FANGCHA FENXI YU SHIYAN SHEJI

方差分析与试验设计

● 朱明德 编著

湖北科学技术出版社

方差分析与试验设计

朱明德 编著

湖北科学技术出版社

方差分析与试验设计

朱明德　编著

＊

湖北科学技术出版社出版发行　新华书店湖北发行所经销
湖南省华容县印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本　13.125印张　280千字
1989年6月第1版　1989年6月第1次印刷
ISBN 7-5352-0341-8/N·4
印数：1-3000　定价：5.60元

前　言

在工农业生产过程中，有许多因素在起作用，但到底哪些因素是主要的，哪些因素是次要的，各因素作用程度如何，需要检验。数理统计中的方差分析与试验设计，则为检验某些因素对某一生产过程的影响程度提供了有效方法。

本书介绍了方差分析与试验设计的基本原理及方法，并着重介绍它在林业生产与科学研究中的应用。每种方法都给出了实例，每章后面还配置了一定数量的习题。

方差分析与试验设计问题的实质是检验几个样本所来自的正态总体是否具有相同的数学期望或变异为零。但是要真正作出检验，必须进行科学试验。试验的结果，得到许多数据。这些数据即使是在尽量保持不变的条件下得到的，一般也有差异。所以，当我们对几个因素的影响进行检验时，实际上是检验所造成的差异究竟是属于系统误差，还是属于随机误差。概括地说，就是要检验各个试验条件下的随机变量是否遵从相同的分布律。限于篇幅，对于林业界不常用的试验设计内容未作叙述。

在本书编写过程中，江西、贵州等省的许多林业科技工作者提供了不少实例，湖北科学技术出版社给予了大力支持，在此一并表示衷心感谢。

编著者

1987年3月

目　录

第一章　基本概念

方差分析与试验设计是论述多个总体的对比检验问题。如检验各总体平均数和总体方差是否相等，并由此判断各因素对总体是否有显著的影响。它是统计推断的重要 内 容 之一。

§1.1 期 望 值

随机变量 Y 的数学期望值（也称总体平均数）定义为

$$\mu = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y dF(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy & \text{（连续型）} \\ \sum_i y_i p(y_i) & \text{（离散型）} \end{cases}$$

若上述积分存在，它是度量 Y 取值的集中性的。其中 $F(y)$ 称为随机变量 Y 的分布函数，$f(y)$ 称为连续型随机变量 Y 的概率分布密度函数，$P(y_i)$ 称为离散型随机变量 Y 的概率函数。

随机变量 Y 的总体方差定义为

$$6^2 = D(Y) = E[Y - E(Y)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y)]^2 dF(y)$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y)]^2 f(y) dy & \text{（连续型）} \\ \sum_i [y_i - E(Y)^2] p(y_i) & \text{（离散型）} \end{cases}$$

若上述积分存在，它是度量 Y 取值的离散性的。

$E(Y)$、$D(Y)$具有如下重要性质：

（1） $E(C)=C$ （C 为常数）

（2） $E(CY)=CE(Y)=C\mu$

（3） $D(C)=0$

（4） $D(CY)=C^2D(Y)=C^2\sigma^2$

（5） $D(Y)=E[Y-E(Y)]^2=E(Y^2)-E^2(Y)$

（6） $E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$

（7） $D\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)=\sum_{i=1}^{n} D(Y_i)+2\sum_{i<j}\sum cov(Y_i,Y_j)$

其中

$$cov(Y_i,\ Y_j)=E[(Y_i-E(Y_i))(Y_j-E(Y_j))]$$
$$=E[(Y_i-\mu_i)(Y_j-\mu_j)]$$

称为随机变量 Y_i 与 Y_j 的协方差。它是度量 Y_i 与 Y_j 的独立性的，当 Y_i 与 Y_j 独立时，则 $cov(Y_i,\ Y_j)=0$，其逆未必成立。

（8） 如果 Y_i 与 Y_j 独立，则

$$E(Y_iY_j)=E(Y_i)E(Y_j)=\mu_i\mu_j$$
$$D(Y_i\pm Y_j)=D(Y_i)+D(Y_j)$$

（9） 一般地

$$E\left(\frac{Y_i}{Y_j}\right)\neq\frac{E(Y_i)}{E(Y_j)}$$

§1.2 抽样分布

方差分析与试验设计的目的是利用几个样本检验它们所

来自的各总体是否具有显著的差异。显然，这些样本的获得是随机的。换句话说，利用样本观测值构造适当的统计量，对多个总体进行假设析验。

定义统计量为样本观测值

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

的函数。n 称为样本的大小。最简单的样本统计量有样本平均数

$$\overline{y_.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

及样本方差

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y_.})^2}{n}$$

它们分别度量样本的中心趋势及离散性。特地称

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y_.})^2}{n}}$$

为样本标准差。

如果样本所来自的总体具有已知的分布，通常需要确定特定统计量的概率分布。统计量的概率分布称为抽样分布。

最重要的抽样分布之一是所谓正态分布。如果 Y 是正态随机变量，则其概率分布密度函数是

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad -\infty<y<\infty$$

其中$-\infty<\mu<\infty$是分布的平均数，$\sigma^2>0$是方差。简记为$Y\sim N(\mu\sigma^2)$，表示Y是遵从具有总体平均数μ及总体方差σ^2的正态分布。做标准化随机变量

$$Z=\frac{Y-\mu}{\sigma}$$

则 $N\sim N(0,1)$，称为遵从标准正态分布。

借助正态随机变量，可定义另一个重要的分布，所谓x^2分布。当相互独立的随机变量 $Z_i\sim N(0,1),i=1,2,\cdots,k$，则随机变量

$$x_K^2=\sum_{i=1}^{k}Z_i^2$$

遵从自由度为k的x^2分布，密度函数为

$$f(x^2)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}(x^2)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad x^2\geqslant 0$$

这个分布是偏斜的，具有总体平均数

$$\mu=k$$

及总体方差

$$\sigma^2=2k$$

例如，y_1，y_2，…，y_n 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$的一个随机样本，则

$$x^2=\frac{SS}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y}_.)^2}{\sigma^2}\sim x_{n-1}^2$$

自由度为 $n-1$。其中 $SS=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y_{\cdot}})^2$ 称为离差平方和。

如果 $Z\sim N(0, 1)$，则随机变量

$$t_k=\frac{Z}{\sqrt{\frac{x_k^2}{k}}}$$

遵从自由度为 k 的 t 分布，密度函数为

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\ \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty<t<\infty$$

其总体平均数为

$$\mu=0, \ k>1$$

总体方差为

$$6^2=\frac{k}{k-2} \quad k>2$$

例如，y_1，y_2，…，y_n 是来自 $N(\mu, 6^2)$ 的一个随机样本，则随机变量

$$t=\frac{\overline{y_{\cdot}}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\sim t_{n-1}$$

自由度为 $n-1$。

最后一个抽样分布是 F 分布。如果 x_u^2 与 x_v^2 是两个独立的 x^2 随机变量，分别具有自由度 u 与 v，则随机变量

$$F=\frac{\dfrac{x_u^2}{u'}}{\dfrac{x_v^2}{\nu}}$$

遵从第一自由度为 u，第二自由度为 ν 的 F 分布，密度函数为

$$f(F)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{u+\nu}{2}\right)\left(\dfrac{u}{\nu}\right)^{\frac{u}{2}}F^{\frac{u}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{u}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)\left(1+\dfrac{u}{\nu}F\right)^{\frac{u+\nu}{2}}}\qquad F\geqslant 0$$

总体平均数为

$$\mu=\frac{\nu}{\nu-2},\qquad \nu>2$$

总体方差为

$$6^2=\frac{2\nu^2(u+\nu-2)}{u(\nu-2)^2(\nu-4)}\qquad \nu>4$$

例如，当 y_{11}，y_{12}，…，y_{1n}，是来自第一正态总体的 n^1 个观测值的随机样本，以及 y_{21}，y_{22}，…，y_{2n_2} 是来自第二正态总体的 n_2 个观测值的随机样本，设两正态总体具有相等的方差 6^2，则

$$F=\frac{\dfrac{SS_1}{n_1-1}}{\dfrac{SS_2}{n_2-1}}\sim F_{(n_1-1,\ n_2-1)}$$

其中 SS_1 及 SS_2 分别是两随机样本的离差平方和。

§1.3 抽样估计

某一未知参数的估计量只不过是对应于该参数的一个统计量。估计量的确定值根据样本数据计算，称为估计，它包括点估计与区间估计。点估计是对未知参数的估计导致一个唯一数值的方法。区间估计是随机区间以一定的概率包含参数真值，这个区间通常称为置信区间，置信区间越窄，则估计精度越高。

好的点估计要求具备两条基本性质：

（1）点估计量是无偏的，即点估计量的期望值应等于被估计参数的真值。

（2）点估计量应具备最小方差。因为点估计量是一统计量，它也是随机变量。这一性质指出参数的最小方差点估计量的方差将小于任何其它估计量的方差。

容易证明，样本平均数$\overline{y_.}$是总体平均数 μ 的无偏估计量，因为

$$E(\overline{y_.})=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(y_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$$

但样本方差 S^2 是总体方差 6^2 的负偏估计量。

当 y_1, y_2, …, y_n 相互独立时，得到

$$E(S^2)=E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y_.})^2}{n}\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y_.})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y_{.}}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

所以做样本修正方差

$$\hat{\sigma}^2=\frac{n}{n-1}S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y_{.}})^2}{n-1}$$

它是总体方差 σ^2 的无偏估计量。

对于参数（例如 θ）的区间估计，需要求出两个统计量 L 与 U，使得概率陈述

$$P(L\leqslant\theta\leqslant U)=1-a$$

为真。区间

$$L\leqslant\theta\leqslant U$$

称为参数 θ 的$1-a$ 置信区间。$1-a$称为置信概率。统计量 L 与 U 分别称为置信下限与置信上限。

抽样估计在生产实践与科学试验中无疑是重要的。随机变量由概率分布描述，而这些分布是由一个或多个参数表征，这些参数的真值通常是未知的，这就需要利用样木对这些参数的真值作出估计。由于这些样本是来自某一总体的，无疑地带来了该总体的许多信息，所以根据这些样本构造适当的统计量对该总体的某一参数作出估计，是会有较好的精度的。

§1.4 假设检验

所谓假设是有关某个概率分布的若干参数值的陈述。例

如陈述

$$H_0: \mu = \mu_0$$

称为零假设，而

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

称为两尾备选假设。在零假设中，参数值可由三种方法确定。第一，可由过去的资料、历史知识或试验结果给出；第二，可以是某些理论或研究过程中的有关模型的结果；第三，可由双方所订合同中的技术要求给出。

为了检验假设，我们作出一种随机取样的方法，计算适当的检验统计量，然后拒收或不拒收零假设 H_0。对于检验统计量，这种方法的作用是确定导致拒收 H_0 的值集，这个值集称为检验的临界域或拒收域。

利用几个样本对几个总体作出假设检验，会犯两种错误。一方面，这些样本是分别来自某个总体，显然它们对所来的总体具有一定的代表性，它们带来了总体中的许多有用的信息，因此根据这些样本对多个总体作出判断时，能做到既有力量又有分寸。但是另一方面，这些样本毕竟只是所来总体中的一部分，根据这部分资料对所来总体作出判断，这就难免不犯错误。拒收了一个符合事实的假设，称为犯了第一种错误。接受了一个不符合事实的假设，称为犯了第二种错误。在方差分析与试验设计中，需要妥善地避免这两种错误。经验说明，减少其中的一种错误，则另一种错误就会增大。因此，在实际工作中，要控制犯第一种错误的大小，而尽量减小犯第二种错误的概率。通常，犯这两种错误的概率用特定的字母表示：

$$\alpha = P(\text{第一种错误}) = P(\text{拒收}H_0 | H_0\text{为真})$$

$$\beta = P(\text{第二种错误}) = P(\text{接受}H_0 | H_0\text{为假})$$

这种检验的功效函数是

$$M = 1 - \beta = P(\text{拒收}H_0 | H_0\text{为假})$$

在假设检验中一般是确定犯第一种错误的概率值 a，通常称为检验的显著性水平或信度，称$1-a$为可靠性。然后设计检验方法，使得犯第二种错误的概率 β 的值适当减小。

总之，作统计假设检验，总是期望在假设为真时接受假设，在假设为假时否定假设。但是，由于统计资料的局限性，作出错误判断的可能性是客观存在的，我们只能根据小概率原理行事。所谓小概率原理是指：“概率很小的事件在一次试验中是不至于发生的”原理。如果在一次试验中竟发生了小概率事件，我们就认为原假设不符合事实，而予以否定。这样做，显然是要冒风险的，上述 a 就表示小概率，它意味着所冒风险的大小。

为明确起见，把两类错误列图表如下：

假设 H_0
- 符合事实
  - 接受假设H_0—判断正确
  - 否定假设H_0—犯了第一种错误
- 不符合事实
  - 接受假设H_0—犯了第二种错误
  - 否定假设H_0—判断正确

综上所述，归纳出假设检验问题的四个主要步骤：

第一步：给出零假设H_0，它是要检验的对象。由于对零假设 H_0作出判断，是冒着犯第一种错误的风险，所以在作零假设时，如下的一些零假设

H_0：“两总体平均数相等，即 $\mu_1 = \mu_2$”.

H_0：“n个总体方差相等，即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2$”.

H_0：“a个处理效应等于零，即 $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$”.