研究生应用数学教材系列

微分方程数值方法

WEIFEN FANGCHENG SHUZHI FANGFA

◎ 李瑞遐 何志庆 编著

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

华东理工大学研究生教育基金资助项目

研究生应用数学教材系列

微分方程数值方法

李瑞遐　何志庆　编著

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值方法/李瑞遐　何志庆编著. —上海：华东理工大学出版社，2005.12
(研究生应用数学教材系列)
华东理工大学研究生教育基金资助项目
ISBN 7-5628-1806-1

Ⅰ. 微...　Ⅱ. ① 李...　② 何...　Ⅲ. 微分方程-数值计算-研究生-教材　Ⅳ. O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 126324 号

华东理工大学研究生教育基金资助项目
研究生应用数学教材系列
微分方程数值方法

编　　著/ 李瑞遐　何志庆
责任编辑/ 张　波
封面设计/ 王晓迪
责任校对/ 金慧娟

出版发行/ 华东理工大学出版社
社　　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　　话：(021)64250306(营销部)
传　　真：(021)64252707
网　　址：www.hdlgpress.com
印　　刷/ 上海展强印刷有限公司
开　　本/ 787×960　1/16
印　　张/ 16.5
字　　数/ 313 千字
版　　次/ 2005 年 12 月第 1 版
印　　次/ 2005 年 12 月第 1 次
印　　数/ 1—4050 册
书　　号/ ISBN 7-5628-1806-1/O・156
定　　价/ 25.00 元

内 容 提 要

本书系统地介绍了求微分方程数值解的实用而有效的数值方法. 全书共分八章,内容包括常微分方程初值问题的数值方法,常微分方程边值问题的差分法与打靶法,偏微分方程的差分法,变分原理及其应用,有限元法和边界元法. 作者清楚地阐明了构造这些方法的基本思想,对方法的误差估计、收敛性和稳定性等理论问题尽可能用通俗、简洁的方式表述,使读者易于掌握. 对同一个微分方程定解问题,书中介绍了多种数值方法,并对它们进行比较,以便读者在应用时选择最合适的方法. 书后给出了习题答案.

本书可作为高等学校工科各专业研究生和数学系本科生的教材或教学参考书,又可供从事科学和工程计算的工程技术人员使用.

前言

在现实世界中，有许多实际问题可归结为微分方程的定解问题．通常情况下，人们求不出这些问题的解析解（又称为真解或准确解），从而要求它们的数值解．微分方程数值方法就是求微分方程数值解的方法．

由于微分方程的广泛应用，微分方程数值方法不仅是数学专业学生必须学习的内容，而且也是工科各专业学生以及工程技术人员需要了解和掌握的内容．我们已为华东理工大学工科各专业的研究生讲授这门课程多年，本书就是在讲稿的基础上整理而成的．

全书共分八章，内容包括常微分方程初值问题的数值方法（第一章）；常微分方程边值问题的差分法与打靶法（第二章）；偏微分方程的差分法（第三、四、五章）；变分原理及其应用（第六章）；有限元法（第七章）和边界元法（第八章）．书中所介绍的数值方法都是实用而有效的，既有古典的方法，又有现代发展起来的方法．对每一种方法，我们清楚地阐明了构造它们的基本思想，通过学习，读者可以在此基础上构造出新的数值方法．对同一个微分方程定解问题，我们介绍了多种数值方法，并对它们进行比较，以便读者在应用时选择最合适的方法．书中的数值例子是我们用计算机计算的，它可以增加读者对具体的数值方法的感性认识．由于本书是为工科各专业的研究生编写的，对数值方法的误差估计、收敛性和稳定性等理论问题尽可能用通俗、简洁的方式表述，使读者易于掌握．书后给出了习题答案．

本书除作为工科各专业研究生的教材外，也可作为数学系本科生的教材或教学参考书，又可供从事科学和工程计算的工程技术人员使用．

本书第四和第五章及附录二由何志庆编写，其余部分由李瑞遐编写．冷慧男和袁泉计算了习题四、五的部分答案．本书的出版得到华东理工大学研究生院的资助和华东理工大学出版社的大力支持，特在此向他们表示衷心

的感谢.

由于我们的水平有限,希望读者对本书的不妥和错误之处提出批评指正,以便不断修改完善.

编　者

2005 年 11 月

目录

1

常微分方程初值问题

考虑一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(x,\ u), & x_0<x\leqslant b,\\ u(x_0)=u_0,\end{cases}\tag{1}$$

其中 f 是 x 和 u 的已知函数，u_0 是给定的初值. 记

$$D=\{(x,\ u)\mid x_0\leqslant x\leqslant b,\ |u|<+\infty\},$$

假设函数 f 在区域 D 上连续且关于变量 u 满足 Lipschitz(李普希兹)条件：存在正的常数 L(称为 Lipschitz 常数)，使得对区域 D 上任意两点 $(x,\ u_1)$ 和 $(x,\ u_2)$ 成立

$$|f(x,\ u_1)-f(x,\ u_2)|\leqslant L|u_1-u_2|,\tag{2}$$

则初值问题(1)有唯一解. 但是，只有当 f 是一些特殊类型的函数时，才能求出问题(1)的解析解，一般情况下只能求其近似解或数值解. 所谓数值解，就是求函数 $u(x)$ 在一些离散点 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ \cdots$ 上的近似值 $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m,\ \cdots$. 为了简单起见，假设这些点是等距离分布的，即

$$x_m=x_0+mh,\quad m=1,\ 2,\ \cdots,$$

其中 h 称为**步长**.

本章主要讨论初值问题(1)的数值求解问题，介绍几个典型的数值方法，如 Euler(欧拉)法、梯形法、Runge-Kutta(龙格-库塔)法以及线性多步法中的某些方法. 最后讨论一阶微分方程组和高阶微分方程的数值解法以及微分方程组的刚性问题.

在以后的讨论中，我们总是假设函数 $f(x,\ u)$ 在 D 上连续且关于 u 满足

Lipschitz条件,以至于初值问题(1)有唯一解.

1.1 单步法

1.1.1 Euler 法及其误差

初值问题(1)的解 $u(x)$在 $x-u$ 平面上是一条过点(x_0, u_0)的曲线,并且该曲线在点(x_0, u_0)处的切线的斜率为 $f(x_0, u_0)$. 过点(x_0, u_0)以 $f(x_0, u_0)$为斜率作直线[实际上是曲线 $u=u(x)$在点(x_0, u_0)的切线]

$$u-u_0=f(x_0, u_0)(x-x_0),$$

它和直线 $x=x_1$ 的交点的纵坐标记为 u_1,则

$$u_1=u_0+hf(x_0, u_0).$$

当 h 很小时,u_1 可以作为 $u(x_1)$的近似值. 类似地,过点(x_1, u_1)以 $f(x_1, u_1)$为斜率作一条直线,该直线和直线 $x=x_2$ 的交点的纵坐标记为 u_2(图 1.1),则

$$u_2=u_1+hf(x_1, u_1).$$

如此继续下去,得到递推公式

$$u_{m+1}=u_m+hf(x_m, u_m), \quad m=0, 1, \cdots. \tag{3}$$

由此式计算得到的值 u_m 就作为 $u(x_m)$的近似值($m=1, 2, \cdots$). 这就是 **Euler 法**,也称为 **Euler 折线法**,它是数值求解常微分方程初值问题的最简单的方法. 公式(3)称为 **Euler 公式**.

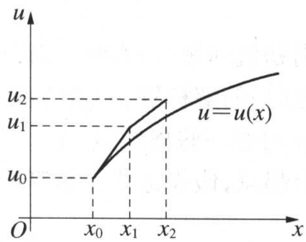

图 1.1

Euler 公式还可以用下面几种不同的方法导出.

(1) 用一阶向前差商代替一阶导数,即

$$\frac{u(x_{m+1})-u(x_m)}{h}\approx u'(x_m),$$

于是从式(1),得

$$u(x_{m+1})\approx u(x_m)+hf(x_m, u(x_m)). \tag{4}$$

记 u_m 是 $u(x_m)$的近似值,从上式就得到公式(3).

(2) 对式(1)中的微分方程两边从 x_m 到 x_{m+1} 积分,得

$$u(x_{m+1})=u(x_m)+\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

对上式中的积分采用左矩形公式也得到式(4),从而得 Euler 公式(3).

(3) 假设函数 $u(x)$具有二阶连续导数,利用 Taylor(泰勒)公式,得

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + hu'(x_m) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_m), \quad \xi_m \in (x_m, x_{m+1}). \tag{6}$$

略去上式中的 h^2项后也得到式(4),并进一步得到公式(3).

在 Euler 公式(3)中,计算 u_{m+1}的值只用到前一步的值 u_m,称这样的方法为**单步法**. 因此 Euler 法是单步法. 单步法的一般形式为

$$u_{m+1} = u_m + h\varphi(x_m, u_m, h), \quad m = 0, 1, \cdots, \tag{7}$$

其中 $\varphi(x, u, h)$称为**增量函数**. 对 Euler 法,增量函数是 $f(x, u)$.

下面分析 Euler 法的误差.

定义 1.1 对于单步法(7),记

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - [u(x_m) + h\varphi(x_m, u(x_m), h)], \tag{8}$$

$$\varepsilon_{m+1} = u(x_{m+1}) - u_{m+1}, \tag{9}$$

则称 R_{m+1}为**局部截断误差**,ε_{m+1}为**整体截断误差**.

从定义可知,局部截断误差是指当 u_m 等于准确值 $u(x_m)$时按公式(7)计算一步得到的值与准确值 $u(x_{m+1})$之差,而整体截断误差是指从初始值出发按公式(7)计算 $m+1$ 步后得到的值 u_{m+1}与准确值 $u(x_{m+1})$之差. 上面这两种误差都没有考虑计算中的舍入误差,即认为每一步计算都是精确的.

定理 1.1 设 $u(x)$具有二阶连续导数,则 Euler 法的局部截断误差为

$$R_{m+1} = \frac{h^2}{2}u''(\xi_m), \quad \xi_m \in (x_m, x_{m+1}).$$

证 利用 Taylor 公式,得

$$\begin{aligned} R_{m+1} &= u(x_{m+1}) - [u(x_m) + hf(x_m, u(x_m))] \\ &= u(x_{m+1}) - u(x_m) - hu'(x_m) = \frac{h^2}{2}u''(\xi_m). \end{aligned}$$

定理 1.2 设单步法(7)的局部截断误差满足

$$|R_m| \leqslant R,$$

且增量函数 $\varphi(x, u, h)$关于 u 满足 Lipschitz 条件,则其整体截断误差满足

$$|\varepsilon_m| \leqslant \frac{e^{L(x_m - x_0)} - 1}{hL}R,$$

其中 L 为 φ 关于 u 的 Lipschitz 常数.

证 根据局部截断误差的定义,得

$$u(x_m)=u(x_{m-1})+h\varphi(x_{m-1},\ u(x_{m-1}),\ h)+R_m.$$

又

$$u_m=u_{m-1}+h\varphi(x_{m-1},\ u_{m-1},\ h).$$

两式相减,得

$$\varepsilon_m=\varepsilon_{m-1}+h[\varphi(x_{m-1},\ u(x_{m-1}),\ h)-\varphi(x_{m-1},\ u_{m-1},\ h)]+R_m,$$

于是

$$|\varepsilon_m|\leqslant(1+hL)|\varepsilon_{m-1}|+R.$$

继续递推下去,有

$$\begin{aligned}|\varepsilon_m|&\leqslant(1+hL)^m|\varepsilon_0|+R\sum_{j=0}^{m-1}(1+hL)^j\\&=(1+hL)^m|\varepsilon_0|+\frac{(1+hL)^m-1}{hL}R.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon_0=u(x_0)-u_0=0$,再利用不等式 $1+x<\mathrm{e}^x(x>0)$ 便得到定理结论.

定理 1.3 设 $u(x)$具有二阶连续导数,则 Euler 法的整体截断误差满足

$$|\varepsilon_m|\leqslant\frac{M_2}{2L}(\mathrm{e}^{L(x_m-x_0)}-1)h,$$

其中 L 为 $f(x,\ u)$关于 u 的 Lipschitz 常数,

$$M_2=\max_{x_0\leqslant x\leqslant b}|u''(x)|.$$

证 从定理 1.1 和定理 1.2 直接得到本定理的结论.

定理 1.4 设 $f(x,\ u)$关于 x、u 均满足 Lipschitz 条件,K、L 为相应的 Lipschitz 常数,则 Euler 法的整体截断误差满足

$$|\varepsilon_m|\leqslant\frac{K+LM_1}{2L}(\mathrm{e}^{L(x_m-x_0)}-1)h,$$

其中

$$M_1=\max_{x_0\leqslant x\leqslant b}|u'(x)|.$$

证 Euler 法的局部截断误差为

$$R_m=u(x_m)-u(x_{m-1})-hf(x_{m-1},\ u(x_{m-1}))$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{x_{m-1}}^{x_m} u'(x)\mathrm{d}x - hf(x_{m-1},\ u(x_{m-1})) \\
&=\int_{x_{m-1}}^{x_m} [f(x,\ u(x)) - f(x_{m-1},\ u(x_{m-1}))]\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
|R_m| &\leqslant \int_{x_{m-1}}^{x_m} |f(x,\ u(x)) - f(x_{m-1},\ u(x_{m-1}))|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{x_{m-1}}^{x_m} |f(x,\ u(x)) - f(x_{m-1},\ u(x))|\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{x_{m-1}}^{x_m} |f(x_{m-1},\ u(x)) - f(x_{m-1},\ u(x_{m-1}))|\mathrm{d}x \\
&\leqslant K\int_{x_{m-1}}^{x_m} |x - x_{m-1}|\mathrm{d}x + L\int_{x_{m-1}}^{x_m} |u(x) - u(x_{m-1})|\mathrm{d}x \\
&= \frac{K}{2}h^2 + L\int_{x_{m-1}}^{x_m} |u'(\xi_{m-1})(x - x_{m-1})|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{K + LM_1}{2}h^2,
\end{aligned}
$$

再从定理 1.2 即可得到定理结论.

定理 1.3 和定理 1.4 都是用来估计 Euler 法的整体截断误差的,其中常数 K、L、M_1、M_2 都不易确定. 虽然定理不能给出 ε_m 的一个定量估计,但它们在理论上具有重要意义. 当 x_m 是$(x_0,\ b]$中一个固定点时,$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_m = 0$,亦即$\lim\limits_{h\to 0}u_m = u(x_m)$. 这说明 Euler 法得到的数值解收敛到初值问题(1)的解(在 1.1.5 节中将严格定义单步法的收敛性).

从定理 1.2 可以看出,只要增量函数 $\varphi(x,\ u,\ h)$关于 u 满足 Lipschitz 条件,单步法的整体截断误差比局部截断误差低一阶. 由于估计整体截断误差比估计局部截断误差复杂得多,因此以后主要讨论方法的局部截断误差.

定义 1.2 如果一个方法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$,则称该方法是 **p 阶方法**.

从定理 1.1 可知,Euler 法是一阶方法.

如果用一阶向后差商代替一阶导数,即

$$
\frac{u(x_{m+1}) - u(x_m)}{h} \approx u'(x_{m+1}),
$$

则从式(1),得

$$u(x_{m+1}) \approx u(x_m) + hf(x_{m+1}, u(x_{m+1})).$$

记 u_m 是 $u(x_m)$ 的近似值,从上式得

$$u_{m+1} = u_m + hf(x_{m+1}, u_{m+1}), \quad m = 0, 1, \cdots. \tag{10}$$

上式称为**向后的 Euler 法**. 它也可以从对式(5)中的积分采用右矩形公式导出.

定理 1.5　设 $u(x)$ 具有二阶连续导数,则向后的 Euler 法的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{h^2}{2}u''(x_m) + O(h^3).$$

证　设 $u_m = u(x_m)$, 按公式(10)计算一步得到的值记为 u_{m+1},则它满足

$$u_{m+1} = u(x_m) + hf(x_{m+1}, u_{m+1}).$$

根据局部截断误差的定义,得

$$\begin{aligned} R_{m+1} &= u(x_{m+1}) - u_{m+1} = u(x_{m+1}) - u(x_m) - hf(x_{m+1}, u_{m+1}) \\ &= u(x_{m+1}) - \left[u(x_{m+1}) - hu'(x_{m+1}) + \frac{h^2}{2}u''(\eta_m)\right] - hf(x_{m+1}, u_{m+1}) \\ &= h[f(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - f(x_{m+1}, u_{m+1})] - \frac{h^2}{2}u''(\eta_m) \\ &= hf_u(x_{m+1}, \zeta_{m+1})(u(x_{m+1}) - u_{m+1}) - \frac{h^2}{2}u''(\eta_m), \end{aligned}$$

其中 $\eta_m \in (x_m, x_{m+1})$, ζ_{m+1} 介于 $u(x_{m+1})$ 与 u_{m+1} 之间. 假设 $|hf_u(x_{m+1}, \zeta_{m+1})| < 1$,利用公式 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots \ (|t| < 1)$ 得

$$\begin{aligned} R_{m+1} &= -\frac{1}{1 - hf_u(x_{m+1}, \zeta_{m+1})}\frac{h^2}{2}u''(\eta_m) \\ &= -\frac{h^2}{2}u''(x_m) + O(h^3). \end{aligned}$$

从定理 1.5 可知向后的 Euler 法是一阶方法.

向后的 Euler 法也是单步法,但是由于公式(10)的右端也包含 u_{m+1},它是关于 u_{m+1} 的函数方程,这种方法称为**隐式**方法. 而 Euler 法的右端不包含 u_{m+1},这种方法称为**显式**方法.

1.1.2　梯形法

对式(5)中的积分采用梯形公式,则

$$u(x_{m+1}) \approx u(x_m) + \frac{h}{2}[f(x_m, u(x_m)) + f(x_{m+1}, u(x_{m+1}))],$$

从而得

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, u_{m+1})], \quad m = 0, 1, \cdots. \tag{11}$$

它称为**梯形法**,是隐式方法.

从数值积分的知识可知,梯形公式比左矩形公式和右矩形公式的精度都高,因此可以相信用梯形法算得的结果比用 Euler 法和向后的 Euler 法都好.另一方面,从形式上看,将公式(3)和公式(10)相加再除以 2 即得公式(11),从定理 1.1 和定理 1.5 可知,Euler 法和向后的 Euler 法的局部截断误差主项分别为 $\frac{h^2}{2}u''(x_m)$ 和 $-\frac{h^2}{2}u''(x_m)$,因此可以期望梯形法的局部截断误差为 $O(h^3)$.事实上,利用定理 1.5 的证明方法可以证明梯形法是二阶方法.

例 1 取步长 $h = 0.2$,分别用 Euler 法、向后的 Euler 法和梯形法解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u + x - 1, \quad 0 < x \leqslant 1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

解 对该问题,$u_0 = 1$, $x_0 = 0$, $x_m = mh$. 对 Euler 法,

$$u_{m+1} = u_m + h(u_m + x_m - 1), \quad m = 0, 1, 2, 3, 4.$$

计算结果如下:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	1.04	1.128	1.273 6	1.488 3

对向后的 Euler 法,

$$u_{m+1} = u_m + h(u_{m+1} + x_{m+1} - 1),$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{u_m + h(x_{m+1} - 1)}{1 - h}, \quad m = 0, 1, 2, 3, 4.$$

计算结果如下: