frac{1}{m}}-b^{\frac{1}{m}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{m}}-b^{\frac{1}{m}}\right)\left(a^{\frac{m-1}{m}}+a^{\frac{m-2}{m}}b^{\frac{1}{m}}+\cdots+b^{\frac{m-1}{m}}\right)}{a^{\frac{m-1}{m}}+a^{\frac{m-2}{m}}b^{\frac{1}{m}}+\cdots+b^{\frac{m-1}{m}}}$$

$$=\frac{a-b}{a^{\frac{m-1}{m}}+a^{\frac{m-2}{m}}b^{\frac{1}{m}}+\cdots+b^{\frac{m-1}{m}}},$$

因为 $a>b$，所以 $a-b>0$．又因为分母每一项都为正，所以

$$a^{\frac{1}{m}}-b^{\frac{1}{m}}>0, \quad \text{即} \quad a^{\frac{1}{m}}>b^{\frac{1}{m}}.$$

若 $\alpha=-\frac{1}{m}$，其中 m 是正整数．因为

$$a^{-\frac{1}{m}}-b^{-\frac{1}{m}}=\frac{b^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{m}}}{(ab)^{\frac{1}{m}}},$$

结合上面 $\alpha=\frac{1}{m}$ 的结论，可知 $b^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{m}}<0$，从而 $a^{-\frac{1}{m}}<b^{-\frac{1}{m}}$。

iii．若 $\alpha=\frac{n}{m}$，其中 m、n 是正整数．则从 i、ii 的结论可直接推得

$$a^{\frac{n}{m}}>b^{\frac{n}{m}}; \quad a^{-\frac{n}{m}}<b^{-\frac{n}{m}}.$$

iv．若 α 为正实数．令 $\{r_n\}$ 为以正实数 α 为极限的正有理数数列．因为 $a>b>0$，有理数 $r_n>0$，从 iii 的结论有

$$a^{r_n}>b^{r_n},$$

当 $n\to\infty$ 时，对上面不等式取极限，有❶

❶ 在数学分析中，有：若 $x_n\to a$，$y_n\to b$，且满足 $x_n\geqslant y_n$ 或 $x_n>y_n$，则 $a\geqslant b$。

$$a^{\alpha} \geqslant b^{\alpha},$$

因为 $a \neq b$，又 $\alpha>0$，所以 $a^{\alpha} \neq b^{\alpha}$，这样就得

$$a^{\alpha}>b^{\alpha}.$$

因为 $a>b>0$，$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$，从上面结论推得

$$\frac{1}{b^{\alpha}}>\frac{1}{a^{\alpha}}>0, \quad \text{即} \quad a^{-\alpha}<b^{-\alpha}.$$

这就是说，两个正数的同次幂相比较，当幂指数为正时，底数愈大，幂愈大；当幂指数为负时，底数愈大，幂愈小．特别地，当定理1中的 b 与 a 分别为1时，就可得

推论 若 $a>1$，$\alpha>0$，则 $a^{\alpha}>1$；若 $0<a<1$，$\alpha>0$，则 $0<a^{\alpha}<1$.

利用两个正数的同次幂的比较法则，还可推得同底幂的比较法则.

定理2 若 $a>1$，$\alpha>\beta$，则 $a^{\alpha}>a^{\beta}$；若 $0<a<1$，$\alpha>\beta$，则 $a^{\alpha}<a^{\beta}$.

证明 因为 $\alpha>\beta$，所以 $\alpha-\beta>0$．根据定理1的推论，有：当 $a>1$ 时，$a^{\alpha-\beta}>1$，即 $a^{\alpha}>a^{\beta}$；当 $0<a<1$ 时，$a^{\alpha-\beta}<1$，即 $a^{\alpha}<a^{\beta}$.

[例1] 已知 a、b、c 为互不相等的正数，求证：

1) $a^{a} b^{b}>a^{b} b^{a}$;

2) $a^{2a} b^{2b} c^{2c}>a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$;

3) $a^{a} b^{b} c^{c}>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

证明 1) 为证 $a^{a} b^{b}>a^{b} b^{a}$，只须证明比式 $\frac{a^{a} b^{b}}{a^{b} b^{a}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$ 大于1即可．由于 a、b 是两个不等的正数，所以可按 $a>b$、$a<b$ 两种情形讨论如下：