数学物理方程

（第二版）

周邦寅　王一平　李　立　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
PHEI
http://www.phei.com.cn

数学物理方程

（第二版）

周邦寅　王一平　李　立　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书主要内容有常微分方程的级数解、特殊函数、正交多项式、数学物理方程的建立及各种解法：分离变量法、积分变换法、行波法、格林函数法、保角变换法等。

本书可作为大学物理专业、电子科学与技术专业、电子信息科学与工程专业及有关工科专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/周邦寅，王一平，李立编著．—2版．北京：电子工业出版社，2005．12
ISBN 7-121-02105-6

Ⅰ．数．．． Ⅱ．①周．．．②王．．．③李．．． Ⅲ．数学物理方程－高等学校－教材 Ⅳ．O175．24

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第145275号

责任编辑：陈晓莉　　特约编辑：李双庆
印　　刷：北京牛山世兴印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编　100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×960　1/16　印张：23.75　字数：532千字
印　　次：2005年12月第1次印刷
印　　数：5 000册　　定价：34.00元

再 版 前 言

本书自出版以来，经过在大学物理专业、电子科学与技术专业、电子信息科学与工程专业及相关的理工科各专业多年使用，市场效果很好。用过本书的师生反映本书，在进入特殊函数讨论时紧接高等数学常微分方程，进一步过渡到偏微分方程比较自然合理、思路清楚、系统性强、易于学习和接受。此外书中例题面宽，在系统地讲解了特殊函数、数学物理方程的建立及数理方程的各种解法基础上，特别是在把一个物理问题转变为数学问题上做了比较深入的引导，深受学生欢迎。

本次修订在不改动原书特色的基础上，对书中的错误和不妥之处进行了修改。

最后，对多年来使用该教材的老师和同学在教学过程中提出的批评和建议深表感谢。感谢北京航空航天大学杨应辰教授对本书初版提出的意见和建议。但毕竟由于作者的水平所限，再版后错误和不妥之处在所难免，还望今后使用该书的师生们给予指正。

作　者

2005 年 8 月

前　言

数学物理方程是一门同实际联系较密切、综合性较强的学科。它以解决实际问题为惟一目标，广泛运用力学、物理学和数学等各个领域的知识。

1980 年，当我们在给物理专业的学生按理科要求讲述“数学物理方法”的第二部分“数学物理方程”时，就感到原来该课程的体系对训练学生在开拓思路、学会使用这些方法来处理物理问题方面受到约束。主要的原因是在讲授次序中把特殊函数放到了数学物理偏微分方程的后面，以致在讲述偏微分方程时，例题面太窄。待讲过特殊函数后，又没有时间再返回来对各类典型问题的偏微分方程解法进行训练。为此，我们在不改变教材的基本内容的情形下做了一些变动。以后，又经过在高校技术物理专业、物理专业等多个年级中继续试验，并在此基础上写成了《数学物理方程》一书初稿。这本初稿又在高校物理专业、电子信息工程专业、技术物理专业等多届学生中试用。实践证明，我们的设想和做法受到了学生的欢迎，在教学上取得了良好的效果。因而，作为对物理基础要求较高的专业的数学基础教材而定稿。

本书主要分为两大部分共 11 章，系统地讲解了特殊函数、数学物理方程的建立及数理方程的各种解法。在内容安排上较合理，思路清楚，系统性较强，它比国内同类专业选用的这类教材有较明显的创新。这种体系使学生在学完高等数学之后，进一步过渡到偏微分方程的学习时比较自然，易于掌握，不致引起概念上的突变。同时，在进一步的学习过程中在方法的训练和计算实例的示范中有较大的回旋余地。因而，在训练学生解决实际问题的能力和把物理问题变为数学问题方面，可以做比较深入的引导。这是与同类工程数学教材相比又一独特之处。正是由于在体系上做了改动，故能够比较自然地引出厄密多项式、拉盖尔多项式等而又不增加很多教学时数。使用这一教材所需的教学时数约为 60～72 学时。

由于水平所限，书中难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正，谢谢。

作　者

目　录

第1篇　二阶线性常微分方程的级数解及正交多项式

当我们用分离变量法求解数学物理方程时，常常导出二阶线性常微分方程的求解和把一个函数用正交多项式展开的问题。在本篇中，我们将讨论二阶线性常微分方程的级数解、斯特姆—刘维型本征值问题及正交多项式等问题，为下一篇数学物理方程的学习打下一个基础。

第1章　二阶线性常微分方程的级数解

在具体的物理或工程问题中，往往会导出二阶线性常微分方程，特别是在日后的学习工作过程中，在用分离变量法求解数学物理方程时，要根据所给问题的具体边界选择不同的坐标系。当我们采用球坐标系和柱坐标系对拉普拉斯方程、热传导方程和波动方程求解时，常常会导出二阶线性常微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的求解问题。

一般来说，对这类变系数的常微分方程不能用“高等数学”课程中所介绍的方法来求解。如方程

$$y'' - xy = 0$$

$$xy'' + y' + xy = 0$$

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0(\lambda \text{ 是常数})$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0(n \text{ 为常数})$$

等。为此，在本课程的开始，我们首先简单地介绍一下二阶线性常微分方程的级数解法。为日后数理方程的讨论铺平道路，以便我们今后能把全部的注意力都集中到数学物理偏微分方程的求解上。

所谓方程的级数解法，就是说，把二阶常微分方程的解表示为系数待定的幂级数，再将它代入原方程逐个确定其系数（当然原方程的系数 $p(x)$、$q(x)$ 也要做相应级数展开），从而最终得到这个级数形式的解。

这里要注意,既然把方程的解表示为级数形式,就有一个级数收敛的问题和级数的收敛范围问题。所以用级数解法,首先要选定以某个点 x_0 作为展开中心,得到的解是以 x_0 为中心的幂级数。其次,我们还必须确定这个幂级数的收敛范围——收敛圆,级数解只在收敛圆内部有意义。

1.1 二阶线性常微分方程的奇点

二阶线性常微分方程的标准形式是

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0 \tag{1-1}$$

式中,$w(z)$ 是未知函数,系数 $p(z)$、$q(z)$ 都是已知复变函数。

当在一定的条件下,例如,初始条件 $w(z_0)=c_0, w'(z_0)=c_1$,在一定区域内求方程(1-1) 的解 $w(z)$ 时,常微分方程的解析理论①告诉我们,解的性质完全为方程的系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的解析性所确定。设 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在一定区域中,除有限个孤立奇点外,是 z 的单值解析函数。则区域中的点可分为两类:

(1) 如果方程(1-1) 的系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 都在某点 z_0 及其邻域内解析,则 z_0 称为该方程的常点。

(2) 如果方程(1-1) 中的两个系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 之一在某点 z_0 不是解析的,则 z_0 就称为该方程的奇点。

我们用级数解法来求解在一定区域内、一定条件下方程(1-1) 的解 $w(z)$ 时,首先确定在哪个点的邻域上求解方程的解。也就是说,首先选取展开中心 z_0,即在 z_0 点把解展为幂级数;然后再根据选取的展开中心 z_0 是方程的常点还是奇点分别进行讨论。

1.2 方程常点邻域内的解

若 z_0 是方程(1-1) 的一个常点,求在该点邻域内方程(1-1) 的解。由微分方程解析理论可知有如下定理。

定理 1-1 如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R$(R 是与 z_0 最近的方程的奇点到 z_0 点的距离) 内是单值解析的,则方程

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0 \tag{1-2}$$

在圆内有惟一的一个解 $w(z)$,且满足初值条件

① 参看尤秉礼编《常微分方程补充教程》,人教出版社(1980)。

$$w(z_0) = c_0, \quad w'(z_0) = c_1 \tag{1-3}$$

式中，c_0 和 c_1 是任意常数，并且 $w(z)$ 在这个圆内是单值解析的。

根据这个定理，可把方程(1-2)的解 $w(z)$ 在它的常点 z_0 的邻域 $|z - z_0| < R$ 中表示为泰勒级数形式，即

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{1-4}$$

将方程(1-4)代入方程(1-2)中(当然方程(1-2)中的系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 也要在 z_0 的邻域内做相应的泰勒展开)，可以确定级数式(1-4)的系数 c_k(用 c_1 和 c_0 表示)。这样就得到方程(1-2)的解在其常点 z_0 的邻域内的幂级数表达式。下面通过具体例子来说明级数解法的具体步骤。

例 1-1　在 $x_0 = 0$ 的邻域内求解常微分方程

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \text{ 是常数}) \qquad ①$$

解　方程的系数 $p(x) \equiv 0, q(x) = \omega^2$，在指定的展开中心 $x_0 = 0, p(x_0) = 0$ 和 $q(x_0) = \omega^2$ 是有限的，它们在 $x_0 = 0$ 是解析的，所以 $x_0 = 0$ 是方程的常点。

在 $x_0 = 0$ 的邻域内，把方程 ① 的解表示为泰勒级数的形式。

设：

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \qquad ②$$

式中，c_k 为待定常数，逐项对方程 ② 微分得

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad ③$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \qquad ④$$

至于 $p(x) = 0$ 和 $q(x) = \omega^2$ 都是只有常数项的泰勒级数，无须再做展开。

把方程 ②、④ 代入原方程 ①，得

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

因为，此式对 x 是一个恒等式，故 x 的各次幂的系数均应分别为零。遂得：

x^0 的系数　　$2 \times 1 c_2 + \omega^2 c_0 = 0$

x^1 的系数　　$3 \times 2 c_3 + \omega^2 c_1 = 0$

x^2 的系数　　$4 \times 3 c_4 + \omega^2 c_2 = 0$

x^3 的系数　　$5 \times 4 c_5 + \omega^2 c_3 = 0$

……　　…………

x^k 的系数　　$(k+2)(k+1) c_{k-2} + \omega^2 c_k = 0$

最后这个式子是一般的。由此式可看出：从 x^k 项的系数c_k 可以推算出x^{k+2} 项的系数 c_{k+2},因此称为系数的递推公式。可写做

$$c_{k+2} = \frac{\omega^2}{(k+2)(k+1)} c_k \tag{5}$$

由递推公式对式 ⑤ 进行具体系数递推,即

$$c_2 = -\frac{\omega^2}{2!} c_0$$

$$c_3 = -\frac{\omega^2}{3!} c_1$$

$$c_4 = -\frac{\omega^2}{4 \times 3} c_2 = \frac{\omega^4}{4!} c_0$$

$$c_5 = -\frac{\omega^2}{5 \times 4} c_3 = \frac{\omega^4}{5!} c_1$$

…………

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} c_0$$

$$c_{2k+1} = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!} c_1$$

这样,我们得到方程的解

$$\begin{aligned} y(x) = & c_0\left[1 - \frac{1}{2!}(\omega x)^2 + \frac{1}{4!}(\omega x)^4 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}(\omega x)^{2k} + \cdots\right] + \\ & \frac{c_1}{\omega}\left[(\omega x) - \frac{1}{3!}(\omega x)^3 + \frac{1}{5!}(\omega x)^5 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \times (\omega x)^{2k+1} + \cdots\right] \\ = & c_0 \cos\omega x + \frac{c_1}{\omega} \sin\omega x \end{aligned} \tag{6}$$

最后还需要确定这个级数的收敛半径。上式两个方括号[ ]中的级数是我们所熟悉的,它们的收敛半径为无限大, 即只要 x 有限,这两个级数都收敛。

式 ⑥ 中的 c_0 和 c_1 是任意常数,当然,c_1/ω 也是任意常数,故我们可以把式 ⑦ 写成

$$y(x) = c_0\cos\omega x + c_1\sin\omega x \qquad ⑦$$

注意方程 ① 本来就是一个常系数的微分方程,它的解是我们所熟悉的。这里用级数解法来解只是为了帮助大家领会用级数解法解题的步骤。

例 1-2　求方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0 \qquad ①$$

在 $x_0 = 0$ 点邻域内的级数解,其中 l 是一个参数。

解　这个方程称为 l 阶勒让德方程。

首先我们把式 ① 化为如式(1-2) 的标准形式

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{l(l + 1)}{1 - x^2}y = 0$$

系数 $p(x) = -\frac{2x}{1 - x^2}, q(x) = \frac{l(l + 1)}{1 - x^2}$ 在指定的展开中心 $x_0 = 0$ 处。当 $p(x_0) = 0, q(x_0) = l(l + 1)$ 是有限的,它们必然在 $x_0 = 0$ 为解析的,因此,$x_0 = 0$ 是方程的常点。

在 $x_0 = 0$ 的邻域内,这个方程的解可以表达成下列级数形式

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \qquad ②$$

式中,c_k 为待定常数。逐项微分式 ②,得

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} \qquad ③$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)c_k x^{k-2} \qquad ④$$

式 ① 的系数$(1 - x^2)$是只有常数项和二次项的泰勒级数,$-2x$ 是只有一次项的泰勒级数,故无须再做级数展开。

把式 ②、式 ③ 和式 ④ 代入原方程 ① 中,得到

$$(1 - x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + l(l + 1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

此式是对 x 的一个恒等式,故 x 的各次幂的系数均应为零,遂得一系列的系数方程:

x^0 的系数　　$2 \times 1c_2 + l(l + 1)c_0 = 0$

x^1 的系数　　$3 \times 2c_3 + (l^2 + l - 2)c_1 = 0$

x^2 的系数　　$4 \times 3c_4 + (l^2 + l - 6)c_2 = 0$

x^3 的系数 $\quad 5\times 4c_5+(l^2+l-12)c_3=0$

…… $\quad$ …………

x^k 的系数 $\quad (k+2)(k+1)c_{k+2}+[l(l+1)-k(k+1)]c_k=0$

一般的系数递推公式是

$$c_{k+2}=-\frac{l(l+1)-k(k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{⑤}$$

由递推公式⑤具体进行系数递推,得

$$c_2=\frac{(-l)(l+1)}{2!}c_0$$

$$c_3=\frac{(1-l)(l+2)}{3!}c_1$$

$$c_4=\frac{(2-l)(l+3)}{4\times 3}c_2=\frac{(2-l)(-l)(l+1)(l+3)}{4!}c_0$$

$$c_5=\frac{(3-l)(l+4)}{5\times 4}c_3=\frac{(3-l)(1-l)(l+2)(l+4)}{5!}c_1$$

…………

根据式⑤,我们把所有下标为偶数的系数 c_{2k} 用 c_0 表示出来,而把所有下标为奇数的系数 c_{2k+1} 用 c_1 表示出来,即得

$$c_{2k}=\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(2-l)(-l)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}c_0$$

$$c_{2k+1}=\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}c_1$$

将式⑤代入式②,则得 l 阶勒让德方程①的含有两个任意常数 c_0 和 c_1 的通解,即

$$\begin{aligned}y(x)=&\,c_0\Big[1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!}x^4-\cdots+\\&\frac{(-1)^k(l-2)\cdots(l-2k+2)l(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}+\cdots\Big]+\\&c_1\Big[x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!}x^5-\cdots+\\&\frac{(-1)^k(l-1)(l-3)\cdots(l-2k+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots\Big]\end{aligned}$$

$$= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \qquad ⑥$$

式中，$y_1(x)$ 只含 x 的偶次幂，$y_2(x)$ 只含 x 的奇次幂。

当然，由于方程 ① 中含有参数 l，解式 ⑥ 中的 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 也必依赖于这个参数，由式 ⑤ 可知这个参数将出现在 x 的各次幂的系数中。

最后确定式 ⑥ 中两个方括号[　] 中的级数的收敛半径。

根据比值收敛法可得这个级数解式 ⑥ 收敛于 $|x| < 1$，而发散于 $|x| > 1$。所以收敛半径 $R = 1$。

现在回到普通的方程(1-2) 和它的常点在 z_0 的级数解式(1-4)，用与上面例子相同的步骤来确定系数 c_k。因 $p(z)$ 和 $q(z)$ 都在 z_0 点解析，故有泰勒级数展开

$$p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m, q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m \qquad ⑦$$

式中
$$a_m = p^{(m)}(z_0)/m!, b_m = q^{(m)}(z_0)/m!$$
均是已知的。

把式(1-4) 和式 ⑦ 代入方程(1-2) 中，得

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k (k-1) k (z - z_0)^{k-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (z - z_0)^{k-1} +$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = 0$$

这是一个关于$(z - z_0)$的恒等式，故各次幂的系数均应为零，由此可得系数 c_k 的递推公式

$$(k+2)(k+1) c_{k+2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m (k+1-m) c_{k+1-m} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m c_{k-m} = 0^{①}$$
$$(k = 0,1,2,\cdots) \qquad ⑧$$

则解式(1-4) 满足方程(1-2)。

利用式 ⑧ 可以从 c_2 开始逐一把所有的系数都用 c_0 和 c_1 表示出来。因此方程(1-2) 具有形如 $y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$ 的通解，但 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 一般并不一定分别只含 x 的偶次幂和奇次幂。

---

① 这里用了公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (k + l = n; n = 0,1,2,\cdots)$$

式中
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l$$

1.3 方程正则奇点邻域内的正则解

由 1.2 节中的定理可知,方程 $w''+p(z)w'+q(z)w=0$ 的常点必是解的解析点。但是,方程的奇点则可能同时也是解的奇点。因此,当 z_0 为方程的奇点时,如果仍然试图得到幂级数形式的解,当然应当考虑罗朗级数。此时由常微分方程的解析理论可得如下定理。

定理 1-2 如果 z_0 是方程 $w''+p(z)w'+q(z)w=0$ 的奇点,则在 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内(R 足够小,使环状域内无方程的奇点),方程有两个线性无关的解:

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-z_0)^k \tag{1-5}$$

$$w_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(z-z_0)^k \quad (\rho_1-\rho_2\neq 0\text{、整数}) \tag{1-6}$$

或

$$w_2(z)=aw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(z-z_0)^k$$

$$(\rho_1-\rho_2=0\text{、整数}) \tag{1-7}$$

式中 $\rho_1,\rho_2,a,c_k,d_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是待定系数。

如果我们仍仿照 1.2 节中的做法,把解式(1-5)、式(1-6) 或式(1-7) 分别代入原方程确定常数 ρ_1,ρ_2 和系数 a,c_k,d_k 时,一般说得到的是无穷个联立方程,每一个方程含有无穷个未知数。因此,在普遍的情况下,用这种方法求解是不方便的。

但在一些特定的条件下,以上诸式[(1-5),(1-6) 或(1-7)] 中会出现无穷级数中不含负幂项的情形。这样的解称为方程的正则解。这时,若用上节方法来求系数,将会得到一系列关于系数的递推公式。

定理 1-3 方程 $w''+p(z)w'+q(z)w=0$ 在它的奇点 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内有两个正则解的充要条件是

$$(z-z_0)p(z) \text{ 和 } (z-z_0)^2q(z) \text{ 在 } 0<|z-z_0|<R \text{ 中解析} \tag{1-8}$$

也就是说 z_0 最多是 $p(z)$ 的一阶极点,同时最多是 $q(z)$ 的二阶极点。满足条件式(1-8) 的奇点称为方程的正则奇点,否则为方程的非正则奇点①。

下面我们来说明求正则解的步骤。为了讨论方便,我们设正则奇点为 $z_0=0$(对于一般 $z_0\neq0$ 的奇点,只要把下面各式中的 z 换成 $z-z_0$ 即可)。

以 z^2 乘标准的二阶线性常微分方程

---

① 参看:王竹溪、郭敦仁,《特殊函数》,科学出版社,1965。

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \tag{1-9}$$

得

$$z^2w'' + zp_1(z)w' + q_1(z)w = 0 \tag{1-10}$$

式中

$$p_1(z) = zp(z), q_1(z) = z^2q(z)$$

按所设，$z_0 = 0$ 是正则奇点，故由条件(1-8)可知 $p_1(z)$ 和 $q_1(z)$ 在 $z_0 = 0$ 点及其邻域内是解析的，可按泰勒级数展开

$$p_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s, \qquad q_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s z^s \tag{1-11}$$

设方程(1-10)的正则解为

$$w(z) = z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\rho+k} \qquad (c_0 \neq 0) \tag{1-12}$$

把式(1-11)、式(1-12)代入式(1-10)中，得

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^{\rho+k} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)z^{\rho+k} + \sum_{s=0}^{\infty} b_s z^s \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\rho+k} = 0$$

消去因子 z^{ρ}，得

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^{k} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)z^{k} + \sum_{s=0}^{\infty} b_s z^s \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k} = 0 \tag{1-13}$$

要使该式在 $|z| < R$ 的区域内成立，左边 z 的各次幂的系数都必须等于零。

由 z 的最低次幂的系数为零，得

$$c_0(\rho)(\rho-1) + a_0c_0\rho + b_0c_0 = 0$$

$$c_0[\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0] = 0$$

但又因为 $c_0 \neq 0$，故有

$$\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0 = 0 \tag{1-14}$$

这是 ρ 的二次代数方程，称为指标方程，因为这个方程的两个根 ρ_1 和 ρ_2 给出了解式(1-12)的指标。

再由式(1-13)中 z^n 的系数为零，得

$$c_n(\rho+n)(\rho+n-1) + \sum_{s=0}^{n} a_s(\rho+n-s)c_{n-s} + \sum_{s=0}^{\infty} b_s c_{n-s} = 0$$

$$(n = 1,2,3,\cdots) \tag{1-15}$$

利用这个系数递推关系，可以逐一地把式(1-12)中的 $c_k(k > 0)$ 用 c_0 和 ρ 及已知的 a_s、b_s 表示出来。

但因指标方程(1-14)有两个根 ρ_1 和 ρ_2，为讨论方便我们设 $\mathrm{Re}(\rho_1) \geqslant \mathrm{Re}(\rho_2)$，