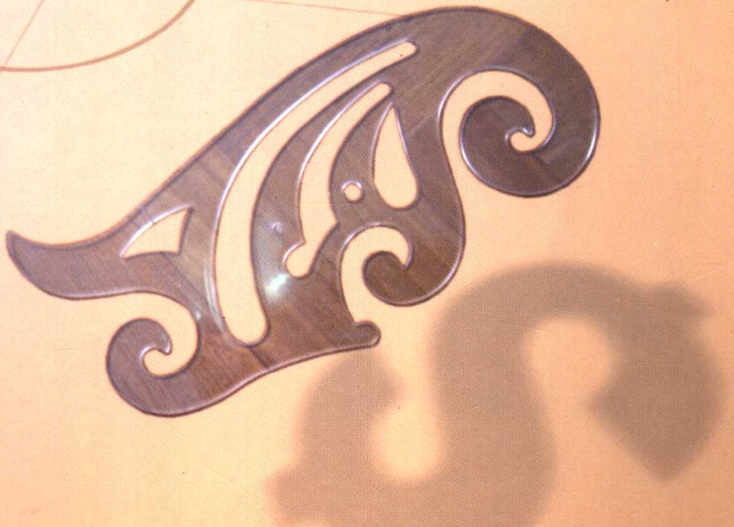
TURING 图灵数学·统计学丛书



Financial Calculus
An Introduction to Derivative Pricing

金融数学
衍生产品定价引论

[英] Martin Baxter
Andrew Rennie 著

叶中行 王桂兰 林建忠 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书

Financial Calculus

An Introduction to Derivative Pricing

金融数学

衍生产品定价引论

[英] Martin Baxter
Andrew Rennie 著
叶中行 王桂兰 林建忠 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图书在版编目（CIP）数据

金融数学：衍生产品定价引论 /（英）巴克斯特，（英）伦尼著；叶中行，王桂兰，林建忠译. —北京：人民邮电出版社，2006.1
（图灵数学·统计学丛书）

ISBN 7-115-14204-1

Ⅰ. 金… Ⅱ. ①巴…②伦…③叶…④王…⑤林… Ⅲ. 金融—经济数学 Ⅳ. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 144043 号

内 容 提 要

金融数学的核心内容之一就是衍生产品的定价. 本书涉足隐藏在衍生证券定价、结构和套期保值背后的数学，严格而又通俗. 作者用易于市场实践者理解的方式介绍了新的诸如鞅、测度变换等概念和 Heath-Jarrow-Morton 模型. 从借助于二叉树的离散时间套期保值开始，进一步推广到连续时间股票模型（包括 Black-Scholes 模型）. 本书突出了可实践性，包括了股票、货币和利率市场的诸多例子，并提供了基于实际数据绘制的图形. 附录中提供了关于概率和金融概念的术语表.

本书作为金融数学的基础教材，适用于相关专业的本科生和研究生课程. 也可供金融行业的市场实践者、定量分析师和衍生品交易者等相关领域专业人士参考.

图灵数学·统计学丛书

金融数学——衍生产品定价引论

◆ 著　[英] Martin Baxter　Andrew Rennie
译　叶中行　王桂兰　林建忠
责任编辑　王丽萍

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京顺义振华印刷厂印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：800×1000　1/16
印张：12
字数：250 千字　2006 年 1 月第 1 版
印数：1－4 000 册　2006 年 1 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2005-6095 号

ISBN 7-115-14204-1/TP·5091

定价：29.00 元

读者服务热线：(010)88593801　印装质量热线：(010)67129223

译者简介

叶中行: 美国 Cornell 大学博士. 现任上海交通大学理学院副院长，现代金融研究中心副主任，教授，博士生导师. 其研究领域包括应用概率统计、金融数学、信息理论和信息处理、智能计算等. 出版专著和教材 5 本，在国际和国内重要学术期刊、国际学术会议发表了数十篇论文.

王桂兰: 1996 年在中科院应用数学研究所获得理学博士学位，现为上海交通大学数学系副教授. 研究方向为金融数学. 发表金融数学方面的论文 8 篇.

林建忠: 1994 年在上海交通大学应用数学系获硕士学位，2004 年在香港中文大学统计系获博士学位，现为上海交通大学数学系副教授. 主要研究兴趣为数理金融和金融统计. 已发表学术论文 8 篇，出版教材 1 本.

译　者　序

随着我国改革开放的深入，金融业走向世界，越来越多地参与全球的金融衍生品交易，国内银行业、证券业和期货业也有越来越多的衍生品面世．这些行业对熟悉金融衍生品的人才的需求日益旺盛．为适应这种需求，国内越来越多的高校已经或将要增设金融数学和金融工程的新专业或专业方向，包括从本科、硕士到博士的不同层次，从而迫切需要建立相应的课程体系和编写相应的适用教材．

金融数学和金融工程的核心内容之一就是衍生产品的定价．但是对于衍生产品定价的严格数学模型和推导需要高深的随机分析的知识，这对于初学者显然是一种过于苛刻的要求．如何在严格的数学推导体现的科学性与通俗易懂的直观性之间取折衷，使得不具备太多数学和金融知识的读者能迅速进入这个领域，掌握金融衍生品定价的本质，本书是一个很好的尝试．本书的作者既有相当深厚的数学功底，又长期在商学院执教，在编写此教材时精选素材，将严格的数学推导加以简化，并与市场的实际相结合．因此本书不失为一本通俗易懂又不失科学性的教材，可作为商学院和数学系本科生的金融数学或金融工程课程的教材，也可作为从事金融工程的实务工作者的参考书．因此我们将它翻译出来以飨国内的读者．

本书由上海交通大学数学系和现代金融研究中心的金融数学和金融工程研究组翻译，叶中行负责协调全书的翻译工作并翻译了第 1 章和第 3 章的后 3 节，还和俞辰佳共同翻译了第 2 章，白云芬翻译了第 3 章的前 5 节，陈文才和王桂兰分别翻译了第 4 章和第 5 章，林建忠翻译了第 6 章和附录，叶中行核对并润色了全书的译稿．译者感谢人民邮电出版社图灵公司的指导和支持，使本书的翻译出版成为现实．

译者

2005 年 9 月于上海

前　言

金融数学的工作可以是严格的，也可以是通俗易懂的．但是正如约翰逊（Johnson）博士指出的，严格的东西未必是通俗易懂的，而通俗易懂的东西未必是严格的．

但是这两方面都是需要的．金融数学并不容易，但很多市场的实践操作是依据对实际情况的直觉的．对有经验的实践者，在对已有的合约进行估价时，直觉就够用了，但对创新产品的定价直觉往往是不够的．初学者、管理者和法则制定者在面对大量文献时，因为得不到基本准则的清晰解释而会手足无措．这种凭直觉的实践似乎更适合于行业的发展初期，而不适合于衍生产品交易已形成 15 万亿美元规模的成熟市场．

在学术界，人们经常花很多精力对错误的问题寻求严格的解答．如果孤立于市场，其努力主要是出于自身的目的去寻求解析的解答，而不考虑实践者关心的问题，特别会低估套期保值其价格和本身的重要性．即便仅仅是对来自工业界而不是学术的问题方面已经有了一些最好的解答，学者们也需要关心这些金融的问题．

对本书章节的导引

第 1 章是一个简单的引言，特别是对初学者，表明对某些东西，它的期望价值并不能很好地指导定价，需要质疑这种观点，并用套利定价方法取而代之．

第 2 章发展了套期保值的观点，并通过离散时间二叉树模型的套利分析来定价．在这个简单的框架下介绍了一些关键的概率的概念，如条件期望、鞅、测度变换和表示定理，并辅以具体的例子．

第 3 章在连续时间情形下讨论了与前一章相同的问题，引出了 Brown 运动和 Itô 积分，并用于导出 Black-Scholes 法则．

第 4 章讨论了广泛的一类金融产品，如分红的证券、支付现金和利息的债券，将 Black-Scholes方法进行适当修正以适合这些产品的定价．对区分可交易和不可交易量的一般的讨论导致了对风险的市场价格的定义，同时也指出对这个名称不必太在意，后面有一节专门讨论货币产品并给出了一系列例子．

第 5 章是关于利率市场．从本质上讲，债券市场更像股票市场．但这个市场的丰富内涵使之不光是像Black-Scholes模型的一个特例，因此我们在第 3 章建立的，一般连续时间框架下结合短期利率与 HJM 模型来讨论市场模型．有一节详细讨论了很多可能的利率合约，包括互换、利率上/下限和互换期权．这一节反映了必须以一种通俗易懂的形式介绍给读者深度的金融和技术知识，其目的是揭示所有方法都可以融入其内的市场的一个基本事实．

第 6 章给出了更一般模型下的一些技术性的结论，包括对多种股票 n-因子模型、计价单位、外汇利率模型等．最后给出了等价鞅测度的存在性、可定价性及套期保值的关系．

附录中包括了简短的参考文献、数量不多的习题的完整解答、技术名词词汇一览表和索引.

如何阅读本书

可以按顺序像阅读小说那样阅读本书，也可以随机地选择各自独立的完整章节，偶而有些问题需要读者运用本书所讲授的技巧，但无碍于往下的阅读.

不要求读者在阅读本书时需具备特别的预备知识，只需了解某些经典的微分计算和数学符号概念，词汇表中包括了基本的概率定义. 更熟练的读者可以随着本书内容的展开发现更多的技术性的旁注.

致谢

我要感谢剑桥大学出版社的戴维・特兰荷（David Tranah），他彬彬有礼，从不提我们多次拖延交稿的事，当然还要感谢他更具价值的帮助；感谢在伦敦、纽约等地用过我们讲义的读者，他们忍受了比目前这个最终版本差得多的写作风格；特别要感谢洛恩・怀特威（Lorne Whiteway）的帮助和鼓励.

Martin Baxter
Andrew Rennie
1996 年 6 月

一个赌马的比喻

庄家设局在一个 2 匹马的比赛中赌博，如果选择有技巧性的方法，他要研究马跑不同距离的表现，同时要考虑诸如马的训练、饮食和骑师的选择等诸因素．最后他正确地计算出一匹马有 25% 的概率会赢，另一匹马赢的概率为 75%，据此他能对第一匹马按押 1 赔 3 的赔率赔付，而对第二匹马按押 3 赔 1 的赔率赔付．

设定这样的赔率一定程度反映了大众的心理，比如对第一匹马下注 5000 美元，对第二匹马下注 10 000 美元．如果第二匹马赢，他可以获利 1667 美元，但如果第一匹马赢，他则会损失 5000 美元，因此他获利的期望值是 25% ×(－ \$5000)＋75% ×(\$1667) = \$0，或者说正好打平手．从长远来看，在一系列类似但独立的比赛中，平均的法则会使赌马者打成平手．除非比赛次数很多，否则可能会面临很大的损失．

然而假设他按照赌金的比例 2:1 而不是 3:1 下注，即对第一匹马按押 2 赔 1 的赔率赔付，而对第二匹马按押 1 赔 2 的赔率赔付，则无论哪匹马赢，他都会打成平手．结果与马输赢无关．

在实践中，庄家会按照超过 100% 的胜率来出售，同时降低赔率以便从中获利（见下表）．然而会出现同样的问题，应用准确的概率从长远来看可以获利，但短期内可能会有损失．庄家如果想赚取稳定的收益，建议他最好设想赛马的概率与准确的概率是不同．如果是这样的话，他会处于对赛马的结果并不感兴趣但可以确保收入的奇特的状况．

关于下注的说明：

当赌博的价格确定为押 m 赔 n 的赔率赔付形式，例如按押 1 赔 3 的赔率赔付，则下注 \$$m$ 成功，可以赢得 \$$n$ 加上退还赌注．这里隐含的获胜的概率为 $m/(m+n)$，通常这个概率小于 1/2，因此，第一个数字大于第二个数字．否则就会变成押 3 赔 1 的赔率．

准确的概率下的赌注	25% \$5000	75% \$10 000	
1. 设定的赔率	押 5 赔 13	押 15 赔 4	
隐含概率	28%	79%	总计 = 107%
如果马赢时的获利	－ \$3000	\$2333	期望收益 = \$1000
2. 设定的赔率	押 5 赔 9	押 5 赔 2	
隐含概率	36%	71%	总计 = 107%
如果马赢时的获利	\$1000	\$1000	期望收益 = \$1000

为使庄家能够获利，对赔率作适当改变．在第一种情形，赔率依赖于马跑赢的实际概率，而在第二种情形，赔率依据下注的钱数确定．

译者注：为帮助读者理解上述表格，我们将详细计算解释如下：

在第一种情形：庄家收到的赌注共计 \$5000 + \$10 000 = \$15 000，如果第一匹马赢，该庄家除返还第一个下注者的赌注 \$5000 外还要赔付 \$13 000，故损益为 \$15 000 - \$5000 - \$13 000 = - \$3000 .

如果第二匹马赢，该庄家除返还第二个下注者的赌注 \$10 000 外还要赔付 $\$10\,000 \times \frac{4}{15} = \$2667$，故损益为 \$15 000 - \$10 000 - \$2667 = \$2333 .

由于第一匹马获胜的概率为 25%，第二匹马获胜的概率为 75%，所以庄家的平均损益为：

$$-\$3000 \times 25\% + \$2333 \times 75\% = -\$750 + \$1750 = \$1000.$$

对第二种情形，读者可以类似地计算.

目　　录

第1章 引 言

金融市场产品可以分为两大类，有“标的”证券：股票、债券、商品、外币；和它们的“衍生证券”，是关于某种标的证券在未来的支付或转移的未定权益. 衍生证券可以降低风险（比如使得参与者可以在现在就锁定未来交易的价格）也可以放大风险. 一个无成本的合约同意支付一只股票和未来价格的差额，使得合约双方无需用现在的资本来购买就能拥有股票，从而来控制风险.

从形式上讲，一类依赖于另一类，如果没有标的（证券），就没有未定权益，但是这两类之间的联系是相当复杂及不确定的，因为在同一市场里每一类都有大量的交易. 股票的明显随机的本质经过过滤到未定权益，因此未定权益也是随机的.

数学家早就知道随机并不意味着没有内在的结构. 粗略地说，事情的随机性通常以非随机的方式出现. 概率和数学期望的研究揭示了处置随机性的一种途径，本书将在概率的基础上来发现未定权益和它们的随机标的证券最强的可能的联系. 然而，目前真实的情况是，问题很复杂，并且在这个新的领域有过不少失败的尝试，其中有一个是特别令人着迷的. 3

1.1 期望定价

考虑以下的游戏. 某人掷一个硬币，如果正面向上，将奖励你 1 美元；如果反面向上，则无奖励，你该为这个游戏支付什么价格？如果硬币是均匀的，出现正面和反面的机会相等. 大约一半的时间会赢得这 1 美元，而另一半时间将一无所获. 经过充分多次后，平均每次你期望得到 50 美分，因此支付多于 50 美分是不太合算的，而少于 50 美分对游戏的庄家则过于浪费，因而 50 美分正合适.

在期望的更加正式的数学定义下，50 美分正是每次游戏的期望收益. 对游戏的概率分析表明，虽然每次掷硬币的结果是随机的，但这并非与游戏的更深层的非随机结构不相容. 我们可以假设存在与掷硬币结果可能性相对应的度量，硬币正面或反面向上的概率为 1/2. 上述概率的形成的同时带来了期望的概念. 在离散情形，就是每次结果的数值与相应的概率的加权平均. 上述游戏的期望支付为 $\frac{1}{2}\times \$1+\frac{1}{2}\times \$0=\$0.50$.

这个形式上的期望可以通过以下的定理与游戏的“价格”联系起来.

柯尔莫哥洛夫强大数定律

假设有一列独立的服从同一分布的随机数列 $X_1, X_2, X_3, \cdots$，均值（期望值）为 μ.

设 S_n 是前 n 项的算术平均，即 $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$，那么当 n 趋向无穷时，S_n 以概率 1 趋于均值 μ.

如果结果的算术平均值确定地收敛于数学期望，则每次游戏的平均收益/损失趋于数学期望减去支付每次游戏的价格，如果两者之差为正数，则从长远看，你最终是获益的；反之如果为负数，则最终你肯定会蒙受损失的. 如果游戏次数很少，则不能保证输赢，但随
4 着次数的增加，最终出现的是数学期望. 在这个意义下，50 美分是每次游戏的公平价格.

但是这是一个可执行的价格吗？如果某人同意你以每次付 40 美分可以赢 1 美元的比价和他玩这个游戏，但不允许你玩多次，只允许你玩一次大的赌注. 如果赢了，根据你下的赌注你可以按上述比价得到奖励（比如，下注 \$40，如果赢，可得 \$100）. 如前所述，强大数定律可以保证你在重复多次的游戏中获利. 但如果只允许玩一次，强大数定律就不起作用. 付 40 美分可以赢 1 美元的比价无疑是金融自杀，用你的住宅做抵押，卖掉你所有的财产，按你的信用极限向银行贷款来玩一次这样的游戏显然是不明智的.

因此这个游戏的市场可以以不同于数学期望的价格来交易. 对于次数少的游戏，可以出任何价格. 接受价格的“买家”和“卖家”的数量可能与游戏结果的数学期望毫无关系，但是作为开始游戏的指导价格，付一个合适的价格，大数定律和数学期望可起到一定的作用.

1.1.1 货币的时间价值

我们忽略了一个重要的细节——货币的时间价值. 通过同一时间游戏的价格和它的回报简化了对掷硬币游戏的分析. 如果掷硬币的游戏发生在一年之末，而对游戏的支付是在年初，那么实际上我们必须找到掷硬币游戏这个未定收益现在的而不是将来的价值.

如果现在是 1 月份，则 12 月份的 1 美元在现在的价值就不到 1 美元. 利率的存在即承认了这一点，而债券市场也因此产生. 假设存在一个这些未来承诺的市场，这样构造出来的债券的价格就由某种利率决定. 特别地：

货币的时间价值

假设对于小于某个时间 τ 的任何时刻 T，T 时刻的一美元现值是 $\exp(-rT)$，其中 $r >$
5 0 为某个常数. 称利率 r 为这个时间段中的连续复利.

利率市场并没有这么简单，r 无须是常数. 在实际市场里，r 的确不是常数. 但在此假设它是常数，就能得到所玩游戏在 T 时刻基于强大数定律的价格. 在 T 时刻付 50 美分等价于现在付 $50\exp(-rT)$ 美分. 为什么？这是因为可以在现在以 $50\exp(-rT)$ 的价格购买半个单位的债券，保证在 T 时刻得到 50 美分. 因此现在有说服力的价格是 $50\exp(-rT)$ 美分，而不是 50 美分.

1.1.2 股票，不是货币

在现实的金融市场中股票是如何定价的呢？一个被广泛接受的模型就是股票价格服从

对数正态分布. 基于上述货币的时间价值，可以证明这个结论.

股票模型

假定存在一个随机变量 X，服从均值为 μ、标准差为 σ 的正态分布，使得在 T 时段股票价格的对数变化为 X，即

$$\log S_T = \log S_0 + X, \quad 或 \quad S_T = S_0\exp(X).$$

假设现在有一个关于这个股票的未定权益，即承诺在某种确定情况下支付确定数量的货币的一个合约，就像掷硬币游戏那样. 关于股票的最老的或许也是最自然的未定权益就是**远期**：双方签订的一个合约规定，一方在未来某一约定时间点按约定价格向另一方出售约定数量的股票. 称股票为**出售的远期**. 远期股票“游戏”的“定价问题”是：一年以后出售的股票的价格在合约上应约定为多少？

可以更正式地把这个问题表述出来. T 时刻股票的价格为 S_T，合约约定的价格为 K，则在期满发生股票交易时，合约的价值为 $S_T - K$. 根据货币的时间价值可知，未定权益现在的价值是 $\exp(-rT)(S_T - K)$. 由强大数定律知这个随机变量的期望值 $\mathbb{E}(\exp(-rT)(S_T - K))$ 应该等于0. 6
如果它是正值或负值，如长期使用这个价格，那么会导致合约的某一方获利. 因此对于“定价问题”的合理的解答是 K 应该等于使 $\mathbb{E}(\exp(-rT)(S_T - K)) = 0$ 的值：$K = \mathbb{E}(S_T)$.

$\mathbb{E}(S_T)$ 是什么？我们已经假设 $\log S_T - \log S_0$ 服从均值为 μ、标准差为 σ^2 的正态分布，也就是要计算 $\mathbb{E}(S_0\exp(X))$，其中 X 服从均值为 μ、标准差为 σ^2 的正态分布. 为此，可以利用下面的结果：

非专业统计学家的法则

给定一个取实数值的随机变量 X，它的概率密度函数为 $f(x)$，则对于任何可积的实值函数 $h(X)$，其数学期望为

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为 X 服从正态分布，X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

利用上述法则，通过积分运算可以得到 T 时刻股票的期望价格为 $S_0\exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$，这是由强大数定律保证的远期合约的价格，与掷硬币游戏类似，这只是对市场交易水平的一种建议. 但是这里采用的技术显然也适用于远期以外的衍生产品定价. 很多未定权益可以转换成函数 $h(X)$ 的形式，应用上述法则，也可以推导出它们的期望价值. 将这个期望值贴现就给出了一个由强大数定律联系于经济实际的理论值.

1.2 套利定价

综上所述，尽管强大数定律看似有理且富有魅力，但却完全不实用. 刚才导出的远期
7 的价格只有在某种不幸的巧合才能作为市场价格. 在可以自由买卖股票的市场上，可以无成本地持有或卖空任意数量的股票，根据强大数定律去做远期交易会导致灾难性的后果，在大多数情况下，人们会有兴趣以这个价格向你无限地出售远期.

为什么强大数定律如此不适合于远期？正如前面提到的掷硬币的游戏，强大数定律给出的不是一个可执行的价格，仅仅是一个建议价格. *而另外一种完全不同的机制可以提供一个可执行的价格.* 合约的公平价格是 $S_0\exp(rT)$，它不依赖于股票的期望值，甚至也不依赖于有特定分布的股票价格. 合约的双方可以在合约开始之时写明双方权益并耐心等待，直到到期之日执行合约.

操作策略

考虑合约的卖方，他有义务在到期日向买方出售约定数量的股票. 卖方可以在签订合约时借入 S_0 用于购买股票，然后把股票放进抽屉里等待. 到合约期满时，他要还贷款. 如果按无风险复利 r 计算利息，他连本带利须还 $S_0\exp(rT)$，但那时他已经卖掉了股票，如果合约规定的股票的交易价格少于 $S_0\exp(rT)$，他肯定要遭受损失.

因此远期的价格应不低于 $S_0\exp(rT)$. 当然远期的买方也可以作相反的操作，如果远期的价格高于 $S_0\exp(rT)$，买方就会蒙受损失，因此远期的价格又不能高于 $S_0\exp(rT)$.

从而就有了一个*可执行的*价格，它不是 $S_0\exp(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)$，而是 $S_0\exp(rT)$. 任何给远期合约规定一个与此不同的价格的企图，都会使某一方通过适当的操作享受免费的午餐. 和玩掷硬币的游戏不同的是，现在抵押房产进行交易*是*理性的举动. 这种市场行为有一个很古老的名称——套利. $S_0\exp(rT)$ 的价格是一个套利价格——它是公平的，因为任何其他的价格都会使某一方享受免费的午餐. 强大数定律没错的话——如果 $S_0\exp(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)$ 高于 $S_0\exp(rT)$，则合约的买方可以赚钱. 当然如果股票价格预期比无风险利率 r 增长得快的话，则股票的买家也会增加得很快. 套利价格的存在，尽管令人惊讶，却取代了强大数定
8 律. 简而言之，存在一个套利价格，除此以外的定价都是危险的.

1.3 从套利到期望

强大数定律和数学期望给出了远期错误的价格，但是从某种意义上讲，远期是一个特例. 操作的策略（购买股票并持有它）对于更复杂的权益是不可行的. 标准的看涨期权，

给予期权的买家一种权利而不是义务向卖方以事先约定的价格购买股票，对这种期权就不能如法炮制地套利. 如果到期日股票价格高于约定价格，则买方就执行期权，要求按约定的价格购买股票，期权卖方开始时买入后放进抽屉的股票就派上了用场. 但是如果到期日股票价格低于约定价格，期权买方就放弃期权，而拥有股票的卖方就会蒙受无意义的损失.

看来，对看涨期权来说也许强大数定律是适用的，然而直到 1973 年以前人们还不是这么想的. 此前，几乎所有的东西通过期望和强大数定律来定价都是安全的，只有远期和与远期密切相关的产品似乎才有套利价格. 然而，自从 1973 年 Black-Scholes 的备受争议的论文问世后，上述观点的错误才逐渐显示出来. 本书其他地方不再应用强大数定律了. 虽然会不断地用到期望的概念，有点像把水搅混，但只是用做无风险复制的一个工具. 所有衍生证券都可以由标的证券构造——套利无处不在. 9