平几竞赛题及解法

黄华同 编译 四川教育出版社

平几竞赛题及其解法

黄华同　　编译

四川教育出版社

1988年·成都

责任编辑：何伍鸣
封面设计：曾　勇
版面设计：刘　江

平几竞赛题及其解法　　黄华同　编译

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
新华书店经销　成都科教印刷厂印刷

开本 787×1092毫米 1/32　印张 2.75　字数 50千
1988年12月第一版　1988年12月第一次印刷
印数：1—1070册

ISBN7-5408-0607-9/G·590　定价：0.85元

前　言

平面几何在培养中学生的思维能力上占有重要地位。因此，在中学数学竞赛中平几题也占有相当的比重。本书编译自苏联的有关资料，供中学生和中学数学教师竞赛辅导使用。

本书选择的解法均为中学教科书未涉及，或者少见而又极为重要的方法；所选习题也是教科书中少有的，而又富启发性的非标准习题。为了便于读者学习和掌握解题方法，本书习题按解题方法分章，每一章又分为若干小节。每一节的习题都有同一解题思想，且根据难度，由浅入深地编排。著名数学家和教育家波利亚特别赞赏习题的这种循序渐进的编排，认为它不仅有利读者掌握方法，而且对于培养数学思维大有裨益。他的世界名著《数学分析的定理和习题》、《数学与猜想》、《数学的发现》就是这样安排的。

编选本书时，得到王子乐老师的帮助，在此表示感谢。

目　录

第一章　质　心

力学上的质心及其它有关概念可用来解某些几何习题，而且解法还比较简单。

1. 质心

设平面上已知具有质量m_i的点系X_i，即已知数对组(X_i, m_i)，$i=1,2,\cdots,n$。如果平面上一点O满足等式

$m_1\overrightarrow{OX_1}+m_2\overrightarrow{OX_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{OX_n}=\overrightarrow{0}$，我们称点$O$是具有质量$m_1, m_2, \cdots, m_n$的质点系$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$的质心。

例1 证明：（1）平面上的任何质点系都存在唯一的质心；

（2）如果X是平面上任意一点，面O是质量分别为m_1，m_2，$\cdots$，m_n的点系X_1，X_2，$\cdots$，X_n的质心，

则 $$\overrightarrow{XO}=\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_n}(m_1\overrightarrow{XX_1}+m_2\overrightarrow{XX_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{XX_n})$$

证明 设X，O是平面上任意两点，则$\overrightarrow{OX_i}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{XX_i}$（图1·1），于是 $m_1\overrightarrow{OX_1}+m_2\overrightarrow{OX_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{OX_n}=$

$(m_1+m_2+\cdots+m_n)\overrightarrow{OX}+m_1\overrightarrow{XX_1}+\cdots+m_n\overrightarrow{XX_n}$

由上式知，当且仅当$(m_1+m_2+\cdots+m_n)\overrightarrow{OX}+m_1\overrightarrow{XX_1}+m_2\overrightarrow{XX_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{XX_n}=\overrightarrow{0}$时，点$O$才是具有质量$m_1, m_2, \cdots, m_n$的质点系$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$的质心，显然，这时

$$\overrightarrow{XO}=\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_n}(m_1\overrightarrow{XX_1}+m_2\overrightarrow{XX_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{XX_n})$$

这是（2）的证明。

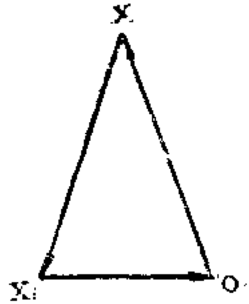

图1・1

利用上述结论可证明（1），任选一点X，对已知的具有质量m_1，m_2，…，m_n的质点系X_1，X_2，…，X_n，作向量

$$\overrightarrow{XO}=\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_n}(m_1\overrightarrow{XX_1}+m_2\overrightarrow{XX_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{XX_n})$$

这样求得的点O满足$m_1\overrightarrow{OX_1}+m_2\overrightarrow{OX_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{OX_n}=\overrightarrow{O}$，即点$O$为已知质点系的质心。

例 1 的解法中，仅用到$m_1+m_2+\cdots+m_n\neq 0$，未要求m_i一定要为正，有时取m_i为负，解题会更简便。

2. 点组定理

如果用质量等于质点系中的部分质点的质量之和，且位于这部分质点的质心位置的一个质点，代替这部分质点组，则原质点系的质心不变。

点组定理是质心的最重要的性质，用质心概念解几何题几乎都是基于这一重要定理。

例2 证明，三角形三中线交于一点，且被这点分为2∶1（从顶点算起）

证明 在$\triangle ABC$的三顶点A、B、C都放上单位质量，即$A(1)$，$B(1)$，$C(1)$，则$B(1)$，$C(1)$二质点的质心在BC边的

中点A_1处，且具有质量2。于是$A(1)$、$B(1)$、$C(1)$三点的质心与$A(1)$、$A_1(2)$两点的质心相同，而$A(1)$、$A_1(2)$两点的质心O在中线AA_1上 且它将AA_1分为

$$AO : OA_1 = 2 : 1, \text{即}$$

$$AO = 2OA_1$$

同理可证，$A(1)$、$B(1)$、$C(1)$三点的质心应在另二条中线上，且将它们分为2∶1，所以三角形的三条中线交于它的质心O，且被O分为2∶1（图1·2）。

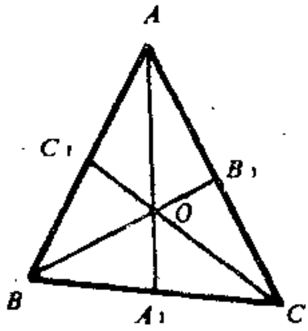

图1·2

例3 在ΔABC的边AB和BC上分别取一点K和L，设M为AL与KC的交点，N为KL与BM的交点，证明，

$$\frac{AK \cdot BC}{LC \cdot AB} = \frac{KN}{NL}.$$

证明 设$BK : AK = p$，$BL : CL = q$。在点A、B、C处分别放上质量p、2、q，设想B为两个质量都是1的点B_1和B_2重合而成，显然，点K是质量为p和1的质点A和B_1的质心，点L是质量为q和1的质点C和B_2的质心。因此，质量为p、2、q的三点A、B、C的质心O位于线段KL上，且分KL为$KO : OL = (q+1) : (p+1)$。又因为M

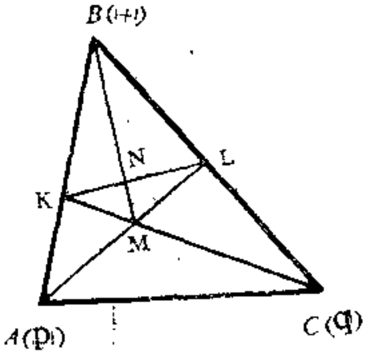

图1·3

是质量为p、1、q的质点系A、B、C的质心，所以O也应是质量为1和$p+q+1$的质点B_2和M的质心，即O在线段BM上，所以点O与N重合，可见，$KN:NL=(q+1):(p+1)$，因为$BK:AK=p$，$BL:CL=q$，所以$AB:AK=1+p$，同理$BC:CL=1+q$。于是

$$\frac{KN}{NL}=\frac{BC:CL}{AB:AK}=\frac{BC\cdot AK}{AB\cdot CL}.$$

3. 转动惯量

平面上已知质量为m_1，m_2，…，m_n的质点系X_1，X_2，…，X_n，M为平面上任一点，称量

$I_M=m_1MX_1^2+m_2MX_2^2+\cdots+m_nMX_n^2$为该质点系关于点$M$的转动惯量。

例4 设O是质量为m_1，m_2，…，m_n的质点系A_1，A_2，…，A_n的质心，X是任意一点。证明，

$$m_1XA_1^2+m_2XA_2^2+\cdots+m_nXA_n^2=m_1OA_1^2+m_2OA_2^2$$

$$+\cdots+m_nOA_n^2+(m_1+m_2+\cdots+m_n)OX^2,$$

亦即　$I_X=I_O+mOX^2$，其中$m=m_1+m_2+\cdots+m_n$。

证明　因为$\overrightarrow{XA_1}=\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA_1}$（图1·4），于是

$$m_1XA_1^2+m_2XA_2^2+\cdots+m_nXA_n^2$$

$$=m_1\left|\overrightarrow{XA_1}\right|^2+m_2\left|\overrightarrow{XA_2}\right|^2+\cdots+m_n\left|\overrightarrow{XA_n}\right|^2$$

$$=m_1\left(\overrightarrow{XO}^2+2\,\overrightarrow{XO}\cdot\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_1}^2\right)+\cdots$$

$$+m_n\left[\overrightarrow{XO}^2+2\,\overrightarrow{XO}\cdot\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_n^2}\right]$$

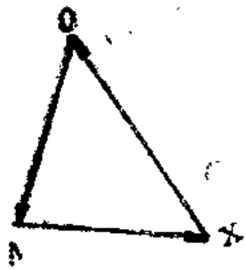

图1・4

$$=m_1XO^2+m_2XO^2+\cdots+m_nXO^2+m_1OA_1^2+m_2OA_2^2+\cdots+m_nOA_n^2+2m_1\overrightarrow{XO}\cdot\overrightarrow{OA_1}$$

$$+\cdots+2m_n\overrightarrow{XO}\cdot\overrightarrow{OA_n}=(m_1+m_2+\cdots+m_n)OX^2$$

$$+m_1OA_1^2+m_2OA_2^2+\cdots+m_nOA_n^2$$

$$+2\overrightarrow{XO}\cdot(m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{OA_n})$$

$$=(m_1+m_2+\cdots+m_n)OX^2+m_1OA_1^2+m_2OA_2^2+\cdots+m_nOA_n^2$$

即 $I_X=I_O+mOX^2$，其中 $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$，

公式 $I_X=I_O+mOX^2$是利用转动惯量解几何问题的基础。

§1 质心的基本性质

1. 证明，质量为a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_m的点系X_1，X_2，…，X_n，Y_1，Y_2，…，Y_m的质心与这样两质点X和Y的质心重合，X是点系X_1，…，X_n的质心且具有质量$a_1+\cdots+a_n$，Y是点系Y_1，…，Y_m的质心且具有质量$b_1+\cdots+b_m$。

2. 证明，质量为a、b的质点A与B的质心位于线段AB上且分它为$b:a$。

§2 点组定理

3. 设$ABCD$是凸四边形，K、L、M、N是边AB、BC、CD、DA的中点。

a）证明，线段KM与LN的交点是它们的中点；

b）证明，线段KM和LN的交点也是四边形的对角线中点连线的中点。

4. 设A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1是任意六边形$ABCDEF$的边AB、BC、CD、DE、EF、FA的中点，证明，$\Delta A_1C_1E_1$和$\Delta B_1D_1F_1$的中线的交点重合。

5. 在ΔABC的三边AB、BC和CA上分别取点C_1、A_1、B_1。证明，直线CC_1、AA_1和BB_1交于一点的充要条件是

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \text{（塞瓦定理）}.$$

6. 在ΔABC的边AB、BC、CA上取点C_1、A_1和B_1，使CC_1、AA_1、BB_1交于一点O，

a）证明，$$\frac{CO}{OC_1}=\frac{CA_1}{A_1B}+\frac{CB_1}{B_1A},$$

b）证明，$$\frac{A_1O}{A_1A}+\frac{B_1O}{BB_1}+\frac{C_1O}{CC_1}=1.$$

7. 在凸四边形$ABCD$的边AB、BC、CD、DA上分别取一点K、L、M、N，且$AK:KB=DM:MC=\alpha$，$BL:LC=AN:ND=\beta$，设P为线段KM与LN的交点。证明，

$NP:PL=\alpha$且$KP:PM=\beta$。

8. 在ΔABC内求一点O，使它具有如下性质：对于任意过O且与AB交于K，与BC交于L的直线，满足等式

$p\frac{AK}{KB}+q\frac{CL}{LB}=1$，其中$p$和$q$是已知正数。

§3 转动惯量

9. a）设M是ΔABC的中线的交点，X是任意一点。证明，$3MX^2=AX^2+BX^2+CX^2-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$。

b）设O是ΔABC外接圆圆心，H是它的三条高的交点，证明，$OH^2=9R^2-a^2-b^2-c^2$，其中R为外接圆的半径。

10. ΔABC是正三角形，求满足$XA^2=XB^2+XC^2$的点X的几何轨迹。

11. 在半径为R的圆内有n个点，证明，它们两两距离的平方之和不大于n^2R^2。

§4 杂 题

12. 直线l与已知ΔABC的边AB和AC相交，且A到l的距离等于B和C到l的距离之和。证明，一切具有此性质的直线都过同一点。

13. 证明，如果多边形有若干条对称轴，那么这些对称轴都交于一点。

14. 方格纸上的一个中心对称图形由大小为1×4的n个角形和k个长方形组成（如图1·5所示）。证明，n是偶数。

15. 在凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$中取一点O，使

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{O}.$$

设$d=OA_1+OA_2+\cdots+OA_n$。证明，当n为偶数时，这多边形的周长不小于$\frac{4}{n}$；当n为奇数时，多边形的周长不小于$\frac{4n}{n^2-1}d$.

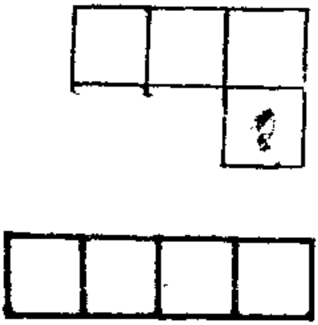

图1·5

第一章　习题解答概要

1. 设Z是平面上任一点，$a=a_1+\cdots+a_n$，$b=b_1+\cdots+b_m$，那么$\overrightarrow{ZX}=\frac{1}{a}\left(a_1\overrightarrow{ZX_1}+\cdots+a_n\overrightarrow{ZX_n}\right)$，且

$\overrightarrow{ZY}=\frac{1}{b}\left(b_1\overrightarrow{ZY_1}+\cdots+b_m\overrightarrow{ZY_m}\right)$. 如果$O$是质量分别为$a$和$b$的两点的质心，则

$$\overrightarrow{ZO}=\frac{1}{a+b}\left(a\overrightarrow{ZX}+b\overrightarrow{ZY}\right)$$

$$=\frac{1}{a+b}\left(a_1\overrightarrow{ZX_1}+\cdots+a_n\overrightarrow{ZX_n}+b_1\overrightarrow{ZY_1}+\cdots+b_m\overrightarrow{ZY_m}\right),$$

即O是质量为a_1，…，a_n，b_1，…，b_m的质点系X_1，…，X_n，Y_1，…，Y_m的质心。

2. 设O是已知质点系的质心，那么$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O}$。因此点$O$在线段$AB$上且$a\cdot OA=b\cdot OB$，即$AO:OB=b:a$。

3. 在四边形$ABCD$的顶点都放置单位质量。设O是这质点系的质心。只需证明，O是线段KM和LN的中点，也是对角线中点连线的中点。显然，K是点A和B的质心，M是点C和D的质心。因此，点O是质量都是2的质点K和M的质心，即O是线段KM的中点。同理，O是线段LN的中点。考虑点A和C，B和D的质心，同样可得出O是对角线中点的连线的中点。

4. 在六边形的顶点都放上单位质量，并用O表示该质点系的质心，因为点A_1、C_1和E_1是点对(A,B)，(C,D)，(E,F)的质心。即O是$\Delta A_1C_1E_1$三中线的交点(见例2)。同理可证，O是$\Delta B_1D_1F_1$的中线的交点。

5. 设直线AA_1和CC_1交于点O，$AC_1:C_1B=p$，$BA_1:A_1C=q$。只需证明，当且仅当$CB_1:B_1A=1:pq$时，直线BB_1才过点O。

在点A、B、C分别放上质量1、p、pq。那么C_1是A和B的质心，点A_1是B和C的质心（图1·6）。因此具有上述质量的质点A、B、C的质心是线段CC_1和AA_1的交点O。另一方面，如果点B_1是质量为1和pq的点A和C的质心。则$CB_1:B_1A=1:pq$。点O又应在点B与B_1

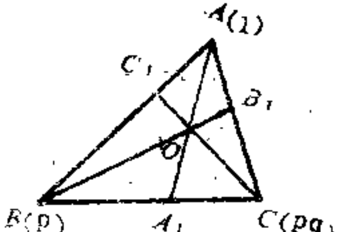

图1·6

的连线上，剩下只要注意到线段AC上仅有唯一的一点B_1，它分AC为已知比$CB_1:B_1A$。

6．设$AB_1:B_1C=1:p$，$BA_1:A_1C=1:q$。在点A、B、C分别放上质量p、q、1．那么A_1和B_1分别是点对(B,C)和(A,C)的质心（图1·7）．因此质点系A、B、C的质心既在线段AA_1上，又在线段BB_1上，也即与点O重合．可见C_1是点A和B的质心。

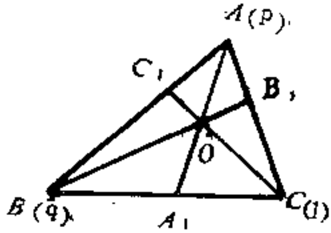

图1·7

a）点C_1是质量为p和q的点A和B的质心，因此

$$\frac{CO}{OC_1}=\frac{p+q}{1}=\frac{CB_1}{B_1A}+\frac{CA_1}{A_1B}$$；

b）点O是质量为p、q、1的质点系A、B、C的质心，而点A_1是点B和C的质心。因此，$A_1O:AO=p:(1+q)$，即$A_1O:A_1A=p:(1+p+q)$．同理$B_1O:B_1B=q:(1+p+q)$，$C_1O:C_1C=1:(1+p+q)$．可见

$$\frac{A_1O}{A_1A}+\frac{B_1O}{B_1B}+\frac{C_1O}{C_1C}=\frac{1+p+q}{1+p+q}=1.$$

7．在点A、B、C、D分别放上质量1、α、$\alpha\beta$、β，（图1·8）．这时，点K、L、M、N分别为点对(A,B)，(B,C)，(C,D)，(D,A)的重心。设O是具有前述质量的质点A、B、C、D的质心，则O在线段NL上且$NO:OL=(\alpha\beta+\alpha):(1+\beta)=\alpha$。同理，点$O$应在线段$KM$上且$KO:OM=(\beta+\alpha\beta):(1+\alpha)=\beta$。因此点$O$是线段

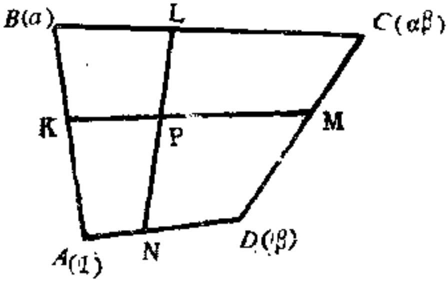

图1·8

KM和LN的交点，即$O=P$且

$$NP:PL=NO:OL=\alpha,\ KP:PM=\beta.$$

8．在点A、B、C分别放上质量p、1、q。设O为这质点系的质心。我们将把质量为1的质点看作两质点重合而成，它们的质量分别为x_a和x_b，且$x_a+x_b=1$。设K是质量为p与x_a的质点A和B的质心，L是质量为q和x_b的质点C和B的质心（图1·9）。那么，$AK:KB=x_a:p$，$CL:LB=x_b:q$，而点O是质量为$p+x_a$与$q+x_b$的质点K和L的质心，点O在线段KL上。当x_a从0变到1时，我们将得出通过点O且与边AB和BC相交的一切直线KL。因此，对一切直线KL，

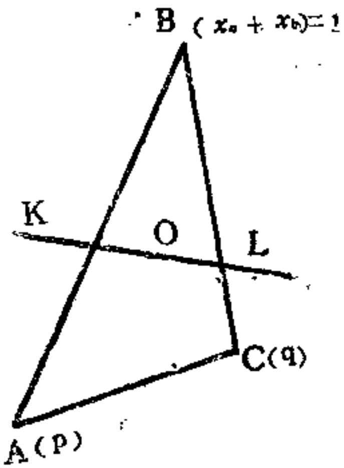

图1·9