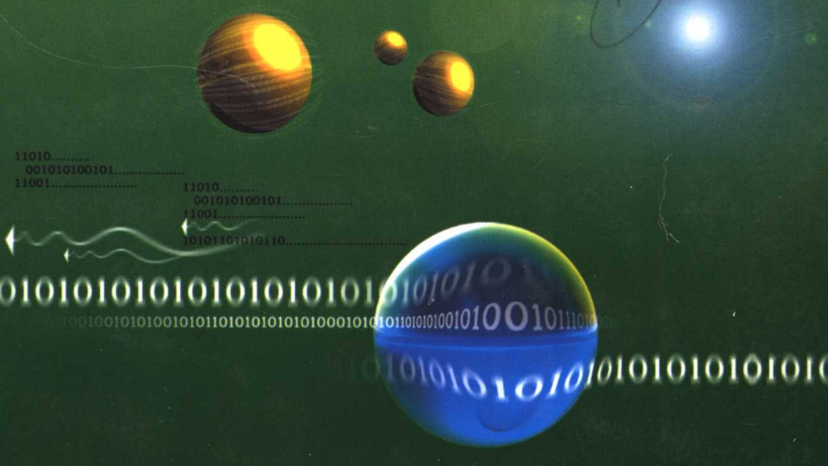
高等学校经典教材配套辅导丛书

# 高等数学

## 学习指导与习题详解

阎恩让　等编著



◆ 难点、考点归纳 ◆ 习题全部详解

◆ 名校期末题、考研题精选精解

陕西师范大学出版社

# 高等数学

## 学习指导与习题详解

主 编 阎恩让 朱科科
崔群劳 冶智英

陕西师范大学出版社

**图书代号:JF5N0862**

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学学习指导与习题详解/阎恩让编. —西安:陕西师范大学出版社,2005.9

(大学教辅)

ISBN 7—5613—3289—0

Ⅰ.高… Ⅱ.阎… Ⅲ.高等数学—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 107616 号

| | |
|---|---|
| **策　　划** | 雷永利　史俊孝 |
| **责任编辑** | 王志伟 |
| **封面设计** | 王静婧 |
| **责任校对** | 曹鹏涛 |
| **出版发行** | 陕西师范大学出版社 |
| **社　　址** | 西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062) |
| **网　　址** | http://www.snuph.com |
| **经　　销** | 新华书店 |
| **印　　刷** | 陕西师范大学印刷厂 |
| **开　　本** | 850×1168　1/32 |
| **印　　张** | 16.625 |
| **字　　数** | 379 千 |
| **版　　次** | 2005 年 10 月第 1 版 |
| **印　　次** | 2005 年 10 月第 1 次 |
| **印　　数** | 4000 |
| **定　　价** | 19.80 元 |

开户行:光大银行西安电子城支行　账号:0303080—00304001602

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)85307864　85233753　85251046(传真)

E—mail:if—centre@snuph.com

## 内容提要

本书是根据高等数学课程教学基本要求编写的．全书共分八章：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程，无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学．每章分节编排，各节由内容提要与基本要求、释疑解惑、范例解析、同步练习四个部分组成，章后配有检测题．书末对一元函数微积分与多元函数微积分，各配备期末测试题两套，并附有全书习题答案与提示．本书可作为高等数学习题课教材，也可作为从事高等数学教学的教师和报考非数学专业硕士研究生的考生及高等数学的各类学习者的参考书．

# 前　言

高等数学是各高等院校的一门重要基础课程，它对培养、提高学生的素质有着重要的作用．因此高等数学也成为招收工学、经济学、管理学硕士研究生必考的课程之一．

由于高等数学是大学入学后的第一门数学课，而且该课程涉及的内容广泛，知识点多且难度大，教学速度也比中学提高很多，所以学生很难学好这门课．尤其当初学者面对众多题目类型及有一定难度的考试压力时，更加感到困惑和艰难．多年来我们在教学中发现有不少学生，即使学完了高等数学，还常常把一些概念、理论、方法独立对待，缺乏对有关概念、理论、方法间内在联系的探讨和综合运用．针对上述问题，我们编写了这本《高等数学学习指导与习题详解》．主要目的是对正在学习该课程的读者，配合课堂讲授提供进一步的学习指导，帮助读者克服在学习过程中遇到的各种疑难，从而达到在比较系统地理解数学基本概念和基本理论，掌握数学的基本方法的基础上，更加有效地领会数学思想，熟练数学技巧，

提高抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

本书的特点是通过对高等数学中各种基本概念产生的背景分析,对各部分内容和方法的综合总结,使读者首先对各部分内容有总体上的理解和把握.然后针对学习中易产生的错误、疑难问题进行举例分析、详细解答、归类小结等帮助读者正确理解基本概念和基本理论,从而达到拓展解题思路,总结提高解题方法和技巧.

本书分块按章编排,各章相对独立.全书共分八章:函数极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学.每章按节编排,各节由四个部分组成.第一部分"内容提要与基本要求",介绍本节的重点概念、主要理论和基本方法,并附以直观图表,重点突出;第二部分"释疑解惑",针对学生学习中而产生的问题、难懂易错的概念,采取提出问题的方法进行解析或举反例给予解答;第三部分"范例解析",主要根据作者多年来教学积累,精选在教学及课程辅导中反复使用过的及收集各种参考资料得到的具有代表性的典型例题,进行分析、详解、评述,旨在帮助读者理解解题思路、总结解题方法、巩固所学知识,提高综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力;第四部分"同步练习",精选和设计了部分练习题,主要为读者在学过例题之后,能够亲手练习,巩固学习效果.

各章后配有检测题一套,全书对一元函数微积分和多元函数微积分两部分各配期末测试题两套.书末附有习题答案与提示,可供读者自测学习效果.

本书第一、六章由崔群劳编写,第二、四章由阎恩让编写.第三、七章由冶智英编写,第五、八章由朱科科编写,本书的试题由阎恩让提供,全书由阎恩让主持,并负责最后审校和定稿.

本书作为我们对《高等数学》课程重点建设的成果,其初稿已

在近三年的教学实践中使用过，对全面提高教学质量起到了积极促进作用，效果明显，也得到了广大教师的认可．雷永利为本书的出版进行了组织与策划，陕西师范大学出版社给予了大力支持，作者在此致以诚挚的感谢．由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

2005 年 9 月

# 目 录

# 第一章 函数、极限与连续

高等数学是研究函数的数学,内容包括一元函数微积分、空间解析几何初步、多元函数微积分、无穷级数与常微分方程.

其实,数学的“初等”与“高等”之分是完全依照惯例形成的,不可能给出一个确定性的准则,以便依照它来判定某些数学事实或定理当属于“初等数学”还是“高等数学”,更何况现在的初等数学中也越来越多的包括了触及高等数学思想的问题. 但是,我们可以指出习惯上称为“初等数学”与“高等数学”的两个不同的特征. 初等数学研究事物的静止状态,以常量为研究对象;高等数学则研究事物的运动状态,以变量为研究对象. 由于研究对象的不同,它们在研究方法上也有很大的区别. 初等数学用静止的、孤立的观点研究问题;高等数学则用运动的、辩证的观点研究问题,极限方法就是这种研究方法的具体体现,它是高等数学的基本分析方法.

函数概念是数学中最重要的概念,函数是微积分的主要研究对象,它反映了物质世界中各种变量之间的联系与相互依从关系,它所具有的这样或那样的性质正是物质世界中规律性的反映. 在现实世界中,一切事物都发生变化、并遵循量变到质变的规律. 要表示量的变化、量与量之间关系的变化,要用到极限的概念. 极限是高等数学中最基本的概念之一,用以描述变量在一定的变化过程中的终极状态. 高等数学中几乎所有其他概念,诸如连续、导数、定积分、级数收敛、偏导数、重积分、曲线积分与曲面积分等都直接通过极限得以严密化. 没有极限概念就没有高等数学的严密结构. 极限是沟通常量与变量、有限与无限的桥梁,它是自始至终

贯穿于高等数学之中的最重要的推理工具．理解极限概念，掌握极限运算方法，对于学好高等数学起着极其关键的作用．连续性是函数概念与极限概念的一个自然结合，是函数的一个重要属性．连续性是用极限来定义的，因此连续函数具有许多与极限相似且可以由极限性质直接推出的性质．连续函数是高等数学主要研究的对象．

函数、极限、连续是高等数学理论的基础，必须牢固掌握．

## §1.1 函数

### 一、内容提要与基本要求

**内容提要**

函数概念是事物运动过程中变量之间的依从关系在数学中的反映，它的核心内容是函数的定义域和对应规律（由此可以求得函数的值域），称它们为函数的两要素．掌握函数的两要素是学习函数概念的基本要求．对于函数的定义域，主要是会求用解析式表示的函数的定义域，一般是根据解析式所含的运算进行综合求解．在求函数的定义域的同时，也要注意函数的无定义点，因为函数的某些特性，如间断点、无界性往往在这些点处表现出来．而对于函数的对应规律，特别是对其符号“$f$”要有正确的理解并能熟练运用．

函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性这四种简单性态在几何上都有实际背景，它们分别表示图形的上升或下降，图形所在范围的有限与无限，图形关于纵轴或原点的对称，图形按周期重复出现等．搞清这些性质对认识函数很有帮助，特别是单调性与有界性在探讨极限存在性时有重要应用．在讨论奇偶性时一定要注意函数要在以原点对称的区域内有定义．在讨论周期性时，一定要注意$f(x \pm T)=f(x)$必须对属于定义域的一切$x$都成立．

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)$，从方程的角度来看，它们是变量 $x$ 与 $y$ 之间的同一个方程．例如，$x$ 与 $y$ 分别表示一正方形的边长与面积，那未 $y=x^2\ (x\geqslant 0)$，$x=\sqrt{y}\ (y\geqslant 0)$ 这两个式子表示了边长与面积之间的同一个关系．由于两者的自变量是不同的，从而对应法则也不同，前者的对应法则是把自变量的值平方即得因变量的值；后者的对应法则是把自变量的值开方即得因变量的值，所以对应法则是互逆的．因此，一个函数的反函数是就它的对应法则来说的．

相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数．

在研究函数时，往往习惯于将 $x$ 作为自变量，将 $y$ 作为因变量．因此习惯上总把 $x=\varphi(y)$ 的 $y$ 换成 $x$，$x$ 换为 $y$，从而得到 $y=\varphi(x)$．通常情况下，$y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$．

复合函数的主要作用在于把一个比较复杂的函数，适当地引入中间变量后，分解成若干个比较简单的函数，是我们学习的难点．注意在复合与分解时函数的定义域．

不同类型的函数具有不同的特性．依据不同的标准，函数有多种分类方法．例如以函数的结构为标准可以分为初等函数与非初等函数等．高等数学的主要内容，如极限运算、函数连续性讨论、微分法、积分法等都可以按初等函数与非初等函数的类型进行归纳与总结．所以主要应掌握初等与非初等两种类型．

本节主要知识结构如下页图表所示．

**基本要求**

1. 正确理解函数的定义；要弄清楚定义中的两个要素；要充分认识函数记号 $y=f(x)$ 中“$f$”的涵义的广泛性；要能区分 $f(x)$ 与 $f(x_0)$，其中 $x_0$ 为常数；会求函数值．

2. 要弄清楚函数定义域（定义区间）的概念；会求一般函数的定义域，为此，必须牢记基本初等函数的定义域．

3. 要弄清楚反函数的概念和它与直接函数在表示上与几何图形上的关系．特别要记住反三角函数与反双曲余弦的主值范围．

4. 复合函数是一个难点，要弄清楚它的概念，并能将几个相关的函数正确地复合成一个函数，更为重要的是能把一个复合函数分解成几个简单或基本初等函数．

5. 能确定一些比较简单函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性(如果函数存在这些性质的话)．

6. 除了牢记基本初等函数的定义域外，还要熟悉它们的图形与简单性态．

7. 会建立简单应用问题的函数关系．

- 函数
  - 函数的定义
    - 定义域 $D$
    - 对应法则 $f$
  - 函数的表示法
    - 表格法
    - 图象法
    - 解析法
      - 显式表示
      - 隐式表示
      - 参量方程形式表示
      - 分段形式表示
  - 函数的性质
    - 有界性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
  - 函数的类型
    - 初等函数
      - 基本初等函数
      - 反函数
      - 复合函数
    - 非初等函数

## 二、释疑解惑

**1. 在函数的定义中，"对应规则"的特点及 $y$ 的取值特点，有没有限制？**

函数的定义中指出变量 $x$ 在允许范围内的每一个值，变量 $y$

依某种确定规则有值与之对应．至于说“对应规则”的特点及 $y$ 的取值特点，并没有什么限制，因此，可能出现下列情况：

(1)当自变量 $x$ 的值变动时，变量 $y$ 的值并不一定随 $x$ 的变化而变化，即 $y$ 有可能取同一个值．如 $y=2$，虽然表示式中设有出现 $x$，但是这个表示式可以解释为不论 $x$ 取什么值，$y$ 所对应的值总是2. 因此，$y=2$ 表示一个函数．事实上，对任何常数 $c$ 来说，$y=c$ 也表示一个函数；

(2)在函数的解析法表示中也没有限定对应关系必须用 $y=f(x)$ 的显式表示，它们的依赖关系可能是由某个方程 $F(x,y)=0$ 表示，其中，$F$ 是变量 $x$ 与 $y$ 的一个已知表达式，此时称 $y$ 为 $x$ 的隐函数．例如表示式 $x^2+y^2-2xy+y=1$ 表示了 $y$ 作为 $x$ 的隐函数；

(3)在函数的对应关系中也没有限定这个依赖关系必须是 $x$ 与 $y$ 的直接关系．如果 $x$ 与 $y$ 通过第三个变量联系起来，如 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 也完全允许．此时称之为参数方程表示的函数，如表示式 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t^2+5 \end{cases}$ 可看作由参数方程确定的函数；

(4)在函数的解析法表示中并没有限定一个函数只能用一个解析式来表示，因此，完全可能出现用两个或有限多个解析式才能表达一个函数的情形，此时称之为分段函数，一般形式为

$$y=f(x)=\begin{cases} \varphi(x), & a\leqslant x<c, \\ \psi(x), & c\leqslant x\leqslant b. \end{cases}$$

常见的分段函数：

1°　符号函数　$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

2°　取整函数　$y=[x]=\max\{n \mid n\leqslant x, n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$.

3° 狄里克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$

**2.** $y=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ **与** $u=\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ **是同一个函数吗？为什么？**

函数的本质特征是定义域与对应规则，两个函数相等当且仅当定义域和对应规则都相同．函数 $y=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ 的定义域为 $\begin{cases}x\neq0\\ x<1\end{cases}$，当 $x\neq0$ 时，$y=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$；函数 $u=\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ 的定义域为 $\begin{cases}t\neq0\\ t<1\end{cases}$，易见，$y$ 与 $u$ 的表达式与定义域皆相同，因此 $y$ 与 $u$ 表示同一个函数．而 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$ 则是不同函数，因为它们的对应法则不同．

**3. 周期函数一定有周期吗？为什么？**

我们先了解一下周期函数的定义：设 $f(x)$ 在区间 $X$ 上有定义，若存在一个与 $x$ 无关的数 $T$，$\forall x\in X$，

$$f(x\pm T)=f(x)$$

则称 $f$ 是以 $T$ 为周期的周期函数，而把满足上式的最小正数 $T$ 称作 $f$ 的最小正周期，简称为 $f(x)$ 的周期．因此，并非每个周期函数都有周期．例如，$y=2$ 对于任何实数 $T>0$ 有 $f(x\pm T)=f(x)=2$，因此它是一个周期函数，但正实数中无最小数，所以此函数无周期．

**4. 函数 $f(x)=\sin^2x$ 是否为周期函数？若是，求其周期．**

设 $f(x)=\sin^2x$ 的周期为 $T$，由 $\sin^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2}$ 得

$$\frac{1-\cos2(x+T)}{2}=\frac{1-\cos2x}{2},$$

即 $\cos2(x+T)=\cos2x$，由于 $\cos x$ 的周期为 $2\pi$，从而有 $2T=2\pi$，

$\therefore \quad T=\pi.$

一般地,若$f(x)$的周期为$T$,则$f(ax+b)$的周期为$\frac{T}{|a|}$.

若$f(x)$与$g(x)$分别以$T_1$与$T_2$为周期,则$f(x)\pm g(x)$是以$T_1$与$T_2$的最小公倍数为周期.

**5. 是否任何两个函数都可以构成复合函数?**

设$y=f(u)$的定义域为$U$,值域$Y=f(U)=\{y \mid y=f(u),u\in U\}$.

$u=\varphi(x)$的定义域为$X$,值域$U_1=\varphi(X)=\{u \mid u=\varphi(x),x\in X\}$.

若$U_1\cap U\neq\varnothing$,记

$$D=\{x \mid \varphi(x)\in U,x\in X\},$$

则对$\forall x\in D$,通过$\varphi$有确定的$u$与之对应,而对此确定的$u$,通过$f$有确定的$y$与之对应,则称$y$为$x$的复合函数,记作$y=f(\varphi(x))$.

$x$为自变量,$u$为中间变量,$y$为因变量.

复合函数$f(\varphi(x))$中,称$\varphi$为内函数,$f$为外函数.

由此可知,只有当内函数的值域与外函数的定义域的交集非空时,才可构成复合函数.

例如,$y=f(x)=\arcsin x, \qquad y=\varphi(x)=x^2+2.$

函数$f(x)$的定义域为$[-1,1]$,值域$f([-1,1])=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

函数$\varphi(x)$的定义域为$(-\infty,\infty)$,值域$\varphi(-\infty,\infty)=[2,+\infty)$.

由于$[2,+\infty)\cap[-1,1]=\varnothing$,因而以$\varphi$为内函数,$f$为外函数不能构成复合函数.

而$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\subset(-\infty,\infty)$,因而以$f$为内函数,$\varphi$为外函数可

以构成复合函数 $y=\varphi(f(x))=2+(\arcsin x)^2$，其中 $x\in[-1,1]$.

**6. 什么是初等函数？初等函数有何特征？**

由基本初等函数与常函数经过有限次的四则运算或有限次的复合并能用一个解析式表示的函数称作初等函数.

由此定义可知，初等函数有两个基本特征：(1)表示式中所包含的运算为有限个；(2)只可由一个解析式给出.

例如，分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0,\\ e^x, & x<0.\end{cases}$$

它是由两个解析式所给出，因而分段函数不是初等函数.

又如：$f(n)=n!$，$n$ 为自然数，由于随自变量 $n$ 的无限变大，函数解析式所含的乘积次数无限变大，因而 $f(n)$ 同样也不是初等函数.

**7. 已知 $f(g(x))$ 的表达式，如何求 $f(x)$ 的表达式？**

这类问题涉及到函数表示法的"无关特性"，即函数的表示法只与定义域和对应法则有关，而与用什么字母表示无关. 求解的方法有两种途径：

(1)令 $u=g(x)$，从中反解出 $x=\varphi(u)$，求出 $f(u)$ 的表达式，再将 $u$ 换成 $x$，即得 $f(x)$ 的表达式；

(2)将 $f(g(x))$ 的表达式凑成 $g(x)$ 的函数关系式，然后将所有 $g(x)$ 的位置换成 $x$，则得 $f(x)$.

**8. 单调函数一定存在反函数，不单调函数是否不存在反函数？**

一个函数的反函数是就它的对应法则来说的，$f(x)$ 是否有反函数，取决于对其值域内任一 $y$，通过法则 $f$，能否唯一确定一个 $x$ 值与之对应，这一点反映在几何特性上，就是：如果 $y=f(x)$ 的图象与任一平行于 $x$ 轴的直线至多只有一个交点，则函数 $y=f(x)$ 有反函数. 而单调函数就具有这种特性. 因而单调性是函数存在