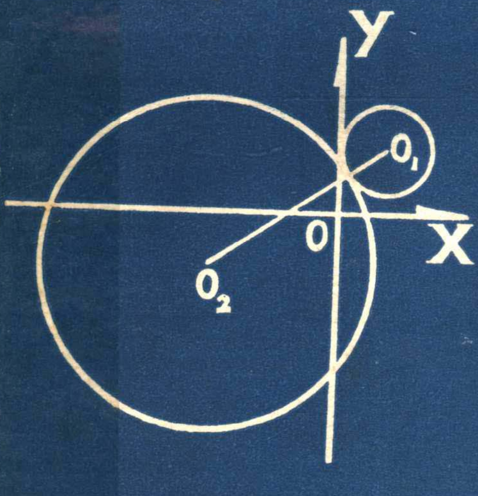
平面解析几何习题解

张忠善　张宗娜编



河南人民出版社

平面解析几何习题解

张忠善　张宗娜编

河南人民出版社

平面解析几何习题解

张忠善　张宗娜编

河 南 人 民 出 版 社 出 版
河 南 第 一 新 华 印 刷 厂 印 刷
河 南 省 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米 32开本 10.625印张 210 千字

1980年 4 月第 1 版　　1980年 4 月第 1 次印刷
印数 1—71,000 册
统一书号 7105·115　定价0.73元

编　者　的　话

本书主要选自樊映川等同志编的高等数学习题集1959年，1964年两版中的行列式和平面解析几何的全部习题，和中学数学教学大纲规定内容有关的习题。本书最后部分还补充了用解析几何的方法解决平面几何中较难的题，目的使读者能举一反三，进一步在几何代数化的道路上探讨其规律。

本书所有习题均作了较详细的题解，适用于目前中等学校高年级的学生，中专和大专及电视大学一年级的学生，也可作为有关教师选习题时作参考。由于编者水平有限，不当之处，请读者批评指正。

张忠善　张宗娜

1979年1月1日于郑州

目　　录

第一章　行列式与线性方程组

1.求以下行列式之值:

(1) $\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3} & 1\dfrac{1}{2} \\ 6 & 18 \end{vmatrix}$.

解　原行列式$=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot 18-6\cdot\dfrac{3}{2}=-6-9=-15$.

(2) $\dfrac{7}{3}\begin{vmatrix} 3a & 0 \\ 9b & -4a \end{vmatrix}$.

解　原行列式$=\dfrac{7}{3}(-12a^2-0)=-28a^2$.

2.计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

解　原行列式$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

(2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

解　原行列式$=a^2b^2-(ab)(ab)=0$.

(3) $\begin{vmatrix} \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{t^2-1} \\ \dfrac{2t}{t^2-1} & \dfrac{1+t^2}{t^2-1} \end{vmatrix}$. $t \neq -1$，1。

解 原行列式$=\dfrac{1}{(t^2-1)^2}\begin{vmatrix} -(1+t^2) & 2t \\ 2t & 1+t^2 \end{vmatrix}=\dfrac{1}{(t^2-1)^2}\cdot$

$\cdot[-(1+t^2)^2-4t^2]=\dfrac{-(1+6t^2+t^4)}{(t^2-1)^2}$。

(4) $\begin{vmatrix} \sin\alpha-\sin\beta & \cos\alpha+\cos\beta \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha+\sin\beta \end{vmatrix}$。

解 原行列式$=(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)-(\cos\beta-$
$-\cos\alpha)(\cos\alpha+\cos\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta+$
$+\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$
$=1-1=0$。

(5) $\begin{vmatrix} a+bi & 0 \\ b & a-bi \end{vmatrix}$。

解 原行列式$=(a+bi)(a-bi)-b\cdot 0=a^2+b^2$。

3.证明下列等式:

(1) $\begin{vmatrix} aa_1+bc_1 & ab_1+bd_1 \\ ca_1+dc_1 & cb_1+dd_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$。

证 等式左边$=(aa_1+bc_1)(cb_1+dd_1)-(ca_1+dc_1)\cdot$
$\cdot(ab_1+bd_1)=aa_1b_1c+aa_1dd_1+bb_1cc_1+bc_1dd_1-$

$-aa_1b_1c-a_1bcd_1-ab_1c_1d-bc_1dd_1=aa_1dd_1+$
$+bb_1cc_1-a_1bcd_1-ab_1c_1d$;

等式右边$=(ad-bc)(a_1d_1-b_1c_1)=aa_1dd_1+$
$+bb_1cc_1-a_1bcd_1-ab_1c_1d$。

左边=右边，故等式成立，证毕。

(2) $a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$。

证 等式左边$=a_1(b_1c_2-b_2c_1)-b_1(a_1c_2-a_2c_1)+$
$+c_1(a_1b_2-a_2b_1)=a_1b_1c_2-a_1b_2c_1-a_1b_1c_2+$
$+a_2b_1c_1+a_1b_2c_1-a_2b_1c_1=0$。

左边=右边，故等式成立，证毕。

4.求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 5x+2y=3, \\ 11x-7y=1. \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 11 & -7 \end{vmatrix}=-35-22=-57\neq 0$,

$D_x=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}=-21-2=-23$,

$D_y=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix}=5-33=-28$。

于是得 $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{23}{57}$， $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{28}{57}$.

所以方程组的解是 $\begin{cases} x=\dfrac{23}{57}, \\ y=\dfrac{28}{57}. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x-y=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-10+1=-9\neq 0,$

$D_x=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=0,\qquad D_y=\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$

于是得 $x=\dfrac{D_x}{D}=0,\qquad y=\dfrac{D_y}{D}=0.$

所以方程组的解是 $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x\cos\theta-y\sin\theta+a=0, \\ x\sin\theta+y\cos\theta+b=0. \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq 0,$

$$D_x=\begin{vmatrix} -a & -\sin\theta \\ -b & \cos\theta \end{vmatrix}=-a\cos\theta-b\sin\theta,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \cos\theta & -a \\ \sin\theta & -b \end{vmatrix}=-b\cos\theta+a\sin\theta.$$

于是得 $x=\dfrac{D_x}{D}=-a\cos\theta-b\sin\theta,$

$$y=\frac{D_y}{D}=-b\cos\theta+a\sin\theta.$$

所以方程组的解是 $\begin{cases} x=-a\cos\theta-b\sin\theta, \\ y=-b\cos\theta+a\sin\theta. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x+5y=13, \\ 2x+7y=81. \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=21-10=11\neq0.$

$$D_x=\begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix}=91-405=-314,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix}=243-26=217.$$

于是得 $x=\frac{D_x}{D}=-\frac{314}{11}=-28\frac{6}{11}$,

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{217}{11}=19\frac{8}{11}.$$

所以方程组的解是$\begin{cases} x=-28\frac{6}{11}, \\ y=19\frac{8}{11}. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 3x+5y=4, \\ 6x+10y=2. \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}=30-30=0,$

$$D_x=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}=30\neq 0.$$

故方程组无解。

(6) $\begin{cases} 3x-5y=4, \\ 9x-15y=12. \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 9 & -15 \end{vmatrix}=-45+45=0.$

$$D_x=\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 12 & -15 \end{vmatrix}=-60+60=0,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}=36-36=0.$$

于是　　$D=D_x=D_y=0$，

故方程组有无穷多组解。

(7) $\begin{cases} 3x+4y=2, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$

解　$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=9-8=1\neq 0.$

$$D_x=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=6-28=-22,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=21-4=17.$$

于是得　$x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-22}{1}=-22$,　　$y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{17}{1}=17.$

所以方程组的解是$\begin{cases} x=-22, \\ y=17. \end{cases}$

(8) $\begin{cases}3x+4y=1,\\6x+8y=3.\end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{vmatrix}=24-24=0,$

$D_x=\begin{vmatrix}1 & 4\\3 & 8\end{vmatrix}=8-12\neq 0.$

故方程组无解.

(9) $\begin{cases}3x+4y=1,\\6x+8y=2.\end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{vmatrix}=24-24=0.$

$D_x=\begin{vmatrix}1 & 4\\2 & 8\end{vmatrix}=8-8=0,$

$D_y=\begin{vmatrix}3 & 1\\6 & 2\end{vmatrix}=6-6=0.$

于是 $D=D_x=D_y=0$，故方程组有无穷多组解.

5.三阶行列式中所有位于不同行和不同列的元素的乘积是否都包含在其展开式中？为什么？

解 设三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

其中每个元素有两个下标，前者为所在行数，后者为所在列数。如 a_{23} 表示位于第二行第三列的元素. 由三阶行列式对角线法展开有

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

其中每一项均由三个元素相乘而得，从下标可看出它们是不同行列上的元素. 反之，凡在三阶行列式中位于不同行和不同列中取出元素的乘积只有 $3!=6$个（即此六项）全部含于展开式中，故三阶行列式中位于不同行和不同列的元素的乘积都包含在其展开式中.

6.求下面行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

解 原行列式$=2+9-2-6-1+6=8$.

(2) $-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$

解 原行列式$=-(2-45-8-12-20-3)=86$。

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$. ($i$: 虚数单位)

解 原行列式$=1-(1+i)(1-i)+i^2=1-1-1-1$
$=-2$。

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lg2 \\ 2 & \lg2 & \lg2 \\ 4 & \lg16 & 0 \end{vmatrix}$.

解一 用对角线法:

原行列式$=2\lg2\cdot\lg16-4(\lg2)^2-\lg2\cdot\lg16$

$=\lg2(\lg16-4\lg2)=\lg2(\lg16-\lg16)=0$。

解二 原行列式$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lg2 \\ 1 & \lg2 & 0 \\ 4 & \lg16 & 0 \end{vmatrix}$

（第二行减去第一行）

$=\begin{vmatrix} 1 & \lg2 \\ 4 & \lg16 \end{vmatrix}\cdot\lg2=\lg2(\lg16-4\lg2)$

（按第三列展开）

$=\lg2(\lg16-\lg16)=0$。

7.用对角线法计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

解 原行列式$=-24+8-4+16=-4$。

(2) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

解 原行列式$=16-24+80-8+40-96=8$。

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

解 原行列式$=60+12+28-30-6-112=-48$。

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$.

解 原行列式$=(1+a)(1+b)+1+1-(1+a)-$

$$-1-(1+b)=ab.$$

(5) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 原行列式$=xy(x+y)+xy(x+y)+xy(x+y)$

$-(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)-3x^2y-$

$-3xy^2-2(x^3+y^3)=-2(x^3+y^3)$。

8.从下列方程中，求出 x：

(1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$。

解 展开 $2x^2+9x+12-18-3x^2-4x=0$，

即 $x^2-5x+6=0$ 或 $(x-2)(x-3)=0$。

∴ $x=2$，$x=3$。

(2) $\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}=0$。

解 展开 $40x+20x+81-45-48x-30x=0$。

即 $18x=36$，

∴ $x=2$。

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$。

解 展开 $x+6x^2+6-9x-2x^2-2=0$，

即 $4x^2-8x+4=0$ 或 $x^2-2x+1=0$。