初等函数

游 若 云 编

辽宁师范学院数学系

编 写 说 明

本书是为我系中学教师进修班初等函数课程编写的一份讲义。一方面对中学数学中有关初等函数的内容，作系统复习；另一方面也为进一步学习微积分课程作准备。由于未涉及高等数学的知识，因此，所有的讨论都限于初等方法，可供中学数学教学参考，及中学高年级学生课外阅读。

张毓新老师为本书绘制图表，特此致谢。

限于编者水平，错误难免，请读者批评指正。

1978年5月

目　录

第一章　函数概念、一些简单函数的性质和图象

§1　常量和变量

1.1　量与数

在三大革命实践中，我们经常遇到各种各样的量，例如，长度、面积、体积、角度、重量、温度、速度等，这些量的具体含义虽然不尽相同，但它们有一个共同的特性，就是可以用同类的量做单位，对它们进行度量。度量的结果，就得到抽象的数。这个数就是被度量的量和它的度量单位的比值，通常叫做被度量的量的值。因此，量的值反映了量的大小，量的值与量的实际意义合在一起，便能反映事物的某一特征。

例如，我们说地球的半径是6371.22公里时，这个数就反映了地球的大小；我们说今天的平均气温是15°C时，这个数就反映了今天气温的高低，等等。

1.2　数的集合·区间

在实际中，根据问题的需要，常常把适合某种条件的数，组成一个数的集合。例如，全体自然数组成的集合，叫做自然数集；全体有理数组成的集合，叫做有理数集；全体实数组成的集合，叫做实数集。等等。

因为实数和数轴上的点是一一对应的，所以数的集合可

以用数轴上点的集合来表

在以后的讨论中，我们经常用到下面一些特殊的数集合，这些数集合有一个共同的名称，叫做区间。区间的概念和符号叙述如下。

设a和b是两个实数，并且$a<b$，则

1．适合条件$a<x<b$的全体实数组成的集合，叫做**开区间**，记做(a, b)。

开区间(a,b)在数轴上表示介于a、b两点间的一条线段，但不包括线段的端点（图1）。

图 1

2．适合条件$a\leqslant x\leqslant b$的全体实数组成的集合，叫做**闭区间**，记做$[a,b]$。

闭区间$[a, b]$在数轴上表示介于a、b两点间的一条线段，包括线段的端点在内（图2）。

图 2

3．适合条件$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$的全体实数组成的集合，叫做**半开区间**，分别记做$(a, b]$或$[a, b)$。

半开区间$(a, b]$或$[a, b)$在数轴上表示介于a、b两点间的一条线段，但不包括线段的一个端点a或b（图3）。

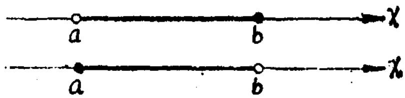

图 3

以上四种区间都是有限区间，下面给出的五种是无

限区间．

4．适合条件$x>a$，或$x\geqslant a$，或$x<a$，或$x\leqslant a$的全体实数组成的集合，分别记做（a，$+\infty$），[a，$+\infty$），（$-\infty$，a），（$-\infty$，a]．这些无限区间在数轴上表示一条不包括或包括端点的射线（图4）．

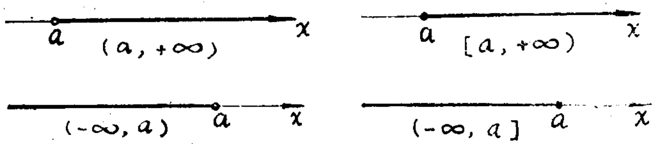

图 4

5．我们把全体实数组成的集合，记做（$-\infty$，$+\infty$）或$-\infty<x<+\infty$．无限区间（$-\infty$，$+\infty$）表示整个数轴．

1.3 常量与变量

我们知道，在一个过程中，往往涉及许多性质不同的量，但就其运动的状态来说，则只有两种，相对地静止的状态和显著地变动的状态．从数学上来说就是，在一个运动过程中有的量可以取不同的值，有的量则始终保持同一个值．例如，一辆汽车从甲地开往乙地，在这个过程中，涉及下列一些量：速度、时间、距离、耗油量、载重量和汽车的自重等．这些量可分为两类，其中的一类，如速度、时间、距离和耗油量，在汽车的运行过程中可以取不同的值，显现了量的变动状态；另一类，如汽车的载重量和自重，在该过程中则始终保持同一个值，显现了量的相对静止状态．为了区别这两类量，因此，在数学上有常量和变

量的概念。

在某个问题中可以取不同数值的量叫做**变量**，保持同一数值的量叫做**常量**。

例如，上面提到的汽车运行的速度、时间、距离、耗油量等都是变量，而汽车的载重量、自重等则是常量。

当然，常量和变量的区分是相对的，是依问题的条件而定的。离开了具体问题，抽象地问哪些量是变量，哪些量是常量，一般是无法回答的。就以速度这个量来说吧，我们在前面说过，汽车运行中速度是个变量，这是因为汽车在起动或刹车阶段速度较小，因而在运行的整个过程中，速度不是取常值。但是，如果取其平均速度来研究运行的时间和距离的关系时，那么速度就是常量了。

1.4 变量的可取值范围

在实际中，我们研究具体的变量时，常常按问题的条件，把变量可能取得的值组成一个数的集合，这个数的集合就叫做该变量的**可取值范围**。了解变量的可取值范围，对变量的研究是很有必要的。

例1 解放后十年我国钢的年产量是：

年度	1949	1950	1951	1952	1953	1954
钢产量（万吨）	15.8	60.6	89.6	134 9	177.4	222.5

年度	1955	1956	1957	1958
钢产量（万吨）	235.3	446.5	535	1108

这里，年度和钢产量都是变量。根据问题的条件，年度的可取值范围是1949到1958之间的十个整数，而钢产量的可取值范围，则是表中列出的那十个有理数。

例2 用汽温自动记录计记录的某地某日的气温变化，如图5所示。在这个问题里，温度和时间都是变量。温度的可取范围是从-7.8到6.8之间的所有实数，即闭区间$[-7.8, 6.8]$，时间的可取值范围，则是闭区间$[0, 24]$。

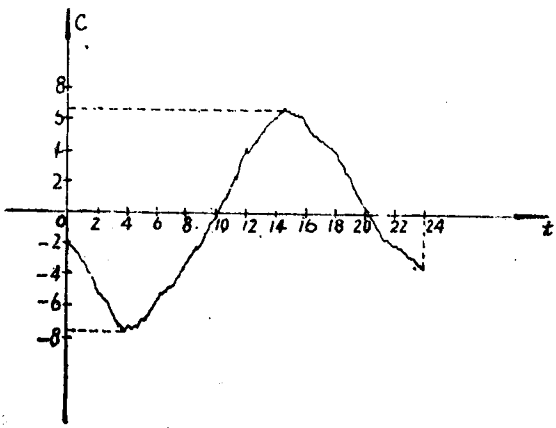

图 5

例3 在实数范围内讨论下列各代数式里x的可取值范围：

(1) x^2+1；　　(3) $\sqrt{1-x^4}$

(2) $\dfrac{1}{x-1}$；

解 （1）不论x为何实数，代数式x^2+1都有意义，因此，x的可取值范围是$(-\infty, +\infty)$。

（2） 当$x=1$时，代数式$\frac{1}{x-1}$无意义；当$x\neq 1$时，这个代数式都有意义，因此，x的可取值范围是$(-\infty, 1)$和$(1, +\infty)$。

（3） 只有当$1-x^2\geqslant 0$时，代数式$\sqrt{1-x^2}$才有意义。解不等式$1-x^2\geqslant 0$，得$x^2\leqslant 1$，即$|x|\leqslant|$，或$-1\leqslant x\leqslant 1$. 因此，x的可取值范围是闭区间$[-1, 1]$.

习 题 1

1. 用区间表示下列不等式：

（1） $-1\leqslant x\leqslant 2$；

（2） $0\leqslant x<3$；

（3） $x>3$；

（4） $|x|<a$；

（5） $|x-1|<\varepsilon$。

2. 用不等式表示下列区间：

（1） $(-2, 1)$；

（2） $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$；

（3） $(10, +\infty)$；

（4） $(-\infty, -1]$；

（5） $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$。

3. 在实数范围内讨论下列代数式里x的可取值范围：

(1) $\frac{1}{2-x}$;

(2) $\sqrt{1+x}$;

(3) $\sqrt{(1-x)(x-3)}$.

答：(1) $x \neq 2$，或即 $(-\infty, 2)$ 和 $(2, +\infty)$；

(2) $[-1, +\infty)$；

(3) $[1, 3]$.

§2 函数的概念

2.1 函数的定义

毛主席指出："一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的"。我们研究变量，就是研究变量间的这种互相联系和内部规律。不过，一般说来变量间的联系是复杂的。在这份教材中，仅讨论一种简单的情形。下面，我们先来考察§1里举过的两个例子。

在例1里，表格反映着年度和钢产量这两个变量间的依赖关系，当年度在1949到1958间变化时，钢的产量也随之变化。从这个表格，我们看到，对年度可取值范围的每一个值，钢的产量都有一个确定的值与之对应。例如，年度取1958时，钢产量的对应值是1108（万吨）。

在例2里，图象反映了时间t和温度C这两个变量间的依赖关系，当时间t在区间$[0, 24]$上变化时，温度C也随之变化。从这个图象，我们看到，对时间t的可取值

范围上的每一个值，温度C都有一个确定的值与之对应。例如时间$t=16$，温度的对应值是$c=6$，即在16点时气温是摄氏6度。

再看一个例子。在几何学里我们知道，圆的面积$A=\pi r^2$，这个公式反映了圆的半径和面积之间的依赖关系。因为半径只能取正值，所以它的可取值范围是$r>0$。从给出的公式，我们看到，对于半径可取值范围的每一个值，面积A都有一个确定的对应值。例如，$r=3$，面积的对应值是$A=9\pi$.

上述诸例虽然具体意义不同，但有共同的特征。其一，每个问题里都有两个互相联系着的变量，它们都有确定的可取值范围。按问题的条件，我们选定其中一个变量为依据，看由于它的变化，引起另一个变量的变化情况。

其二，在两个变量间存在着确定的数值对应规律，由于这种对应规律的存在，使得当一个变量在可取值范围内每取一值时，另一个变量都有一个确定的值与之对应。

据此，我们得到数学上的函数概念。

定义 设在某过程中有互相联系着的两个变量，如果第一个变量在某范围内每取一值时，第二个变量就有一个确定的值与之对应，那么，我们就称第二个变量是第一个变量的函数，其中第一个变量叫做自变量，第二个变量叫做因变量。

函数用符号$y=f(x)$表示，其中x表示自变量，y表示

因变量，f表示x和y之间的对应规律（或对应法则）。

例如，在上面所举的例子中，有

（1） 如果用x表示年度，y表示钢产量，则钢产量是年度的函数，可记为$y=f(x)$。这里，f乃表示由那张表格所给出的年度与钢产量之间的对应规律。

（2） 温度C是时间t的函数，可记为$c=f(t)$．这里，f乃表示由那个图形所给出的温度与时间之间的对应规律。

（3） 圆面积A是半径r的函数，可记为$A=f(r)$。这里，f乃表示由那个数学公式所给出的面积与半径之间的对应规律。

变量间的函数关系也可以记为$y=F(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$等等。特别是，当我们同时讨论几个不同的函数时，就需要用不同的字母表示它们的对应规律。例如，我们同时讨论圆的面积与周长随半径而变化的规律时，可以用$A=f(r)$表示面积是半径的函数，用$l=g(r)$表示周长是半径的函数。

从上述三个例子，我们看到，一个函数可以用一张表格表示出来，也可以用一个图形表示出来，也可以用数学公式表示出来。这三种是表示一个函数的最基本的方法，分别叫做**列表法**，**图象法**和**公式法**。

2.2 函数的定义域和值域

按函数定义的要求，自变量必须限定在一定的范围内取值，因变量才有一个确定的对应值，这样两个变量才构

成函数关系。因此，自变量的取值范围是构成函数概念的一个重要因素。

定义 自变量的可取值范围，叫做函数的定义域。

函数的定义域，一般由该函数所表示的实际问题的条件来确定。

例 1 上节例1给出的钢产量作为年度的函数，其定义域是1949到1958之间的十个整数。

例 2 上节例 2 给出的气温作为时间的函数，其定义域是闭区间〔0，24〕。

例 3 圆面积作为半径的函数，其定义域是$r>0$，即区间$(0, +\infty)$。

当我们在抽象形式中讨论出数学式子给出的函数时，如果没有特别指明它的定义域，那么我们就认为使这个数学式子有意义的自变量的可取值范围，就是函数的定义域。

例 4 讨论下列各函数的定义域：

（1） $y=\dfrac{1}{x^2-x}$；

（2） $y=\sqrt{2-x}$；

（3） $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$。

解 （1） 只有当$x^2-x\neq 0$时，函数才有意义。由$x^2-x=0$解出$x=0$和$x=1$。因此，函数的定义域是除0和1以外的全体实数，即区间$(-\infty, 0)$、$(0, 1)$和$(1, +\infty)$。

（2） 只有当 $2-x\geqslant 0$ 时，函数才有意义。解此不等式得 $x\leqslant 2$，就是函数的定义域。用区间表示就是 $(-\infty, 2]$。

（3） 只有当 $1-x^2\geqslant 0$ 时，式子 $\sqrt{1-x^2}$ 才有意义，同样，只有当 $x\geqslant 0$ 时，式子 $\sqrt{x}$ 才有意义。因此，只有当 $1-x^2\geqslant 0$ 与 $x\geqslant 0$ 同时成立时，函数才有意义。解这个不等式组，得 $0\leqslant x\leqslant 1$，即为所求的定义域，或用区间 $[0, 1]$ 表示。

定义 在函数 $y=f(x)$ 中，对于自变量的一个确定的值 x_0，函数的对应值为 $f(x_0)$。所有这些函数值组成的集合，叫做函数的值域。

因此。函数的值域就是因变量的可取值范围，它由函数的定义域与对应法则所确定，通常不必直接指出。

例 5 对下列函数求指定的函数值：

（1） $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$，求 $f(-1)$，$f(3)$；

（2） $F(x)=\sqrt{2-x}$，求 $F(0)$，$F(2)$；

（3） $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$，求 $\varphi(1)$，$\varphi(0)$

解（1） $f(-1)=\dfrac{1}{(-1)^2-(-1)}=\dfrac{1}{2}$；

$$f(3)=\frac{1}{3^2-3}=\frac{1}{6}.$$

（2） $F(0)=\sqrt{2-0}=\sqrt{2}$；

$$F(2)=\sqrt{2-2}=0.$$

(3) $\varphi(1)=\sqrt{1-1^2}+\sqrt{1}=1$;

$$\varphi(0)=\sqrt{1-0}+\sqrt{0}=1.$$

2.3 函数的另一个定义

函数概念中有三个因素：定义域，值域和对应法则。这三个因素确定了，函数也就被确定了。

我们知道，所谓变量，就是可取不同数值的量。如果撇开量的具体意义，那么变量就表现为变数。数是可以用数轴上的点来表示的，因而变量可表示为数轴上的动点。

定义域和值域，都是适合一定条件的数的集合，因而可表示为数轴上点的集合。

对应法则是存在于自变量与因变量之间的数值对应关系，亦即两个数集合之间的对应关系。因而可表示为数轴上两个点集合之间的对应关系。

作了这样抽象以后，我们便得到函数的另一个定义。

定义 设有两个点集合M和N，如果对于集合M的每一个点x，都有集合N的一个确定的点y和它对应，那么我们就说在集合M上给定了一个函数，并记为

$$y=f(x), \quad x\in M$$

这里符号∈读作属于。

如果M和N不限于是点的集合，而是由任意对象组成的集合，则得到更广泛意义下的函数概念。这时x和y就不限于是数或点，而可以是组成集合的任意对象（元素）

了.

例6 设M是平面上的三角形，N是三角形的周长，则三角形的周长是三角形的函数.

例7 设M是某学校的在校学生，N是班级，则班级是在校学生的函数。

例8 设M是任意一个实数集，N是仅由一个数C组成的单元素集，则对于M的每一个数，与之对应的都是同一个数C．这样的函数，就叫做**常数函数**。记为

$$y=f(x)=c.$$

2.4 函数概念的扩展

1。单值函数与多值函数

在函数定义里，规定自变量在可取值范围内每取一值，因变量有唯一的对应值，这样的函数，就叫做**单值函数**。

在实际问题里，还有另一种情形，即一个变量在可取值范围内每取一值时，另一个变量按确定的规律有几个不同的值和它对应。例如，用字母x表示正实数，y表示它的平方根，则x和y之间有关系

$$y=\pm\sqrt{x},\quad (x>0).$$

按这个对应规律，当x每取一个值时，y有两个不同的值和它对应。

考虑到上述情况，函数概念需要作如下扩展。

定义 设在某过程中有互相联系着的两个变量，如果第一个变量在某范围内每取一值时，第二个变量就有一组确定的值和它对应，那么我们就称第二个变量是第一个变量的函数。其中第一个变量叫做自变量，第二个变量叫做因变量。

在这个意义下，对于自变量的每一个可取值，函数的对应值不限于一个，而允许有多个。一般地说，如果对于自变量的每一个可取值，因变量都有n个确定的值和它对应，则该函数叫做n值函数。$n\geqslant 2$时为多值函数。例如

$y=\pm\sqrt{x}$ 是双值函数。

一个多值函数可以分成多个单值函数来研究，例如，双值函数$y=\pm\sqrt{x}$，可分成两个单值函数 $y=\sqrt{x}$ 和$y=-\sqrt{x}$。

因此，我们讨论了每一个单值函数之后，多值函数的性质也就清楚了。今后若无特别声明，我们都限于讨论单值函数。

2. 单元函数与多元函数

在函数定义里，我们讨论的只是两个互相联系着的变量，这种意义下的函数，只含有一个自变量，叫做单元函数（或单变量函数）。

在实际问题里，还需要考察另外的情形，即多个变量间的依赖关系。例如，理想气体的绝对温度T、体积V和