第一届至第二十二届

国际中学生数学竞赛题解

（1959～1981）

第一届至第二十二届

国际中学生数学竞赛题解

1959——1981

杨森茂　陈圣德　编译

福建科学技术出版社

一九八三年·福州

第一届至第二十二届
国际中学生数学竞赛题解
杨森茂　陈圣德　编译
·
福建科学技术出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
三明市印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32　9.625印张　2插页　214千字
1983年11月第1版
1983年月11第1次印刷
印数：1—15,300
书号：　7211·3　　定价：1.10元

序　言

数学和科学技术的发展，关系极为密切，培养数学人才也是国家十分重要的任务之一。在数十年前，欧洲一些国家就举行过数学竞赛会，他们认为采取这种措施，可以有效地选拔和培养优秀的数学人才。

数学竞赛，最早（1894年）起源于匈牙利的“Eötvös 数学竞赛”。1959年在罗马尼亚的倡仪下，第一届国际数学竞赛会在布加勒斯特举行。当时参加的有匈牙利、保加利亚、波兰、捷克、东德和苏联等国。以后每年举行一次，参加的国家逐年增多，到1981年已达二十一个国家。通过数学竞赛，可以看出国际上中学数学的教学水平，以及各国出题的倾向。这对改进和加强我国中学数学教学以及指导中学生学好数学，都具有一定意义。在编译本书的过程中，我们参考了各国出版的有关书刊，取其长、屏其短，力求有助于读者。

本书的特点是：①对所有较深的题目，解法都力求详尽，使一般中学生也较易于理解和掌握；②每题尽可能从各种不同角度入手，提供数种解法。读者可比较各种解法的利弊，从而掌握解题的方法和技巧；③有些题目，涉及到较为高深的数学理论，超出我国中学数学课程的范围，对于这类题目我们专门在书末备有附录，详释有关的定理和方法；④有些题目，我们还作了注解或推理，以帮助读者更好地理解题意，加深对有关理论的认识。

本书由陈连胜同志协助校对和绘图，在此特表谢意。由于我们工作繁忙、水平有限，书中的缺点和错误，在所难免，希读者不吝指正。

编　者

一九八一年九月

目　　录

第一届　数学竞赛题解（罗马尼亚，1959）

1.（波兰）证明：对于任意自然数n，分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 是既约的。

【证一】设d是分子和分母的公约数，则

$$21n+4=ad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$14n+3=bd \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

式中a、b是整数。

$3\times(2)-2\times(1)$：　$1=(3b-2a)d$

故$d=1$，即分数是既约的。

【证二】如果一个假分数可以通约，化为带分数后，它的真分数部分也必定可以通约。

分数　$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$，而

$$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}$$

$\frac{1}{7n+1}$ 显然不可通约，故 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 不可通约，

从而 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 也不可通约。

2.（罗马尼亚）问x取什么样的实值时，下列等式能够成立：

(a)　$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

(c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

这里平方根取非负实值

【解一】因$\sqrt{2x-1}$是实数，故$x\geqslant\frac{1}{2}$

$$设\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=A$$

两边各自乘得

$$2x+2\sqrt{x^2-2x+1}=A^2$$

即 $x+|x-1|=A^2/2$ …………………(1)

(a)若$A=\sqrt{2}$，则

$x+|x-1|=1$ ……………………(2)

当$x>1$时，上式左边大于1，而右边等于1，故这时(2)不可能成立。

当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$时， $x-1\leqslant 0$，

故$|x-1|=1-x$，在这种情形下，(2)恒能成立。

(b) 若$A=1$，则

$x+|x-1|=\frac{1}{2}$ ………………………(3)

当$x>1$时，上式左边大于1；而当$x\leqslant 1$时，上式左边等于1，故x无论为何实值(3)都不能成立。

(c) 若$A=2$，则

$x+|x-1|=2$ ………………………(4)

自上面的结果，知x必大于1，故(4)可写成

$2x-1=2$

解之得 $x=\frac{3}{2}$

【解二】设$x-\sqrt{2x-1}$的平方根为$\sqrt{s}-\sqrt{t}$，则

$$x-\sqrt{2x-1}=s+t-2\sqrt{st}$$

$$\therefore\quad s+t=x,\ 4st=2x-1$$

解之并把s、t值代入得

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{2x-1}-1\right|$$

同样可得

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1)$$

令

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2x-1}+1)+\left|\sqrt{2x-1}-1\right|\right]$$

因$\sqrt{2x-1}$取非负实数值，故 $x\geqslant\frac{1}{2}$。我们分别考虑以下两种情形：

（1） $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$。 这时

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1})\right]$$

$$=\sqrt{2}$$

（2） $1<x<\infty$。 这时

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2x-1}+1)+(\sqrt{2x-1}-1)\right]$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{2x-1}$$

综合（1）、（2）的结果，可给出本题的解答如下：

(a) 当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$时，$y=\sqrt{2}$成立。

(b) 没有x的值能满足$y=1$，因y的最小值是$\sqrt{2}$。

(c) 当$\sqrt{2}\sqrt{2x-1}=2$时，即$x=\frac{3}{2}$时，$y=2$成立。

3.（匈牙利）考虑关于cosx的二次方程

$$a\cos^2x+b\cos x+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

这里a、b、c是实数。求作一个关于cos2x的二次方程，使它和(*)有相同的根。在$a=4$，$b=2$，$c=-1$时，比较一下这两个方程。

【解一】因$\cos x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$，故(*)可改写成

$$a\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\pm b\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}+c=0$$

然后移项、平方并化简，即得如下的关于cos2x的二次方程：

$$a^2\cos^2 2x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos 2x+(a+2c)^2-2b^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

当$a=4$，$b=2$，$c=1$时，

$a^2=16$，

$2a^2+4ac-2b^2=8$，

$(a+2c)^2-2b^2=-4$

所以关于cos2x的方程是

$$16\cos^2 2x+8\cos 2x-4=0$$

即 $4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0$

这个方程和关于$\cos x$的方程有相同的系数。

【解二】设(*)的根为$r_1=\cos x_1$，$r_2=\cos x_2$，而关于$\cos 2x$的方程的根为$R_1=\cos 2x_1$，$R_2=\cos 2x_2$。

因两方程的根相同，故

$$\cos x_1=\cos 2x_1=2\cos^2 x_1-1$$

$$\cos x_2=\cos 2x_2=2\cos^2 x_2-1$$

即　$R_1=2r_1^2-1$，　　$R_2=2r_2^2-1$

因$r_1+r_2=-\dfrac{b}{a}$，$r_1r_2=\dfrac{c}{a}$，故

$$\begin{aligned}R_1+R_2&=2(r_1^2+r_2^2)-2\\&=2(r_1+r_2)^2-4r_1r_2-2\\&=2\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right)-2\\&=2(b^2-2ac-a^2)/a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_1R_2&=(2r_1^2-1)(2r_2^2-1)\\&=4r_1^2r_2^2-2(r_1^2+r_2^2)+1\\&=4\left(\frac{c}{a}\right)^2-2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)\right]+1\\&=[(2c+a)^2-2b^2]/a^2\end{aligned}$$

代入关于$\cos 2x$的方程

$$\cos^2 2x-(R_1+R_2)\cos 2x+R_1R_2=0$$

并以a^2乘之，即得〔解一〕的方程（1）

当$a=4$，$b=2$，$c=-1$时的情形同〔解一〕。

4.（匈牙利）已知一直角三角形的斜边c，并知斜边上的中线是两股的几何中项，求作这个三角形。

【解一】作图：以O为圆心，c为直径作半圆；再作和

直径相距$\frac{c}{4}$的平行线，交圆于C，C′；连接$\overline{AC}$，$\overline{BC}$，（或$\overline{AC'}$，$\overline{BC'}$），则△ABC（或△ABC′）即是所求的三角形。

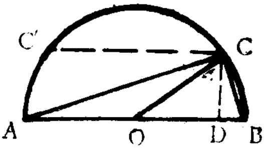

图1—1

证明：

△ABC的高为$\frac{c}{4}$（作图），故其面积为

$$(ABC)=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{c}{4}=\frac{c^2}{8}$$

又因$\overline{AC}\perp\overline{BC}$，得

$$(ABC)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}$$

$$\therefore\quad \overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{c^2}{4}=\overline{OC}^2$$

这就是说，中线$\overline{OC}$是两股$\overline{AC}$，$\overline{BC}$的几何体中项。

【**解二**】作图：以O为圆心，c为直径作半圆；再作$\overline{OE}\perp\overline{AB}$；然后以E为圆心，$\frac{c}{2}$为半径作弧交半圆于C，C′，则△ABC（或△ABC′）即是所求的三角形。

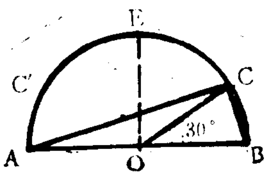

图1—2

证明：因∠EOC＝60°，故∠BOC＝30°，∠AOC＝150°．以a、b分别表示两股$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的长度，应用余弦定理，得

$$a^2=\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}-2\cdot\frac{c^2}{4}\cos30^\circ$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})c^2}{4}$$

$$b^2=\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}-2\cdot\frac{c^2}{4}\cos150^\circ$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})c^2}{4}$$

$$\therefore\quad a^2b^2=\frac{c^2}{4}$$

即$\frac{c}{2}$是a、b的几何中项。

注：如在作图前加以分析，不难知道所给的条件相当于△ABC的高为$\frac{c}{4}$或，BOC＝30°．

5.（罗马尼亚）在线段$\overline{AB}$上取一点M，在M的同一侧以$\overline{AM}$，$\overline{MB}$为一边各作正方形AMCD和MBEF，这两个正方形的外接圆（以P、Q为圆心）除M点外还相交于N点。$\overline{AF}$和$\overline{BC}$的延长线相交于N′点。

（a） 试证N点和N′点重合；

（b） 试证直线MN总通过一定点S，这点与M点的位置无关；

（c） 求当M点在A、B二点间变动时，线段$\overline{PQ}$中点的轨迹。

【解一】(a)作线段$\overline{AN}$，$\overline{NF}$，$\overline{BC}$和$\overline{CN}$。

∠ANM是劣弧$\overparen{AM}$所对的圆周角，故是45°．

∠MNF是优弧$\overparen{MBF}$所对的圆周角，故是135°．

∴∠ANF＝∠ANM＋∠MNF＝45°＋135°＝180°．

故N点在$\overline{AF}$上。

$\overline{AC}$是以P为圆心的圆的直径，故$\angle ANC = 90°$。

又$\angle ANB = \angle ANM + \angle MNB = 45° + 45° = 90°$

故C点在$\overline{BN}$上，即$\overline{AF}$和$\overline{BC}$的延长线相交于N点。

∴N点和N′点重合。

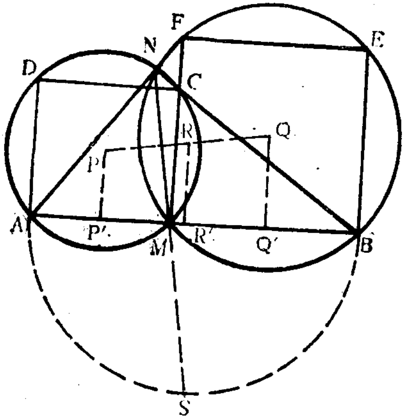

图 1—3

(b) 以$\overline{AB}$为直径在$\overline{AB}$的另一侧作半圆。

因$\angle ANM = \angle MNB = 45°$，故$\overline{MN}$平分$\angle ANB$，它的延线平分半圆周于S点。

不论M是A、B间的那一点，S总是半圆周$\overset{\frown}{AB}$的中点，换句话说，S点与M点的位置无关。

(c) 设R是$\overline{PQ}$的中点，作$\overline{PP'}$，$\overline{QQ'}$，$\overline{RR'}$垂直于$\overline{AB}$。因$\overline{RR'}$是梯形P′Q′QP的中位线，故

$$\overline{RR'} = \frac{1}{2}(\overline{PP'} + \overline{QQ'})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AM}+\overline{MB}}{2}\right)$$

$$=\frac{\overline{AB}}{4}$$

可知，R至$\overline{AB}$的距离是定值。

当M和A重合时，P′和A重合，$\overline{AQ'}=\frac{\overline{AB}}{2}$，$\overline{AR'}=\frac{\overline{AB}}{4}$。又当M和B重合时，Q′和B重合，$\overline{P'B}=\frac{\overline{AB}}{2}$，$\overline{R'B}=\frac{\overline{AB}}{4}$。可知，当M在A，B间变动时，R在长度等于$\frac{\overline{AB}}{2}$的线段上变动。

所以,所求的轨迹是长度等于$\frac{\overline{AB}}{2}$而平行于$\overline{AB}$的线段，这线段和$\overline{AB}$的距离为$\frac{\overline{AB}}{4}$且和两正方形在同一侧。

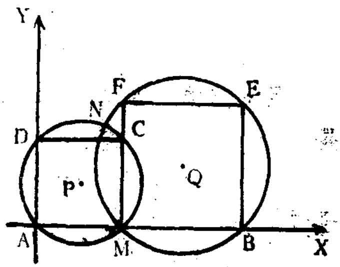

图1—4

【解二】如图1—4画出直角坐标系后，点A、B和M的坐标分别为(0，0)，(a，0)和(m，0)。

(a) 易知P，Q两点的坐标分别为$\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right)$和$\left(\frac{a+m}{2},\ \frac{a-m}{2}\right)$。因而可定出圆P和圆Q的方程：

圆P：$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\frac{1}{2}m^2$

即 $x^2-mx+y^2-my=0$ …………(1)

圆Q：$\left(x-\dfrac{a+m}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{a-m}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}(a-m)^2$

即　$x^2-(a+m)x+y^2-(a-m)y+am=0$ ……（2）

（1）－（2）得

$$ax+(a-2m)y-am=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

因M和N都是两圆的交点，它们的坐标满足（1）和（2），因而也满足（3）。

解联立方程（1）、（3），得

$$(x_1,\ y_1)=(m,\ 0)$$

$$(x_2,\ y_2)=\left(\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2},\ \frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2}\right)$$

因M点的坐标为（m，0），故N点的坐标为

$$\left(\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2},\ \frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2}\right)$$

另一方面，通过A（0，0），F（m，a－m）的直线方程是

$$(a-m)x-my=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

通过B（a，0），C（m，m）的直线方程是

$$mx+(a-m)y-am=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

解联立方程（4），（5），得直线AF和BC的交点N′的坐标：

$$\left(\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2},\ \frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2}\right)$$

∴　N点和N′点重合。

(b)　过M、N二点的直线方程（3），可写成如下形式：

$$a(x+y)=m(2y+a)$$