# 高中数学教案

本社编

代数·第二册

北京师范大学出版社

# 高中数学教案

## 代数第二册

本 社 编

北 京 师 范 大 学 出 版 社

责任编辑：林水平

**高中数学教案**

代数第二册

本社编

北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
国营五二三厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：11.625 字数：244千
1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷
印数：1—20 000

ISBN 7-303-00029-1/G·27
统一书号：7243·553 定价：2.45元

# 前　言

1984年我社编辑出版了《中学数学教材研究与教案选》（共六册），旨在将广大中学数学教师多年来积累的教学经验在全国范围内进行交流和推广．实践证明，这种做法得到全国各地广大中学数学教师的欢迎．它对于开展中学数学教学研究，提高教学质量起到了促进作用．

教育在改革，教学方法也在发展，同时不少中学数学教师使用《中学数学教材研究与教案选》中也给我们提出了很好的意见和建议，这些促使我们进行修订．这次修订改名为《初中数学教案》（包括代数一——四册，平面几何一、二册）和《高中数学教案》（包括代数一、二、三册，立体几何、平面解析几何及微积分初步）．这次修订仍然保持原书的优点，同时在以下三方面加以完善和补充，首先，力图使大多数教案在深度和份量方面对大多数学校的教学是切实可行的，其次，在教案中尽可能体现开发学生智力和培养学生的能力；第三，增加教案的数量，每章末配有复习课教案．

本书的特点是：(1) 教案的作者仍然是全国范围内部分有经验的数学教师，其中有不少是特级教师．(2) 本书依据国家颁布的中学数学教学大纲的教学体系，结合现行中学数学教材编写．(3)本书的目的在于研究如何通过课堂教学，使学生掌握基础知识，基本技能技巧以及发展学生思维、开发学生智力、培养学生能力．(4) 本书每章开头有一篇教

材分析或教学经验方面的文章，概括本章主要内容及其在中学数学中的地位和作用，教学目的和要求，重点和难点，并且提出教学建议和课时安排。（5）教案中一般是由教学目的和要求、教学重点和难点、教学过程（包括新课引入、新课、小结、作业）等组成。多数教案比较详尽，从中可以看到作者课堂教学的全过程；少数教案较略，但言简意明，脉络清楚、重点突出，有的同一教学内容内容附有两个不同特色的教案。

本册由浙江师范大学数学系王岳庭组织定稿。

感谢北京师范大学数学系曹才翰先生对本书编辑出版的关心和支持。

对本书有什么意见和要求，希望广大读者来信告诉我们。

编　者

# 目　录

# 反三角函数和简单三角方程

## 教材分析

本章教材的重点是反三角函数的概念，最简单的三角方程的解集和简单三角方程的解法。反三角函数的概念是本章教材中的一个难点，也是全章的基础。增根、失根和解集的等效性问题，是本章教材中第二个难点。最简单的三角方程的解集是解三角方程的基础。

**一、反三角函数**

1．反三角函数的概念

反三角函数的教学，应以反正弦函数为重点。反正弦函数的概念是建立在映射，一一映射，逆映射及反函数等概念的基础上的。因此，教学时用通过提问形式从新旧对比中导入新课较为自然。

在给出定义之后，要讲清 arc sin $x$ 的含义，要特别注意，不论用文字或数字表达 arc sin $x$ 中的 $x$ 时，其中“$x\in[-1,1]$”决不可疏漏。为了澄清学生中的一些模糊概念，可让学生做如下练习：

求下列各式的值（若无意义要说明理由）

(1) $\sin\frac{\pi}{4}=$　　$\arcsin\frac{\pi}{4}=$　　$\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{4}\right)=$

(2) $\sin 45^\circ =$ 　　$\arcsin 45^\circ =$ 　　$\sin(\arcsin 45^\circ) =$

(3) $\sin 45 =$ 　　$\arcsin 45 =$ 　　$\sin(\arcsin 45) =$

(4) $\sin\left(\arcsin\dfrac{a^2}{a^2+1}\right) =$ 　　$\sin\left(\arcsin\dfrac{a^2+1}{a^2}\right) =$

$(a \in \boldsymbol{R})$

2．反三角函数的性质

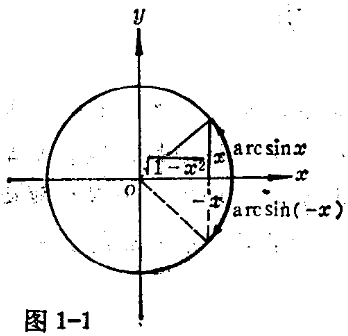

图 1-1

教材中从观察图象得出反三角函数的性质，并不作数学论证。为了使学生对性质理解得更深刻，也可利用单位圆（如图1-1）加以说明。如果学生接受能力强，可考虑在适当时候补充如下证法：

(1) 求证：反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在区间$[-1,1]$上是增函数。

**证明**：因为$x=\sin y$　在$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$上是增函数，所以在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$上的任意取 $y_1<y_2$ 时，有 $x_1<x_2$；反过来，当 $x_1<x_2$ 时，显然 $y_1\neq y_2$，而 $y_1>y_2$ 也不可能（与$x=\sin y$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$上是增函数矛盾）故 $x_1<x_2$ 时，$y_1<y_2$，即证。

说明：以上证法易拓广到一般的函数与反函数的关系上去，即增（减）函数的反函数仍为增（减）函数。这样其余反三角函数的增减性质就不必再证明了。

(2) 证明：对于任意 $x\in[-1,1]$ 有 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$。

此性质课本上的证明分三步：先证 $-x$ 属于反余弦函数的定义域 $[-1,1]$；再证 $\pi-\arccos x$ 是余弦等于 $-x$ 的一个值；最后证 $\pi-\arccos x\in[0,\pi]$。但学生比较容易接受的常用的证法是分两步：(i) 先证公式两边的角有同一个余弦值；(ii) 再证公式两边的角都在 $[0,\pi]$ 上。

3. 反三角函数的三角运算

反三角函数的三角运算，教学中重点抓解题的规律，一般分三步，要求学生熟练地掌握。在教学中，可布置学生归纳整理四种反函数的 16 个基本公式，加以类比，进一步明确函数间纵向横向的关联，这是颇有裨益的。如果利用单位圆来帮助记忆，效果会更好。如图 1-2 可用来说明反余弦的一组基本公式的。

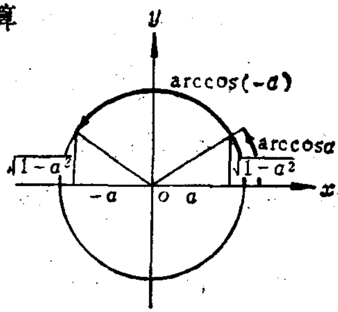

图 1-2

$$\sin(\arccos a)=\sqrt{1-a^2},$$

$$\cos(\arccos a)=a,$$

$$\mathrm{tg}(\arccos a)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a},$$

$$\mathrm{ctg}(\arccos a)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},$$

以上 $a\in[-1,1]$。

4. 三角函数的反三角运算

解这类习题，实质上是求反三角函数的主值区间的运算。关键在于将式中的三角函数利用诱导公式转化为反三角函数主值区间上角的三角函数。遇到这类习题，可分三种情况结合实例指出它的解题规律：

（1）如果两重函数名称相同

**例** 求 $\arcsin[\sin(-15)]$ 的值。

**解**：原式 $=\arcsin(-\sin 15)=-\arcsin(\sin 15)$

$$=-\arcsin[\sin(5\pi-15)]=15-5\pi$$

$$\left(\because -\frac{\pi}{2}<15-5\pi<\frac{\pi}{2}\right).$$

（2）如果两重函数名称互余

**例** 求 $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{9}\right)$ 的值。

**解法一**：原式 $=\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{9}\right)\right]=\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right]$

$$=\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{\pi}{18}\right)\right]=\frac{17\pi}{18}$$

$$\left(\because 0<\frac{17\pi}{18}<\pi\right).$$

**解法二**：$\because \frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{9}<\pi$，设 $\frac{5\pi}{9}=\frac{\pi}{2}+\alpha$（$\alpha$ 为锐角）

$\therefore \quad \alpha=\frac{5\pi}{9}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{18}$，

原式 $=\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=\operatorname{arcctg}(-\operatorname{ctg}\alpha)$

$$=\pi-\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\pi-\alpha=\pi-\frac{\pi}{18}=\frac{17\pi}{18}.$$

这种解法思路明确，规律性强，解这类题目时普遍适

用。

（3）如果两重函数名称不同且不互余

一般情况，查表求近似值。例如：$\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)=$ $\arcsin(\operatorname{tg}28°39')=\arcsin 0.5463=33°7'$；是特殊角时，直接求值。例如：$\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\right)=\arccos 1=0$；还有一种情况：反三角函数无意义，例如：$\arcsin\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\right)$，因为 $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}=1.845>1$，故原式无意义。

**二、简单的三角方程**

1．最简单的三角方程

最简单的三角方程的解集比较复杂，可以借助于单位圆获得直观的说明，形象的记忆。

在讲例 3（解方程 $\operatorname{tg}(x+15°)+1=0$）时，可让学生来剖析如下一类错例，这样可以深化概念。

错例：由 $\operatorname{tg}(x+15°)=-1$ 得 $x+15°=-45°$，$x=-60°$。得解集是$\{x\mid x=k\cdot 180-60°,\ k\in \mathbf{Z}\}$，（结果是正确的，解法是错误的）。

2．简单的三角方程

本小节有六个范例，主线是掌握五种基本的解法，但每例应有所侧重。以下意见供参考：

例 1（解方程 $2\sin^2 x+3\cos x=0$）中，重点是掌握利用因式分解或求根公式来解的两种方法；

例2（解方程$\sin^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=0$）中，重点是掌握利用齐次方程特征来解的方法。顺便可指

出，此例的解集$\{x\,|x=k\pi+\frac{\pi}{3}$或$x=k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\}$与解集$\{x\,|x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\}$是等效的；

例3（解方程$\sin x=2\sin(60^\circ-x)$）中，重点应放在由$\sin x=2\sin(60^\circ-x)$变形为$2\sin x=\sqrt{3}\cos x$（齐次方程）的这一环节上．这一步往往是一个难点，变化多，用到的公式多，且需要创造性的思维，教学中要指导学生分析解题思路；

例4$\left(解方程\sin x=\cos\frac{x}{2}\right)$中，此方程可有多种解法，是一个难得的一题多解的好例，若移到例5以后去讲，就可作为巩固和熟练多种解法之用．讲本例时，可指出，解集$\{x\,|x=(4k\pm1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$与解集$\{x\,|x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$也是等效的；接着可指出教材中："由$\cos\frac{x}{2}=0$，得$\frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$，即$x=4k\pi\pm\pi$"的解法，不如改为"由$\cos\frac{x}{2}=0$，得$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$x=2k\pi+\pi$"不用双重符号表示为好；

例5（解方程$\sin 5x=\sin 4x$）中，重点有二：（1）掌握利用同名函数相等的关系来解的方法；（2）解集等效性的判别方程．此题内容丰富，但不要讲得过多过深；

例6（解方程$5\sin x-12\cos x=6.5$）中，重点是掌握引入辅助角来解的常用的解法．顺便可指出，本例的解集有时表示为$\{x\,|x=k\pi+(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\arccos\frac{5}{13},\ k\in\mathbf{Z}\}$，但不应写成$\{x\,|\,x=k\pi+(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\theta,k\in\mathbf{Z}\}$．

3．关于一题多解问题

一题多解是训练发散性思维的重要方法之一，同时它又能帮助熟练多种解法，知识的复盖面大，好处很多．例如教材中的例 4，就可以有六种解法：因式分解法；利用正弦或余弦值相等的关系来解的方法；利用和差化积的方法；利用两边平方的方法以及图象解法等．平时教学中应注意多种解法的优劣比较．课外，还可布置学生常做一题多解的练习，如方程：$\sin x-\cos x=1$，$\cos^4x-\sin^4x=0$，每题至少有六种解法，如方程 $\sin x-\cos x=0$，那解法就更多了．

4．关于增根失根问题

解三角方程时产生增根失根的原因和处理的方法，基本上与解分式方程，无理方程及对数方程相同．但对于三角方程，特别要注意在方程变形过程中允许值范围的扩大或缩小而可能产生的增根失根．在解三角方程过程中，尽量避免使方程的同解性破坏的变形，千万不要用带未知数的项去除方程的两边，除非可以确认这个式子不为零．在用变量替换时，尽量不用缩小定义域的替换法（如用万能公式），若无法避免，必须检验是否有失根，这是必要步骤，勿疏漏．

5．关于解集的等效性问题

在教材例 5 中判别解集是否等效的方法，是采用把一组解集的表达式变形（分或合），而后观察两组解集的表达式是否完全一致的方法．这种变形需要有数列的一些基础知识，如数列$\{n\}$等于数列$\{2n\}$与$\{2n+1\}$的组合，也等于数列$\{3n\}$，$\{3n+1\}$和$\{3n+2\}$的组合等，常用的方法还有先求 $f(x)=\sin 5x-\sin 4x$ 的周期 $T=2\pi$，而后在区间$[0,2\pi]$内把几种解集的特解求出加以比较，如完全相同即为等效．

当$T\leqslant 2\pi$时，利用单位圆检查显得格外简便，只要看各种不同形式的解集所表示的角的终边是否一致，如各角的终边对应重合，无一例外，则各解集等效，但应注意，若出现一个解集是另一个解集的真子集（重根）时，应剔除，这是学生常不注意的地方。检查是否有重根，一般只要在单位圆上画出角的终边所在的位置，观察是否有重合即可发现。

本章教学时间约需16课时，分配如下(仅供参考)：

| | |
|---|---|
| 1.1　反正弦函数 | 3课时 |
| 1.2　反余弦函数 | 2课时 |
| 1.3　反正切函数与反余切函数 | 2课时 |
| 反三角函数单元复习与小结 | 1课时 |
| 1.4　三角方程<br>1.5　最简单的三角方程 | 3课时 |
| 1.6　简单的三角方程 | 3课时 |
| 本章复习小结和综合练习 | 2课时 |

浙江省东阳中学　蔡秉湘

## 反正弦函数（一）

**教学目的**

使学生理解反正弦函数的定义，掌握反正弦函数的图象和性质。

**教学重点和难点**

反正弦函数的概念。

**教学过程**

一、新课引入

复习一一映射、逆映射以及反函数的定义之后，提问：

1．说出函数 $y=2x+1$ 和函数 $y=2^x$ 的反函数，以及反函数的定义域和值域；

2．说出函数 $y=x^2$ 的定义域和值域；

3．函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有没有反函数，为什么？

4．如何限定 $x$ 的取值范围，使函数 $y=x^2$ 有反函数；

5．说出函数 $y=x^2$ $(x\geqslant0)$ 的反函数，以及反函数的定义域和值域。

教师小结：

1．一个函数 $y=f(x)$ 存在反函数的条件是原函数 $y=f(x)$ 的对应法则 $f$ 是定义域 $A$ 到值域 $B$ 的一一映射；

2．函数 $y=x^2$ 不存在反函数，因为对于每个 $y\in(0, +\infty)$ 都能求出两个 $x$ 的值：$x=\pm\sqrt{y}$ 使其与 $y$ 对应；

3．如果限定函数 $y=x^2$ 的定义域范围，例如函数 $y=x^2(x\geqslant0)$，则它有反函数 $y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant0)$；

4．今天我们要学习的正弦函数的反函数，也是采取这样一种思想方法来研讨的。

二、新课

1．反正弦函数的定义

(1) 观察函数 $y=\sin x$ 的图象

结合图 1-3 指出：若 $A=\{x\mid x\in\boldsymbol{R}\}$，$B=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$，则由 $y=\sin x$ 确定的对应法则不是从 $A$ 到 $B$ 的一一映射。如图 1-3，当 $x=\cdots$，$x_2'$，$x_1'$，$x_1$，$x_2$，$x_3\cdots$ 时，$y$ 值都相等，故当 $x\in\boldsymbol{R}$ 时，$y=\sin x$ 不存在反函数。