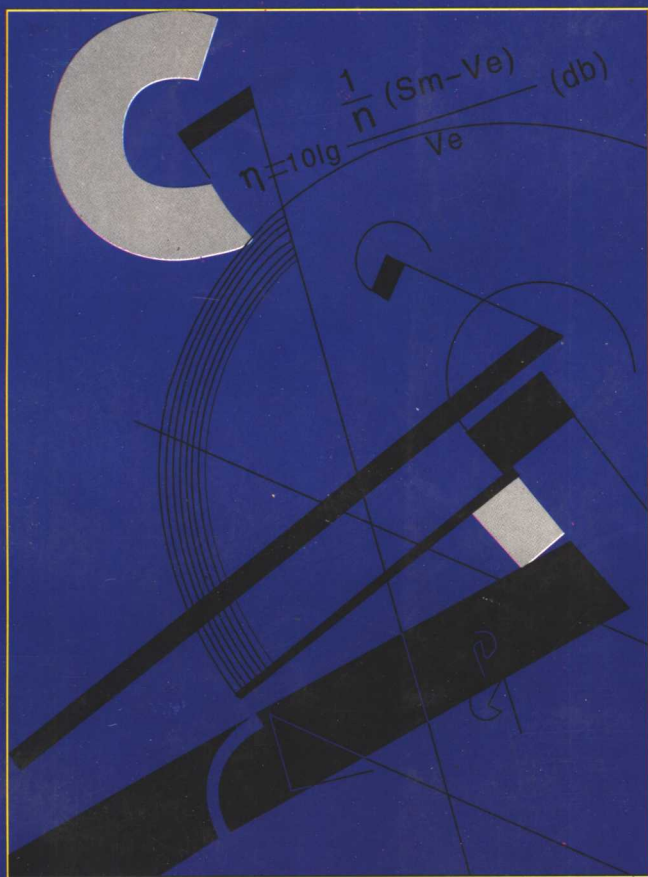


正交设计的方法与理论

ZHENG JIAOSHE JI DE FANG FA YU LI LUN

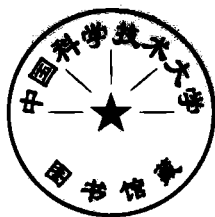
姬振豫 编著



世界科技出版社

正交设计的方法与理论

姬振豫 编著



世界科技出版社

正交设计的方法与理论

姬振豫 编著

世界科技出版社出版

(香港英皇道 14 号侨兴大厦 16/F, F 座)

天津市蓟县大唐印刷厂

开本: 850×1168 毫米 1/32 印张: 10 字数: 247 (千字)

2001 年 12 月第 1 版, 2001 年 12 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘丽斌

封面设计: 张志新

督印人: 刘金良

ISBN 962-8707-41-8

定 价: 20.00 元

内 容 提 要

本书系统地介绍了‘正交优化法’‘与’三次设计’的基本思想和方法，正交表的灵活运用，正规正交表的构造及几个非正规正交表列间的交互作用等。为了解释或阐述正交表的方差分析及正规正交表的构造原理，本书详细介绍了方差分析的理论与方法及有限域的有关知识。

本书兼顾理论与应用，叙述详细而具体，便于自学

本书可作为高等学校应用数学专业及其他理、工科各专业的教科书，教学参考书。科研人员，工程技术人员，工科研究生学习“正交设计”用书。

前 言

“正交设计”是用正交表安排试验和进行产品设计且能以较少的试验次数获得最佳生产条件的科学方法，是通用于工、农业各个领域的智力型产品质量管理技术，它包括“正交优化法”及“三次设计”两个方面的内容。

正交表 1944 年起源于美国。第二次世界大战后在日本开发了使用正交表进行试验设计的技术体系，并在全中国大力普及推广应用。这对日本战后经济的飞速发展起过十分重要的作用。据日本有关专家估计：战后日本经济发展中只有 10% 的功劳归于“正交设计”，可见它的经济效益之大。因此这种技术在日本十分被重视，在日本，如果一个工程师没有试验设计这方面知识的话，只能算半个工程师。

本书是作者在对应用数学专业讲授“正交设计”课编印的讲义及 1994 年编写出版的《正交设计》一书的基础上，经过修改，补充而成的。

本书兼顾实用性与学术性。为了方便读者的不同需要，将实用技术与数学原理分开介绍。在实用技术部分又分“直观分析法”与“方差分析法”两个层次介绍。

全书分三篇。第一、二、三、四章为“基本方法篇”。本篇用“直观分析法”介绍“正交优化法”及“参数设计”等内容。其中基本不涉及高等数学的知识，因此适应更广泛的读者。第六章（除§6.1 外）及第七章（除§7.1 外）为“提高篇”，本篇介绍正交表的“方差分析”、“广义方差分析”及“容差设计”。第五章，§6.1，§7.1 及第八、九、十章为“数学原理篇”，本篇详细叙述了“方差分析”的理论和方法；系统地介绍了正规正交表的构造及原理。从已得的有关结论可知，完备正规正交表存在的条件（目前只能说是充分条件）是水平

数 m 为素数的幂。对于除 1 以外的任意自然数 m , m 水平的正规正交表总是存在的; 还介绍了几个非正规正交表列间交互作用的分散性或均匀分散性。

只搞应用的读者可以只读“基本方法篇”或再读“提高篇”略去“数学原理篇”(即标有“*”号的章、节)不读而无妨。

在本书的编写出版过程中, 得到各位朋友的支持和帮助, 吴爱弟教授仔细审阅了部分手稿, 李泳鲜副教授提供了从事实际项目的经验并对内容的选取和安排提出了宝贵的意见, 张志强高级实验师精心绘制了全部插图, 在此表示衷心感谢!

本书的主要内容是介绍“正交设计”的实用方法, 在其理论方面仅就正交表的方差分析及正规正交表的构造等方面的数学原理给出了阐述或解释, 以满足一些对此有兴趣的青年读者的需要。但是限于水平, 其中难免有不妥和错误之处, 恳请专家、读者批评指正。

姬振豫

2000 年 9 月于天津

目 录

第一章 正交优化法	1
§1.1 正交表	5
§1.2 同水平项目的选优法	9
§1.3 混合水平项目的选优法	13
§1.4 有交互作用项目的选优法	16
§1.5 多指标试验的分析	21
§1.6 正交表的优良性	29
§1.7 小结	32
习提	34
第二章 正交表的灵活运用	39
§2.1 拟水平法	39
§2.2 活动水平法	40
§2.3 部分追加法	42
§2.4 混杂与区组,随机化	43
§2.5 复合因子	47
第三章 产品优化三次设计	48
§3.1 三次设计简单介绍	48
§3.2 汽车振动参数设计	49
§3.3 华达尼染色三次设计	53
第四章 产品稳定性参数设计	59
§4.1 稳定性基本知识	59
§4.2 静态特性的参数设计	63
§4.3 动态特性的参数设计	77
§4.4 综合误差因子法	87
习题	92
*第五章 方差分析的理论与方法	98

§5.1	多维正态变量及其二次型的分布	98
§5.2	线性模型中的有关结论	102
§5.3	方差分析	117
I	单因子试验的方差分析	117
II	二因子试验的方差分析	123
	习题	131
第6章	正交表的方差分析	133
*§6.1	预备知识	133
一	正交表列平方和的计算公式	134
二	各列平方和的独立性及其分布	138
三	总离差平方和的分解	140
四	关于确定误差平方和 S_e 的几点说明	141
五	各效应参数的最小二乘法估计	141
六	各效应的贡献率	142
§6.2	正交表的方差分析	143
§6.3	正交表的广义方差分析	147
一	理论根据	147
二	主效应的广义方差分析	149
三	交互效应的广义方差分析	157
	习题	163
第7章	产品稳定性三次设计	165
*§7.1	信噪比	165
§7.2	质量损失函数	180
§7.3	参数设计中的方差分析	188
§7.4	有约束的参数设计	196
§7.5	容差设计	210
	习题	219

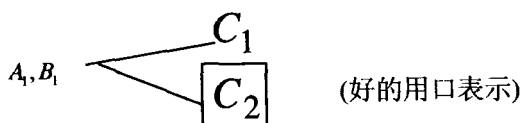
*第八章 有限域的有关知识	220
§8.1 域及域上的多项式	220
§8.2 有限域	222
习题	230
*第九章 正规正交表的构造方法及原理	231
§9.1 正交拉丁方	231
§9.2 利用正交拉丁方构造一类正规正交表	240
§9.3 利用有限域运算构造完备正规正交表	244
习题	261
*第十章 几个非正规正交表列间的交互作用	263
§10.1 预备知识	263
§10.2 表 $L_{12}(2^{11})$ 列间的交互作用	265
§10.3 表 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 列间的交互作用	267
§10.4 表 $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$ 列间的交互作用	273
习题	274
参考文献	275
附表	277

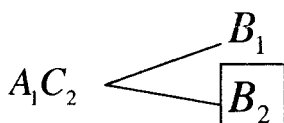
第一章 正交优化法

在工农业生产中，对产品有影响的生产原料及工艺等条件叫做因素，并用大写英文字母 A, B, C...表示。每种因素在试验中要考察或比较的不同用量或状态叫做水平{或位级} A_1, A_2, A_3 。分别表示因素 A 的第 1, 2, 3 水平。在试验中取不同水平的因素叫做因子。

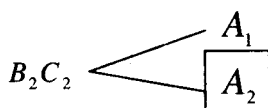
为了提高产品的质量或产量，经常要做试验。在试验中要考察的各个因子的每一水平所可能组成的一切试验条件叫做“全面试验”。“全面试验”能够反映试验考察范围内的全部情况。但当因子及因子的水平个数较多时，试验次数太多。比如一个 4 因子 3 水平的试验就需要做 $3^4 = 81$ 次试验。当因子及水平的个数更多时，需要做的试验次数更是惊人，这不仅要消耗大量的人力物力，而且有时还成为不可能的事情。为了降低成本，提高产品的质量和产量就要求我们探索既能减少试验次数（只进行部分试验）又能代表试验全面情况的新途径。如何从“全面试验”中挑选能代表全面情况的“部分试验”是试验设计问题。

过去人们习惯上常用“单因子轮换法”进行试验。比如某种产品受三个因子 A, B, C 的影响。每个因子取两个水平。分别用 $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ 表示。首先固定 A 为 A_1 , B 为 B_1 , 让 C 取两个水平 C_1, C_2 , 做两次试验，试验的结果发现 C_2 好。





然后固定A为 A_1 , C为 C_2 , 变化B做两次试验, 结果 B_2 好。再固定B为 B_2 , 变化A做两次试验, 结果 A_2 好。



于是通过6次试验可以下结论说, $A_2 B_2 C_2$ 最好。这种方法效果不好。因为这时全面试验共有 $2^3=8$ 个, 即

$A_1 B_1 C_1$	$A_2 B_1 C_1$
$A_1 B_1 C_2$	$A_2 B_1 C_2$
$A_1 B_2 C_1$	$A_2 B_2 C_1$
$A_1 B_2 C_2$	$A_2 B_2 C_2$

如图1.1所示, 立方体的左面和右面分别表示因子A的1水平和2水平; 前面和后面分别表示因子B的1水平和2水平; 下面和上面分别表示因子C的1水平和2水平。该立方体

共有八个顶点。每个顶点是三个平面的交点, 它表示3个因子的一种水平搭配。例如标有①的顶点表示试验条件 $A_1 B_1 C_1$ 八个顶点分别表示八个试验条件。

以上所做六个试验中有相同的, 实际上只做

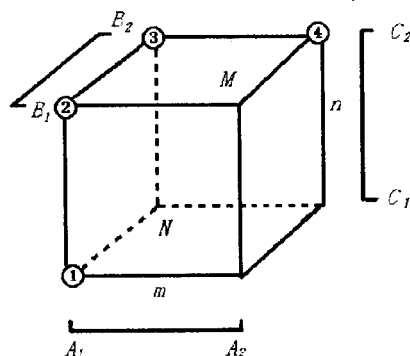


图 1.1

了四个不同的试验。这四个试验即图 1.1 中标有①, ②, ③, ④的 4 个顶点所表示的。显然这四个试验在八个试验中的分配是很不平衡的。比如, 下面只选一个点, 上面却选了三个点; 左面选了三个点, 右面只选了一个点; 在 12 条棱上, 有的没有选一个点, 有的选了一个点, 有的选了两个点。因此所做的六个试验没有代表性, 效果自然很差。

如何从八个全面试验中挑选尽量少的一部分使得它们在全面试验中分配均衡, 从而既能减少试验次数又能以部分代替全体呢?

我们先考虑 A, B 两个因子 (两个因子时无论取几个水平都必须做全面试验), 全面试验要做 $2^2=4$ 个, 安排如下:

表 1.1

A \ B	B	B ₁	B ₂
	A		
A ₁		A ₁ B ₁	A ₁ B ₂
A ₂		A ₂ B ₁	A ₂ B ₂

如果同时要考察因子 C 的影响, 而不增加试验次数, 怎样安排呢? 我们看到, 只有两个因子时, 两因子的两个水平互相各碰一次, 这样反映的情况比较全面。当考察三个因子时, 要反映的情况比较全面, 必须使任意两因子的不同水平各碰一次。我们来用如下安排看是否可以?

表 1.2

A \ B	B	B ₁	B ₂
	A		
A ₁		A ₁ B ₁ C ₁	A ₁ B ₂ C ₂
A ₂		A ₂ B ₁ C ₁	A ₂ B ₂ C ₂

这样安排时, A 与 B, A 与 C 的不同水平各碰一次, 但 B 与 C 的水平搭配不均, B_1 与 C_1 , B_2 与 C_2 各碰两次, 而 B_1 与 C_2 , B_2 与 C_1 一次也没有碰上, 因此这样安排不好。再作如下安排并将四个试验编号

表 1.3

A \ B	B		
		B_1	B_2
A ₁		① $A_1 B_1 C_1$	② $A_1 B_2 C_2$
A ₂		③ $A_2 B_1 C_2$	④ $A_2 B_2 C_1$

这样安排是很均匀的, A, B, C 三个因子中任意两个的各水平均各碰一次。如图 1.2 所示, 若用立方体中的四个顶点表示这四个试验的条件可看到, 立方体的每一个面上都恰有两个点, 每一条棱上都恰有一个点, 四个点均匀分散在整个立方体内, 因此它的代表性很强, 能够全面反映出试验的情况。所以这四个试验中的好点, 即使不是全面试验中的好点, 也往往是相当好的。而且根据这四个试验的结果还可能分析中更好的点。

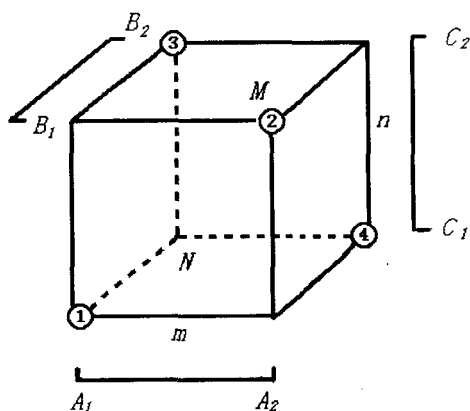


图 1.2

§1.1 正交表

一、正交表 $L_4(2^3)$

表 1-3 中四个试验按其编号从上到下排列为

表 1.1.1

- ① $A_1B_1C_1$
- ② $A_1B_2C_2$
- ③ $A_2B_1C_2$
- ④ $A_2B_2C_1$

表 1.1.2

列号 条件号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

为了书写方便用列号 1, 2, 3 代替字母 A, B, C, 只保留其水平号得到表 1.1.2. 可看出它有以下性质:

(1) 各列恰有两个“1”和两个“2”。

(2) 任意两列横向形成的四个有序数对中, (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) 各出现一次。这就是说, 对于任意两列, 数码“1”和“2”之间的搭配是均衡的。

这两个性质称为“正交性”(“正交”一词在数学中意指“垂直相交性”, 这里指“均衡性”。§6.1 中将介绍这种“均衡性”可化为“垂直相交性”)。具有“正交性”的表叫做“正交表”。为了方便用记号 $L_4(2^3)$ 表示正交表 1.1.2, 它是最小的正交表。此记号的意义如下图所示:

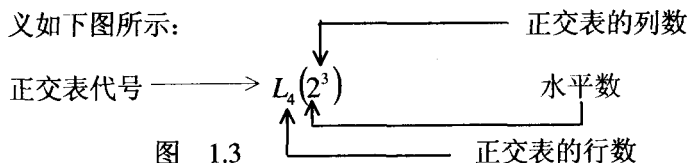


图 1.3

二、正交表 $L_8(2^7)$

表 $L_8(2^7)$ 与表 $L_4(2^3)$ 类似，它全部由数码“1”和“2”组成，不同的是它有 8 行 7 列。它的正交性表现在：

- (1) 每列恰有四个“1”和四个“2”，
- (2) 任意两列横向形成的八个有序数对中，恰好 (1, 1), (1, 2), (2, 1) 和 (2, 2) 各出现两次，即它们的搭配是均衡的。

表 1.1.3 $L_8(2^7)$

列号 条件号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

三、正交表 $L_9(3^4)$

如表 1.1.4 所示，正交表 $L_9(3^4)$ 有 9 行 4 列，由“1”，“2”，“3”组成，它的正交性表现在：

- (1) 每列“1”，“2”，“3”都出现三次。
- (2) 任意两列横向形成的九个有序数对中，(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) 每一种数对都出现一次。即它们的搭配是均衡的。表 $L_9(3^4)$ 是最小的三水平正交表。

表 1.1.4 $L_9(3^4)$

列号 条件号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

四、正交表 $L_8(4 \times 2^4)$

正交表 $L_8(4 \times 2^4)$ 有 8 行 5 列，第一列由四个数码“1”，“2”，“3”，“4”组成，是四水平列，第二列至第五列均由两个数码“1”和

表 1.1.5 $L_8(4 \times 2^4)$

列号 条件号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2
4	2	2	2	1	1
5	3	1	2	1	2
6	3	2	1	2	1
7	4	1	2	2	1
8	4	2	1	1	2

“2”组成是二水平列，因此称此表为混合水平型正交表。它的正交性表现在

- (1)每列各数码的重复数相同；
- (2)任意两列数码间的搭配是均衡的。

综上所述，正交性可叙述为：

- (1)表中每一列中各水平的重复数相同
- (2)表中任意两列横向形成的有序数对中，所有各种可能的“有序数对”的重复数相同。

凡满足“正交性”的由数码组成的表都是正交表。常用的正交表可按水平数分类如下：

二水平正交表 $L_4(2^3)$, $L_8(2^7)$, $L_{12}(2^{11})$, $L_{16}(2^{15})$, ...;

三水平正交表 $L_9(3^4)$, $L_{27}(3^{13})$, ...;

四水平正交表 $L_{16}(4^5)$, ...;

五水平正交表 $L_{25}(5^6)$, ...;

混合水平型正交表 $L_8(4 \times 2^4)$, $L_{16}(4 \times 2^{12})$, $L_{18}(2 \times 3^7)$, $L_{18}(6 \times 3^6)$, $L_{20}(5 \times 2^8)$, $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$, ...。

一般地，具有 N 行 K 列 m 水平的正交表记为 $L_N(m^K)$ ，当 $N-1=K(m-1)$ 时称为完备正交表；当 N 为 m 的幂时，称为正规正交表。

根据正交表的定义可知，表的各列的地位是平等的。因此表的各列之间可以置换（所谓置换即各列号可以重新排列），其次用正交表安排试验时，试验的次序不一定要按顺序进行。也就是说表的各行之间也可以置换。由于因子的水平的次序可以任意确定，所以表中同一列的水平记号可以置换。正交表的行间置换，列间置换和同一列中水平号的置换称为正交表中的三种初等变换。经过初等变换得到的一切表是等价的（即使用效果相同）。因此可以根据试验的不同要求将一个正交表变成与它等价的其他特殊形式的表。