动态规划与序贯最优化

林诒勋　编著

河南大学出版社

序

与时间进程有关的最优化问题有着广泛的应用背景，这是因为世间万物的运动和变化都离不开时间. 1957 年，R. Bellman 的名著 Dynamic Programming（动态规划）问世，为这类问题提供了理论基础和计算方案. 随后的发展，在最优化学科中开辟出一个别具特色的园地.

我编写这部教材的动机是介绍动态规划的思想方法，特别是从最优化原理所演变出来的各种理论，但是在取材上有明显的偏好，这不能不与笔者的学习与工作经历有关. 60 年代以来，笔者参加过水库调度等应用动态规划方法的实际项目. 70 年代又参加华罗庚先生倡导的推广应用优选法工作，并加入越民义教授和韩继业教授带领的排序论研究队伍. 这些相关的研究课题并不拘泥于多阶段决策过程的格式，而是有着更丰富的内容，我们统称之为序贯最优化. 序贯最优化是一个很广阔的领域，还有许多问题有待于研究.

这部教材，同先前出版的姊妹篇《线性规划与网络流》一样，开始是为大学本科生的选修课编写的，后来也作为硕士研究生的参考讲义. 从 1983 年以来，这门课先后在郑州大学数学系讲授过 4 次，每次都对讲义做过修改.

作者在这一领域的学习和工作过程中，先后承吴沧浦教授、吴祖基教授和秦裕瑗教授等的指导和支持；在编写教材和教学过程中，还得到许多亲朋和同事的挚诚相助，在此谨向他们致以深切的谢意. 同时，对河南省教委的出版资助以及河南大学出版社的精心编辑工作表示衷心的感谢.

林诒勋

1996 年 9 月于郑州大学

目　录

第一章　绪论……………………………………………………（1）

§1　序贯最优化问题 ……………………………………………（1）

§2　例子和基本思想 ……………………………………………（3）

§3　策略的一般概念……………………………………………（14）

§4　最优化原理…………………………………………………（15）

习题和补充 ……………………………………………………（19）

第二章　序贯决策的递推方法 ……………………………………（22）

§1　递推算法……………………………………………………（22）

§2　基本方程的迭代解法………………………………………（29）

§3　不定期过程方法……………………………………………（36）

§4　定期与不定期过程的关系…………………………………（44）

§5　关于解析方法的讨论………………………………………（50）

§6　小结:函数方程的迭代解法 ………………………………（56）

习题和补充 ……………………………………………………（61）

第三章　序贯决策的分枝方法 ……………………………………（65）

§1　最优化原理的另一应用……………………………………（65）

§2　分枝定界算法………………………………………………（69）

§3　一般整数规划的分枝定界算法……………………………（82）

§4　字典序枚举…………………………………………………（87）

习题和补充 ……………………………………………………（88）

第四章　排序问题 …………………………………………………（90）

§1　基本概念……………………………………………………（90）

§2　局部置换法…………………………………………………（96）

§3　匹配方法 …………………………………………… (102)
§4　排序过程的递推方程刻划 ……………………… (108)
§5　势函数与凸性 ………………………………… (115)
§6　递推与分枝算法 ……………………………… (119)
习题和补充…………………………………………… (124)
第五章　序贯直接搜索法……………………………… (126)
§1　单变量试验最优化问题 ……………………… (126)
§2　判定型问题的搜索方法 ……………………… (128)
§3　优选型问题的搜索方法 ……………………… (131)
§4　离散问题 ……………………………………… (145)
§5　试验过程和策略的描述 ……………………… (147)
§6　精度序列的特征 ……………………………… (153)
§7　有限情形的最优策略——分数法 …………… (154)
§8　无限情形的最优策略——黄金分割法 ……… (158)
习题和补充…………………………………………… (162)
第六章　分批直接搜索法……………………………… (166)
§1　概述 …………………………………………… (166)
§2　预定批数的试验 ……………………………… (169)
§3　预定批数情形的最优性证明 ………………… (175)
§4　不限定批数的试验 …………………………… (182)
§5　不限定批数情形的最优性证明 ……………… (185)
§6　试验次数的调整与分配 ……………………… (188)
§7　多变量搜索问题 ……………………………… (193)
习题和补充…………………………………………… (195)
参考文献……………………………………………… (197)

第一章　绪　　论

我们首先来介绍动态规划学科的研究对象、基本概念和基本原理.

§1　序贯最优化问题

生产建设各行各业都会出现这样的问题：在现有的资源和设备条件下，如何做到人尽其才、物尽其用，充分挖掘生产潜力，达到优质、高产、低消耗的目的. 除了调动人的积极因素之外，资源的合理使用、工艺参数和操作条件的适当选择以及各种技术因素的充分发挥，都是十分重要的. 例如对某种化学反应过程来说，所采用的生产流程、原料的配方、反应条件（温度、压力、时间、搅拌速度）、仪器的工作点（电流、电压）以及设备的运行状态等等，都需要进行合理选择，以期某种经济指标或技术指标达到尽可能好的程度. 在生产实践和科学试验中，人们总是从不同的途径去寻找一个系统的最佳运行方式，这就是所谓最优化问题.

在现实生活中，我们往往遇到这样一类最优化问题，其系统的运行呈现出明显的阶段性和序列性，而对系统的控制也表现为多步决策过程. 例如资源开发问题，每一年度都要对投资和利用作出决择，这种决择依赖于前一年度的开发情况，又影响着下一年度的发展. 在一个长过程中，应该采用怎样的决策方案，才能求得最大的效益呢？又如我们进行一种配方试验，先按照某种方案做一批试验，然后根据试验结果提供的信息再安排下一批试验，如此做下去. 如何合理地安排每一批的试验点，才能在达到试验目的的前提

下使试验时间或试验费用最省呢？这些问题都是以阶段性或序列性为特征的，而控制过程发展的措施也是逐步进行的. 另外有的问题，即使从客观属性上并不显露出时间序列性，但也可以人为地划分为一些阶段，作为一个过程来处理. 例如，求一个 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最大值，我们可以把确定 x_1，确定 x_2，…，确定 x_n 看作 n 个阶段的 n 次选择. 这也就是把静态模型（非序列性模型）作为动态模型（序列性模型）来处理. 总之，选择一种运用策略去控制一个多阶段过程的发展，以期达到最佳的运行效果（使某种指标达到最佳程度），这就称为**序贯最优化问题**.

当然，许多过程发展的特征并不是阶段性，而是渐进性或连续性的. 对这种过程的最优化问题称为**连续型过程最优化问题**. 与此相对的，上述序贯最优化问题也可称为**离散型过程最优化问题**.

其实，在多数实际问题中，连续情况是可以作离散化处理的. 而在概念和理论的阐述上，离散型问题的研究有着基本的重要性（关于连续型过程最优化问题可参见本章§2.4）.

在一般的最优化问题中，各种可控因素（如设计参数、生产方案等）可以用一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来描述. 而资源限制、工艺要求等则表现为诸变量满足一定的约束条件，即 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 必须属于某个约束域 D. 受控系统的运行效果可用一定的经济指标或技术指标（如产量、质量、成本等）来衡量，这就是目标函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 从数学上说，最优化问题就是在一定的约束域 D 上求某个函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最大值或最小值，即

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)\in D} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad \text{或} \quad \min_{(x_1,\cdots,x_n)\in D} f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

关于函数 f，这里有两种情况. 第一，系统的运行规律的确可以用数学方程式描述出来，即目标函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及约束域 D 都可以用解析表达式表示. 这种最优化模型称为**解析模型**或**白箱模型**. 第二，由于系统的结构和机理尚未被充分认识，因而其中

的转换规律不能用解析表达式来描述，但对一定范围的输入信号$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，可以通过试验、观测或数值计算的方法，得出响应值 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 这种最优化模型称为**数值模型**或**黑箱模型**. 模型不同，解决方法也各异. 最优化理论正是按照这两种模型而分为两大领域. 适用于解析模型的最优化方法是解析法或间接最优化方法. 解极值问题的古典方法(微分法及变分法)以及近代的数学规划论(线性规划、非线性规划、动态规划、离散规划等)都属于这一领域. 适用于黑箱模型的最优化方法是数值法或直接最优化方法. 近年来兴起的直接搜索法(优选法)或试验最优化方法(包括正交试验法、蒙特卡洛方法)就是属于这后一领域.

两种模型，两种方法，在一定条件下可以相互转化. 有时，虽然目标函数可以用解析表达式写出，但形式很复杂，解析法在实现上存在困难. 我们也可以用数值法来处理，比如可以在计算机上做试验，得出一串函数值，用直接搜索的办法去求最优解. 反之，对黑箱模型来说，可以通过一定数量的试验和观测，得到一组响应值，使用曲面拟合的方法近似地写出目标函数的表达式，然后用解析法求其最优解. 下面第五章介绍的插值法(如抛物线法)便是这两种方法的结合.

对于序贯最优化问题来说，也有解析模型(白箱)和数值模型(黑箱)之分. 本书前半部介绍的多阶段决策过程及排序问题等均属前者，后半部介绍的序贯搜索过程(优选法)则属后者.

§2 例子和基本思想

2.1 多阶段决策过程

考察某个系统的运行(活动)过程，它可以分为若干个阶段. 为控制系统的运行沿着预期的方向发展，在每一阶段都要作出决策.

这个决策依赖于当前面临的状态，又给随后的发展以影响．当每一阶段的决策确定下来，构成一个决策序列，这也就决定了系统的运行（活动）路线．这样一个前后关联的多阶段过程具有下图所示的链状结构：

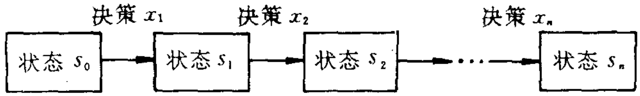

图 1-1

这就称为 **n 阶段决策过程或离散过程**.

下面来看一些例子.

(1) 多阶段网络的最短路问题．在图 1-2 所示的网络（有向图）中，诸顶点可以代表城市、工序、设备等等，诸弧（边）可以代表道路、传送带、电线等等．每一条弧都赋予一个长度，今欲求从起点 A 到终点 E 的一条最短路．从图中可以看出，沿每一条从 A 到 E 的路前进都必须经过三个阶段的决策：选择 B_1，B_2 或 B_3；选择 C_1，C_2 或 C_3；选择 D_1，D_2 或 D_3．所以这是一个三阶段决策过程.

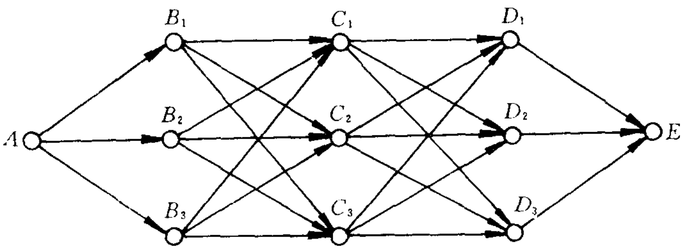

图 1-2

(2) 零件加工顺序或任务安排问题．设有 n 个零件（任务）J_1，J_2，…，J_n 要在一台机器（机构）中加工（执行）．欲求一个最好的作业顺序，以期等待或延误时间为最小．显然，任一作业顺序都包含 n 个阶段的决策．选择排在第一位的零件（任务）有 n 种可能（即

$J_1, J_2, \cdots$, 或 J_n). 一旦第一位的 J_{i_1} 定下来，就造成这样一个状态：第二位只有 $n-1$ 种选择. 从中选出第二位的零件 J_{i_2}，如此类推，直至剩下最后一个零件排在第 n 位. 这是一个 n 阶段决策过程（或者说 $n-1$ 阶段决策过程，因为最后一位没有选择余地）.

(3) 资金分配问题. 在 n 年的一个生产周期中，某公司每年都要订购两类设备(A, B). 初始资金为 s_0 元. 第一年用 x_1 元去购买 A 类设备，余下的(s_0-x_1)元用来购买 B 类设备($0 \leqslant x_1 \leqslant s_0$). 在这一年中，$A$ 类设备可以得到收益 $g(x_1)$，B 类设备可以得到收益 $h(s_0-x_1)$. 年终将设备折旧出售，分别收回资金 ax_1 元及 $b(s_0-x_1)$ 元($0<a, b<1$). 第二年用资金 $s_1=ax_1+b(s_0-x_1)$ 再去订购设备. 如此重复做下去，直至第 n 年为止. 试问应如何分配 n 年中购买 A 类设备的款项 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使总收益

$$F(s_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) + h(s_{i-1} - x_i)]$$

为最大. 这个例子作为图 1-1 所示结构的注释是再恰当不过的了. 第 i 年手头的资金 s_{i-1} 就描述这一阶段的状态，而用来购买 A 类设备的资金 x_i 则是这一阶段的决策. 制定 n 年的资金分配计划，就是一个 n 阶段决策过程.

一般地说，每一阶段的状态可以用某个参数 s_i——称为状态变量来描述；每一步决策又可以用某个变量 x_i——称为决策变量来表示. 每一步决策的后果是造成状态的转移，这又由状态转移函数来表示. 例如在上述资金分配问题中，第 i 阶段的决策 x_i 就造成状态（资金）s_{i-1} 转移到状态（资金）$s_i=ax_i+b(s_{i-1}-x_i)$. 而 n 个阶段的决策总体($x_1, x_2, \cdots, x_n$)就表示整个过程的决策方案，称为一个**策略**. 当初始状态 s_0 和策略($x_1, x_2, \cdots, x_n$)确定下来，就决定了过程的发展. 因此，n 阶段决策过程的总效益（或总消耗）就由目标函数

$$y=F(s_0; x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

来表示. 使目标函数 y 达到最大值(或最小值)的策略称为**最优策略**.

在此,我们约定所讨论的决策过程具有如下的特点:

1. 无后效性(马尔科夫性):过程的未来发展只与当前的状态和决策有关,而与过去的历史无关. 换言之,一般的状态转移函数为 $s_{i+1}=\varphi(s_i, x_{i+1})$ 的形式,并不依赖于 $s_0, x_1, , \cdots, s_{i-1}, x_i$. 当前的状态是以往历史的一个总结.

2. 可分离性:过程的每一个局部(子过程)都可以计算效益(消耗),并且全过程的效益(消耗)等于每个阶段的效益(消耗)的总和. 确切地说,我们把 n 个阶段构成的集合记为

$$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}.$$

对于给定的初始状态 s_0 和策略 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 而言,第 i 阶段 e_i 的效益为一个定值,记为 $v(e_i)$(相当于元素 e_i 被赋予一个度量或权). 于是,对任一子过程 $A\subseteq E$,可以定义 A 的效益

$$v(A)=\sum_{e_i\in A} v(e_i).$$

因而 $v(A)$ 就是一个定义在 E 的子集族上的可加集函数(权函数或广义测度). 当策略 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变动时,子过程 $A=\{e_i, e_{i+1}, \cdots, e_n\}$ 的效益依赖于 $s_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n$. 特别是

$$v(E)=F(x_0; x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

这里,$v(A)$ 定义中的加法“+”可作广义的理解,即可代以实数集上其它代数运算“$\oplus$”(但要求具有可交换性、可结合性及保序性),如正实数的乘法等. (注:所谓保序性,是对序关系“$\leqslant$”而言,$a\oplus b_1\leqslant a\oplus b_2 \Leftrightarrow b_1\leqslant b_2$.)

当然,我们还可以推广这些条件,考虑更一般的模型. 但是,具有上述两个特点的决策过程是最基本的,而且在实际应用上也是足够广泛的.

2.2 两种寻优途径

动态规划是解决多阶段决策问题的数学方法."动态"一词的含义是:决策依赖于当前的状态,而又随即引起状态的转移;一个决策序列正是在状态的运动变化中产生出来的. 正如其它数学规划方法一样,动态规划的主要任务是求最优解,即最优策略. 对多阶段决策过程来说,探寻最优策略的途径有如下两种类型.

第一,广探型:步步为营,全线推进.

为清楚起见,我们选一个尽量简单的过程来说. 除初始阶段只有一个状态 s_0 之外,每一阶段都只有三个状态:状态 1,状态 2,状态 3(状态变量 s_i 可取三个值 1,2,3);同时每一阶段也只有三个决策:$x_i=1,2,3$. 无论当前的状态如何,当 $x_i=j$ 时,下一阶段就转移到状态 j. 我们将状态和决策的演变作如图 1-3 的阵列式表示,其中顶点表示状态,弧表示决策,每一条从起点到终点的路都是过程的一种实现.

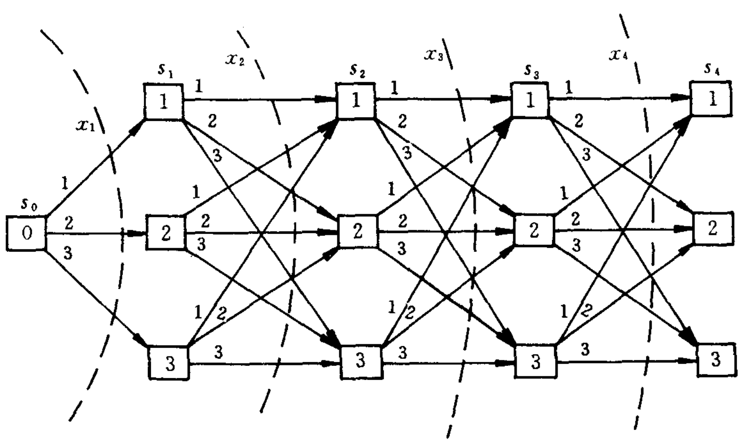

图 1-3

分析问题往往是从终点开始的(在初始状态给定的情况下).在最后一个阶段,决策 x_4 面临的状态是 s_3. 我们考虑:

$$\begin{cases}\text{如果 } s_3=1, x_4 \text{ 的最好选择是什么?}\\ \text{如果 } s_3=2, x_4 \text{ 的最好选择是什么?}\\ \text{如果 } s_3=3, x_4 \text{ 的最好选择是什么?}\end{cases}$$

弄清楚之后,记下答案,推进到前一个阶段. 决策 x_3 面临的状态是 s_2. 着眼于最后两个阶段的效益,同样地考虑:当 $s_2=1,2,3$ 时,x_3 的最好选择分别是什么? 解答后再向前推进. 如此类推,直至面临状态 s_0,求出 x_1 的最好选择(对后面 n 个阶段的效益而言)为止. 然后,沿着刚才确定的每一状态下的最好决策发展下去,便得到过程的最优实现.(基于对称的想法,分析问题的过程有时也可以从第 1 阶段开始,直至第 n 阶段.)

这种逐层推进的方法,对每一阶段有无穷多个状态和无穷多种决策的情形也是适用的,其关键在于建立第 k 阶段与第 $k+1$ 阶段之间的递推关系,即动态规划的基本方程. 我们将在下一章详细讨论这一途径.

第二,深探型:尖兵突破,搜索前进.

我们仍用上述简化模型来说明,但对状态与决策的演变采取图 1-4 的分枝式表示,通常称之为**决策树**. 每一条从树根到树叶的路都表示过程的一种实现.(无论是阵列式表示,还是分枝式表示,其所反映的过程结构是一致的,都可从图 1-1 衍生出来.)

现在分析问题从起点(树根 s_0)开始. 如果我们已经掌握了过程发展的全部信息(比如经过前一途径那样的全线搜寻之后),那末当然就能预见到第一步 x_1 的最好选择是什么. 但是,当前的状态只能提供一部分(甚至是很微小的)信息,所以 x_1 只能根据某种估计采取试探性的决策. 转入状态 s_1 之后,同样根据估计,作出决策 x_2. 如此类推,直至第 n 阶段,得到过程的一个实现. 当然,这不一定是最优的实现. 必要时,我们再撤回到先前某个状态中去,继

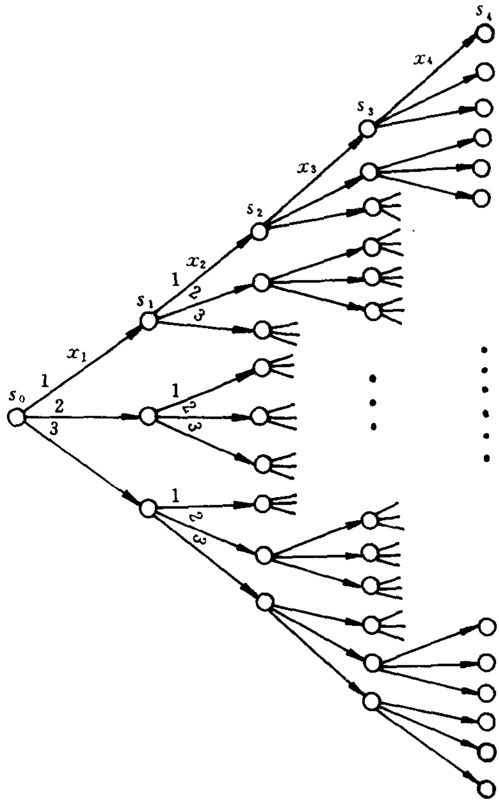

图 1-4

续搜索前进.经过反复的步骤,我们获得的信息越来越多,估计逐渐准确起来,被排除的情况也越来越多,终究要找到最优策略的.这种穿插探索的途径,只要设计得好,效果并不比稳步推进的途径差,其关键在于每一步估计得准确,排除的情况多.我们将在第三章讲述实现此途径的细节.

2.3 黑箱模型的特点

在§1中已经讲过，最优化问题的数值模型或黑箱模型，是处理那种目标函数表达式未知的情况的；寻找最优解只能通过逐步的试探和搜索. 这样的试探和搜索，可以看作一个特殊的多阶段决策过程：每一步的搜索范围就是这个阶段的状态；如何安排试验点就是决策；通过试验及数值计算，获得一定信息，使搜索范围缩小，这就是状态的转移. 而逼近搜索目标（最优解）的程度最高的策略就称为最优策略. 这样一来，一个最优化黑箱模型的求解问题就转化为一个序贯最优化问题了. 而这种黑箱模型在生产建设和科学实验中应用极为广泛，所以有必要详加研究.

为了对问题的性质和特点有一定的了解，让我们从几个熟知的浅显例子谈起.

(1) 猜数游戏. 甲心中记住某个范围内的一个数字，比如不超过10的正整数，让乙去猜. 乙可以提出各种问题，而甲只回答“是”或“否”. 为了判断出（猜中）这个未知数 x，至少提多少个问题才够呢？（不抱侥幸心理，要以十足的把握判断出来.）我们自然会从范围的中点附近问起，比如“那个数 x 大于5吗？”若回答“是”，则 x 的可能范围就缩小为6～10；若回答“否”，则可能范围变为1～5. 接着，第二个问题就是：“$x>8$？”（对前一种情形）或“$x>3$？”（对后一种情形）. 如此只要提四个问题就可以把 x 确定出来了.

与此完全类似的是生产中经常遇到的一个问题：比如有一条输电线路 AB，其中某处出现断路，如何尽快地找出发生故障的地方呢？（参见下图）

图 1-5

首先在中点 C 试一下，若有电，则说明 AC 没问题，可不予考虑（若没电，则 CB 暂不考虑）；然后在 CB 的中点 D 再检查一下，若没电，则 DB 不再考虑了；再在 CD 的中点 E 检查，……，直至找出断头为止.

（2）称珠子游戏. 摆在我们面前的是若干个外观完全一样的滚珠，其中混入一个内有砂眼的废品，它比正常的产品略轻一些，而其余的滚珠均是合格的产品（具有相同的重量）. 现在想要把这个“鱼目混珠”的废品找出来，而手头上只有一台不带砝码的天平，试问如何进行才收效最快？比如现在共有 25 个滚珠，至少在天平上称多少次才能发现废品呢？第一次可在天平两边分别放上 9 个珠子，剩下 7 个. 若天平平衡，则废品必在剩下的 7 个之中；若不平衡，则废品必在较轻一边的 9 个珠子之中. 第二次衡量便在可疑的 9 个（或 7 个）珠子中进行：天平两边各放 3 个珠子，剩下 3 个（或 1 个）. 无论天平平衡与否，可疑范围缩小到 3 个珠子. 最后一次，天平两边各放 1 个，剩下 1 个，衡量结果便能确定出那个较轻的滚珠来. 这样，我们用三次试探就找到了未知的目标.

（3）配方问题. 我们炼某种特种钢，需要加进某种元素（如硅、锰、铬、……）来增加其强度. 太少了不行，太多了也不好，究竟加多少才使钢的强度最高呢？比如我们估计到每吨钢中的加入量在 1000 克～2000 克之间. 如果按照通常的所谓“均分法”来做试验的话，1001 克试一试，1002 克试一试，……要做 1000 次才能找到最佳的加入量. 那末，能不能仿照例（1）的想法，从中点开始做试验呢？但是，在本例中，单从一个试验结果得不到关于最佳点的任何信息，只有两个以上的试验结果相互比较时才显现出优劣来. 因此，不能沿袭猜数游戏中那种对分（平分）的试验方法. 那末是不是可以仿照称珠子游戏中的“三分法”呢？就是说，把试验范围分成三等分，在 1/3 处和 2/3 处做两次试验（如图 1-6(a) 所示），将其试验结果进行比较，如果 1/3 处效果好，则范围（2/3，1）可以舍弃，留下

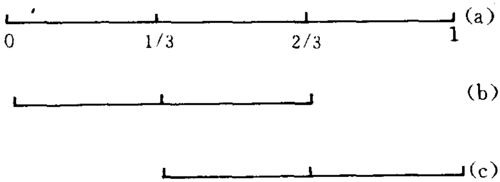

图 1-6

范围(0,2/3)(如图 1-6(b)所示);如果 2/3 处效果好,则舍弃(0,1/3),留下(1/3,1)(如图 1-6(c)所示). 总之,做两次试验后可以使试验范围消去 1/3. 在剩余的部分继续这样做. 当然,这比穷举法要好得多. 但仔细一想,在图(b)或图(c)中,若在区间的 1/3 处和2/3处再安排两次试验,连同上次留下的一个(在 1/2 处),便有三个试验点了,不免有点浪费. 如何最充分地利用每次试验提供的信息,合理地安排试验点,我们将在第五章中讨论.

上以诸例有这样的共同特点:

第一,目的是搜寻某个未知的对象,如对方心中的数 x、与众不同的滚珠或生产中的最优配方.

第二,搜索目标的手段是进行询问、探测或试验. 根据每次搜索所获得的最低限度的信息进行推断,缩小搜索范围,确定下一步的决策.

第三,要求询问、探测和试验的次数尽可能少,获得的信息尽可能多. 这也就是要寻求最优的搜索策略.

综合这些特点,搜索过程就是一个多阶段决策过程;而一个过程实现的优劣标准就是其最终逼近未知目标的程度(或达到一定精度所用的搜索次数).

2.4 关于连续时间过程

在变分学和最优控制问题中,人们往往考虑时间连续变化的过程的最优化. 现以一个制定生产计划的例子来说明. 设某种产品

在时刻 $t=0$ 开始生产，到时刻 $t=T$ 时达到总产量 Q(需求量). 已知在时刻 t 的单位产品生产费用及贮存费用分别为 $a(t)$ 及 $b(t)$. 问应如何安排生产计划，在完成任务的前提下，使总的生产费用及贮存费用为最小. 我们令 $x(t)$ 表示直到时刻 t 为止的总产量(也就是贮存量)，那末在时刻 t 的生产率(单位时间产量)就是 $x'(t)$，于是总的费用为

$$F(x(t)) = \int_0^T [a(t)x'(t) + b(t)x(t)]\mathrm{d}t.$$

这样一来，问题归结为求函数 $x(t)$，在条件 $x(0)=0, x(T)=Q$ 之下，使泛函 $F(x(t))$ 达到最小值. 这种古典变分问题，在一定条件下，可以借助于求解微分方程(所谓 Euler 方程)得到解析解. 但在一般情况下难以办到.

从实用的观点来看，我们应该把时间离散化——划分为时段，然后转化为多阶段决策过程. 现将区间 $[0,T]$ 划分为 n 个时段，并根据已知函数 $a(t)$ 及 $b(t)$ 算出如下数据：

表 1

时段	1	2	…	n
单位产品生产费用	a_1	a_2	…	a_n
单位产品贮存费用	b_1	b_2	…	b_n

设第 i 时段末的库存量为 s_i(状态)，生产量为 x_i(决策)，$i=1,2,\cdots,n$，则状态的转移为

$$s_{i+1}=s_i+x_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n-1).$$

于是，一个生产计划就是这样一个过程实现 $\{s_i\}$ 及 $\{x_i\}$，其中 $s_0=0, s_n=Q$. 而其目标函数就是总费用

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ix_i + b_is_i).$$

这实际上是一个很简单的线性规划问题. 如果运用动态规划的递推算法求解就更简单了(类似于 § 2.1 的资金分配问题).

至于更复杂的连续时间过程最优化问题，只要运用这种离散