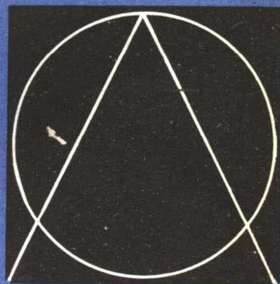
杨嘉荫　等编

中学生优秀数学命题选集



ZHONGXUE SHENGYOUXIU SHUXUEMINGTIXUANJI

辽宁科学技术出版社

中学生优秀数学命题选集

杨嘉荫　等编

辽宁科学技术出版社
1983年·沈阳

中学生优秀数学命题选集

杨嘉荫 等编

辽宁科学技术出版社出版 （沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行 沈阳市第一印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：$5\frac{1}{8}$ 字数：103,000
1983年7月第1版 1983年7月第1次印刷

责任编辑：陈慈良 插 图：徐荫复 夏兰兰
封面设计：陈良菲 责任校对：李秀芝

印数：1—373,000
统一书号：7288·21 定价：0.37元

要加强基本功的训练（代序）

苏步青

《青年科学》杂志社发起征集数学优秀命题活动，力图使广大学生从“题海战术”中解放出来，其用意是好的。现在，征集工作已告一段落，现由辽宁科学技术出版社编成《中学生优秀数学命题选集》一书，相信本书的出版对引导学生巩固基础知识，提高学生活用的能力，将会是有益的。

在过去一段时间内，各地编辑出版的数学习题集很多，而且越编越厚，越编越难，许多中学生望“题”兴叹，有苦难言。这次《青年科学》杂志社在征题内容和评选原则上作了规定：以中学数学教学大纲为标准，以现行十年制中学数学教材为内容。全国各地应征的命题有两万多道，编者又从中挑选了一百七十道，体现了少而精的原则。这样一本命题选集，避免出偏题、难题，适应于高中学生的现有水平，从这一点上讲，这次征题活动是成功的，也是有意义的。

学数学，我一向提倡学生多演算一些习题，通过自己独立思考，在演算过程中弄清基本概念和定义，这是一项非常重要的基本功。基础打好了，对各类习题的解答就能熟练运

算，减少错误。但是多演算习题，也要有个限度，不是习题演算越多就越好，而要在演算习题中重视基本功的训练。现在有些中学生，一天到晚找题目演算，似乎是越难越好，钻牛角尖，耗费大量的时间，而基本的概念、定义、定理却掌握得不熟练，这就不能达到演算习题的目的。所以，在多演算习题时，我还是要提醒同学们注意少而精。基本功打好了，对一道习题就能运用学过的定理，采取多种方法去解题，这也可以说是解题的秘诀。

加强基本功的训练，是要花大气力的，俗话说，一分耕耘一分收获，要把基础知识扎扎实实地学到手，就要舍得下功夫。在这次征集命题中，编者注意要求解法简捷，或者一题多解。从会解到解得快、解得简单，这又是一个飞跃；要能做到一题多解，这对中学生来说就是较高的要求了。我们在学习过程中，一定要用高标准严格要求自己，养成老老实实的学习风气，练好基本功，将来才能在学习上有所创造，有所前进。

今天，同学们的学习条件要比我在中学时代不知好多少倍。我们一定要珍惜良好的学习环境，克服各种困难，努力学习，把自己培养成为德、智、体全面发展的人，时刻准备为四化贡献力量。

目　　录

一 代数部分

1. 证明：$Z+\dfrac{1}{Z}$为实数的充分必要条件是 Im（Z）$=0$或$|Z|=1$.（Im为虚部）

2. 证明：若$f(x)=x^2+x$，则不存在自然数m和n，使得$4f(m)=f(n)$.

3. 若$a\pm bi(b\neq0)$是方程$x^3+qx+r=0$的复根，其中a、b、q和r是实数，那么q用a及b表示的式子是：$(A)a^2+b^2$；$(B)2a^2-b^2$；$(C)b^2-a^2$；$(D)b^2-2a^2$；$(E)b^2-3a^2$.

4. 求复数Z，使得$Z+\dfrac{4}{Z}$为实数，且$|Z-2|=2$.

5. P、Q两点对应的复数分别为Z和$2Z-3-4i$. 若P在以原点为中心、r为半径的圆上移动，求点Q的轨迹和方程.

6. 已知：全集$I=\{$实数对$(x,y)\}$，$A=\{(x,y)$：$\dfrac{y-3}{x-1}=1\}$，$B=\{(x,y)$：$y=x+2\}$，求：$\overline{A}\cap B$.

7. 一个正整数M的常用对数是$A+\lg B$（A、B是相邻两自然数），且满足条件$A^2-B^3=1$，①求M的值；②在自然数集中，求小于M的9的倍数的个数；③在自然数集合

中，问最多能有几个各不相同的36的倍数，其和等于1980.

8. 已知：A、B是一个直角三角形的两个锐角，且 $\sin A$和$\sin B$是方程$4x^2+Kx+\sqrt{3}=0$的两个根，求A、B和K的值.

9. 在$\triangle ABC$中，b、c为方程$\lg(x^2+4)=\lg x+\lg\sin 135^\circ+\lg 12$的二根，$\angle A$等于$\angle B$与$\angle C$之和的一半，求$a$边.

10. 解方程：$\log_{\sin x}2\cdot\log_{\sin^2 x}3=1$

11. 设方程组$\begin{cases} mx+y+1=0, \\ 3mx-my-2m-3=0. \end{cases}$有无穷多解，试求 m 的值，并用含一个参数 t 的形式表示这无穷多解（用行列式讨论）.

12. 在直角梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle BCD=90^\circ$，$BC=a$，$CD=b$，$DA=c$，以斜腰AB为直径，作$\odot O$交CD于E、F，交BC于R，设$\angle EBC=\alpha$，$\angle FBC=\beta$.
求证：$\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{tg}\beta$是方程$ax^2-bx+c=0$的根.

13. 解方程组：
$$\begin{cases} x!+y!=r!, & (1) \\ x+y=r. & (2) \end{cases}$$

14. 解方程：
$$\begin{vmatrix} \lg(1000x^2) & 2 & 1 \\ \lg x & \lg\frac{x}{100} & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

15. 某队伍长L米，在匀速前进中，排尾一队员因事赶赴排头，到达排头后立即返回，当他回到排尾时，全队正好前进了L米，若这队员来回速度不变，求这个队员所行路

程的长.

16. 设 $f(x)=ax^2+bx$，且$1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求$f(-2)$的范围.

17. 设函数$f(x)$满足$af(x)+f(\frac{1}{x})=ax$，求$f(x)$.

18. 如图. 抛物线 $y=ax^2+2bx+c$和 $y=(a+1)x^2+2(b+2)x+(c+3)$ 中的一条通过A、B、C三点，另一条通过B、C、D三点：

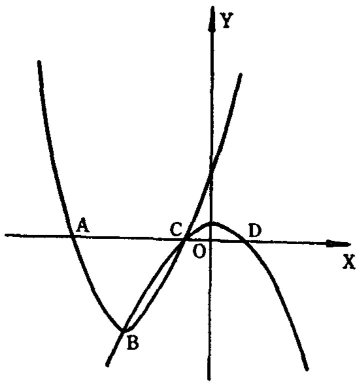


图 一

① 问哪一个函数解析式所表达的图象经过A、B、C三点？ ② 求点B、C的横坐标； ③ 若$|AB|=|BC|$，$|CO|=|OD|$，求a、b、c的值.

19. 设二次函数的图象的最低点$A(-1,-2)$，并与x轴交于B、C两点（B在C之右），若$\triangle ABC$的面积等于4，试求：

① B、C两点的坐标；

② 函数的解析式.

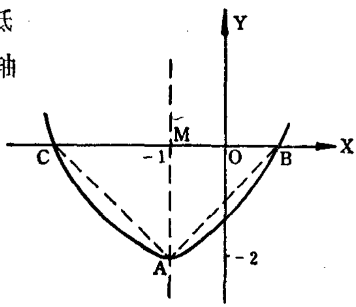


图 二

20. 求证：$\sqrt{1982}<\sqrt[1982]{1982!}$.

21. 无穷等比数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$前多少项和与1差的绝对值开始小于$10^{-6}$？（$\lg 2=0.3010$）.

22. 若函数$f(x)$的定义域为$(0,1]$，则$f\left(\lg\frac{x^2+x}{2}\right)$的定义域如何？

23. 设$a_i>0$，$f(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$；若$0<x_1<x_2$，求证：$f(x_1)>f(x_2)$.

24. 三角形三边长为a、b、c，s为三角形周长之半，求证：

① $(s-a)(s-b)(s-c)\leqslant\frac{abc}{8}$；

② $\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geqslant\frac{9}{s}$.

25. 用数学归纳法证明：

$$n^n>1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1).\quad(n\geqslant2)$$

26. 从7名运动员中选出4人参加100米×4接力，求满足下述条件的安排方法的种数：

① 甲、乙二人都不跑中间两棒；

② 甲、乙二人不都跑中间两棒.

27. 从a、b、c、d、e、f六个元素里选取四个作排列，求满足下述条件的排列各有多少种：

① a总排在b的前面；

② a、b不同时出现.

28. 有多少个数同时满足下列条件：

① 它们都是奇数；② 它们的常用对数的首数是 3；

③ 十位数字是 7 且各个数字都不相同.

29. 一个数列的组成规律是$u_0=2$，$u_1=3$，对于自然数$K\geqslant 1$有$u_{k+1}=3u_k-2u_{k-1}$，求证：$u_n=2^n+1$.

30. 求证：对于整数$n\geqslant 0$，$a^{n+2}+(a+1)^{2n+1}$能被a^2+a+1整除.

31. 设$x_i>-1$，x_i同号$(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$，则$(1+x_1)(1+x_2)\cdots\cdots(1+x_n)>1+x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$.（$n\geqslant 2$）

32. 2^{90}天后的第一天（以星期天为标准）是星期几？

33. 如果二项式（$1+x$）^{m}的展开式中，任何相邻两项的系数的比为 7 ∶15，求指数m的最小值.

34. 在$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$展开式里，已知前三项的系数成等差数列，求展开式里所有的有理项.

35. 二项式$(a+b)^{23}$中有连续三项的系数组成等差数列，求这三项的项数.

36. 设二项式$\left[\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right]^m$的展开式中第二、第三项和第四项的系数对应的是一个$A\cdot P$数列（等差）的第一、第三、第五项，又知二项式展开式的第六项为21，求x的值.

37. 求$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+(n+1)n$之和.

38. 求$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2^n}$.

39. 有一等差数列，第 2 项与第 5 项之和为$m+17$，第3 项与第 6 项之和为$n-2$.其中m为$y=3\sin^2x-\sin x+1$的极大值；n为方程 $\log_4 n=2.5$ 的解，求此数列前 100 项的

和.

40. 有四个数，前三个数成等比数列，后三个数成等差数列，又前三个数的乘积为64，最后一个数是方程 $x^2-11x-12=0$的正根，试求这四个数.

41. 设数列$\{a_n\}$的前n项之和S_n可表示成$S_n=1+r\cdot a_n$ $(r\neq 1)$，求适合$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$的$r$的范围.

42. 已知等差级数的公差满足方程：

$\sqrt{8^{3a^2-7a+0\cdot 4}} = \sqrt[5]{4^{39}}$，级数首项满足方程：$\lg 3+\lg(y-1)=\lg 2+\frac{1}{2}\lg(7y+1)$，且各项的和较二项式$(\sqrt[5]{x^8}+x\ ^{-}\sqrt[3]{x^{-1}})^P$的指数$P$小42，此二项式展开式的第七项含$x$的九次幂. 求此级数的项数.

43. 等比数列前n项和为S，积为P，其倒数和为T，试证明$P^2=\left(\frac{S}{T}\right)^n$. （其中公比不等于1）

44. 在任意三角形ABC中，三内角A、B、C成等差数列，其公差为θ，又$\csc 2A$、$\csc 2B$、$\csc 2C$也成等差数列，试求下列无穷数列的和：

$\cos^2\theta+\cos^2\theta\log_{0.6}\mathrm{tg}\theta+\cdots\cdots+\cos^2\theta\log_{0.6}n-1\,\mathrm{tg}\theta+\cdots$.

45. 求极限：① 求$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$；

② 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$；③ 求$\lim\limits_{A\to B}\frac{\sin A-\sin B}{\mathrm{tg}A-\mathrm{tg}B}$的值.

46. 求极限：

① $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x\right)$;

② $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$.

47. 设P_1是长为a的一条线段AB的中点，BP_1的中点是P_2，P_1P_2的中点是P_3，顺次进行下去，$P_{n-2}P_{n-1}$的中点是P_n，求AP_n的长，若无限地进行下去，P_n的极限位置如何？

48. 已知：抛物线$y^2=2x$（如图），L_1为其切线，L_2为该点的法线，$|OA|:|OB|=R$ 〔$0<R$，R为参数〕．B点的横坐标记为t，$|BC|=f(R)$，若$y_0\in〔0,\infty)$，求：①$f(R)$的表达式；

② $\lim\limits_{t\to\infty}R$.

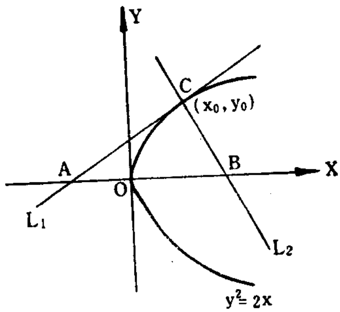


图 三

二 几何部分

49．已知：锐角$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$交BC于D，$AD=BC$，H为$\triangle ABC$的垂心，P为线段BC之中点.

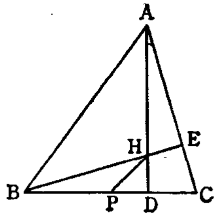


图 四

求证：$PH+HD=\frac{1}{2}BC$.

50．设圆心为O，半径为a，圆心角为$\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$的扇形为$ABO$，过$A$点作半径$OB$的垂线$AB_1$，过$B_1$与弦$AB$平行的直线与半径$OA$的交点为$A_1$，过$A_1$作$OB$的垂线$A_1B_2$，过$B_2$与$AB$平行的直线与$OA$的交点为$A_2$，这样无限重复下去，得出$OA$、$OB$上两个点列$\{A_n\}\{B_n\}$，设$\triangle ABB_1$、

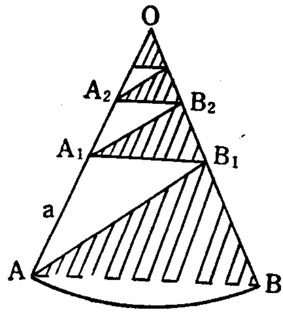


图 五

$\triangle A_1B_1B_2$、……、$\triangle A_nB_nB_{n+1}$……的面积分别为S_1、S_2、……、S_{n+1}、……这时：①求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n$的和$S$.

②设扇形OAB的面积为T，求极限$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{S}{T}$的值.

51. 由圆的直径AB上的一点C作直径的垂线CD，和圆相交于D，又以AC、CB为对角线作两个正方形，在直径同侧的两个顶点为E、F，试比较EF、CD的大小.

52. 已知二面角$M—AB—N$是直二面角（如图），P为棱AB上的一点，PX、PY分别在面M、N内，$\angle XPB=\angle YPB=45°$. 求：$\angle XPY$的大小.

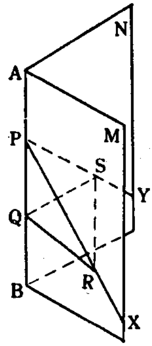


图 六

53. 在复数平面内，P、Q两点分别与$-2+i$和$1+i$相对应，将此平面沿着虚轴折成120°的二面角. 求：①OP、OQ之间的夹角；②若OP、OQ代表两个力，求它们合力的大小.

54. ABC和BCD是一副三角板，三角形ABC是等腰三角形，其中$\angle A=90°$；三角形BCD中，$\angle C=90°$，$\angle D=60°$，它们的公共边$BC=a$，当两块三角板以BC为棱构成的二面角是$\alpha(0°<\alpha<90°)$时，求：①A、D两点间的距离；②当α为何值时，A点在平面BCD内的射影在三角形BCD内部；在BD边上；在三角形BCD外部？

55. 设以一平面截直三面角$S—ABC$，得出三角形ABC，则：

① 三角形ABC的垂心H是顶点S在截面上的射影；

② 三角形ASB的面积是三角形ACB和三角形AHB面积的比例中项；

③ 三角形ABC面积的平方等于三角形 ASB、三角形BSC、三角形CSA面积的平方和；

④ 若已知三角形ABC，如何作出以 AB、BC、CA为棱的二面角的平面角.

56. $O—ABC$是直角三面角（即三条棱中每两条都互相垂直），且$OA=a$，$OB=b$，$OC=c$. 求：①从O到AB的距离；②$\triangle ABC$的面积；③若固定C点，并使$\triangle OAB$的面积保持为定值，$\triangle ABC$什么时候面积最小？

57. 已知一个四面体，它的四个面都是各边长为a、b、c所组成的四个全等三角形，求此四面体的体积.

58. 若 M、N 分别为单位立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面A_1C_1及B_1C的中心，求直线段DM与AN的距离.

59. 自四面体$ABCD$的顶点D作平面ABC的垂线，垂足是三角形ABC的垂心.其中，$DB=b$，$DC=c$，$\angle BDC=90°$. 求三角形ADB与三角形ADC面积之比.

60. 求证：正四面体每相对的两条棱的中点连接线是两条棱间的最短距离，并且各等于以棱为边长的正方形对角线长的一半.

61. 正四棱锥$S-ABCD$的底面边长为a cm，侧棱长为b cm.

① 求这棱锥的体积；

② 求这棱锥的侧面积；

③ 画出过AC且平行于SB的截面，并求这截面的周长及面积.

62. 已知正四棱锥的侧面与底面所夹的二面角为α，相邻两个侧面所夹的二面角为β. 求证：$\cos\beta=-\cos^2\alpha$.

63. 已知三棱锥$P-ABC$的各侧面与底面所成的二面角都是θ. 过底面三角形ABC的内心O，作$EF//BC$交AB、AC于E、F.

求证：$S_{\triangle EPF}=\sin\theta(S_{\triangle PBE}+S_{\triangle POF})$.

64. 若正棱锥的侧面等腰三角形的底角与底面正多边形的一个内角互补. ①求证：这个正棱锥的底面边数是5；②求这个正棱锥的侧面和底面所夹的二面角.

65. 圆锥被平行于底面的平面截得的两部分的体积相等，表面积也相等，求此圆锥的母线与底面所成的角.

66. 已知正六棱锥的体积为48，侧面与底面所成的角为α，若$\dfrac{1}{\cos(\alpha-120°)}$，$\dfrac{1}{\cos\alpha}$，$\dfrac{1}{\cos(\alpha+120°)}$成等差数列.

求六棱锥的侧面积.

67. 三棱台的上下底面的对应边的比是1:2，过它的上底的一边作一个平行于它所对侧棱的平面，把棱台分成两部分，求这两部分体积的比.

68. 一个圆台的上底面半径为5cm，下底面半径为10cm，母线长为20cm，一动点P由母线AB的中点M出发，围绕侧面运动到B点，求其最短路线的长以及这条路线上的点到上底面圆周上的点的最短距离.

69. 在直角梯形$ABCD$中，$\angle A=\angle D=90°$，$AB=AD=a$，$DC=2a$，$DS\perp$平面$ABCD$，$DS=a$.

① 证明：棱锥$S-ABCD$的四个侧面都是直角三角形；

② 在棱SA上取一点M，使$SM=x$，平面CDM与棱SB相交于点P，求证：四边形$DCPM$是直角梯