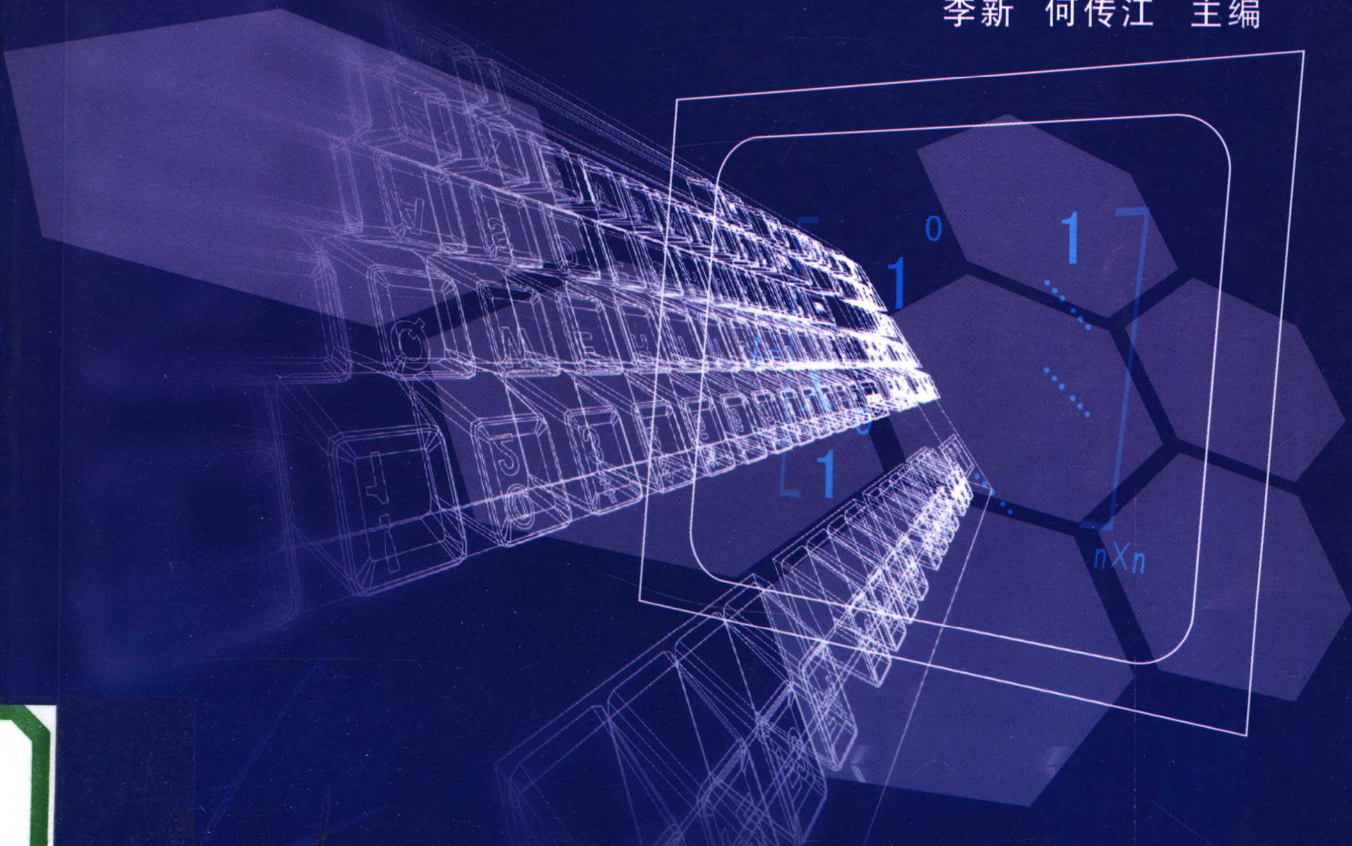
矩阵

JUZHEN LILUN JIQI YINGYONG

理论及其应用

李新　何传江　主编



重庆大学出版社

矩阵

JUZHEN LILUN JIQI YINGYONG

理论及其应用

重庆大学教材建设基金资助

矩阵理论及其应用

李 新 何传江 主编

重 庆 大 学 出 版 社

内容提要

本书主要内容分成两部分，第一部分包括第1章、第2章、第3章内容，这部分作为《线性代数》的衔接与补充，主要讲了线性空间、内积空间、线性变换。第二部分包括第4章到第9章，这一部分是考虑到当前各工科学科研究生的实际需要而选择的内容，主要包括：范数理论及其应用；矩阵分析及其应用；矩阵分解；广义矩阵及其应用；特征值的估计及广义特征值；矩阵的 kronecker 积等。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵理论及其应用/李新主编．—重庆：重庆大学出版社，2005.8

ISBN 7-5624-3411-5

Ⅰ.矩...　Ⅱ.李...　Ⅲ.矩阵—理论—高等学校—教材　Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第064077号

矩阵理论及其应用

李　新　何传江　主　编

责任编辑：周　立　　版式设计：周　立

责任校对：任卓惠　　责任印制：秦　梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：张鸽盛

社址：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编：400030

电话：(023) 65102378　65105781

传真：(023) 65103686　65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）

全国新华书店经销

重庆师范大学印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：14.5　字数：362千

2005年8月第1版　　2005年8月第1次印刷

印数：1—3 000

ISBN 7-5624-3411-5　　定价：19.50元

前言

用矩阵的理论与方法来处理现代工程技术中的各种问题已越来越普遍。在工程技术中引进矩阵理论不仅使理论的表达极为简捷，而且对理论的实质刻画也更为深刻，这一点是不容置疑的，更由于计算机和计算方法的普及发展，不仅为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景，也使工程技术的研究发生新的变化，开拓了崭新的研究途径，例如系统工程，优化方法，稳定性理论等，无不与矩阵理论发生紧密结合。因此矩阵的理论与方法已成为研究现代工程技术的数学基础。本书是为了提高工科研究生的理论分析能力和科学实践能力以适应研究工作需要而编写的。

考虑到研究生已具备的数学基础，本书起点放在已学习 40 学时工程数学《线性代数》的基础上，结合各学科研究生教学和科研工作的需要，选编了此书，作为工科研究生数学选修课的参考教材之一。此书在出版之前曾编成讲义，在重庆大学硕士研究生数学选修课中试讲过 9 年。感谢重庆大学教材建设基金的资助，此书才得以顺利出版。

本书内容分为两部分。第一部分包括第 1 章、第 2 章、第 3 章内容，这一部分作为《线性代数》的衔接与补充，为学习第二部分内容打下必要的基础。它们有线性空间，内积空间、线性变换，考虑到教学效果，在介绍约当标准型时采用的是 λ—矩阵方法，而约当标准型是后面矩阵函数的重要基础。第二部分包括第 4 章至第 9 章，这一部分是考虑到当前各工科学科研究生的实际需要而选择的内容。学时数在 50 ~ 60 学时的除讲授第 1 篇以外，第 2 篇可参考讲授第 4 章，第 5 章，第 6 章的第三节：矩阵的最大秩分解，第 7 章，第 8 章的第一、二、三节，其中“ * ”号内容可不讲。

各章后面都配有一定量的习题，全书最后也配有习题答案或提示。

本书在编写过程中，得到重庆大学研究生院及重庆大学数理学院领导的大力支持，特别承蒙重庆大学李平渊教授、张心明老师的审核，提出了许多宝贵意见。本书由李新与何传江主编。

由于编者水平有限，经验不足，对于书中谬误和不当之处，如蒙赐教，不胜感激。

编　者

2005 年 8 月

符号说明

$A,B,C,V,R,K,\cdots$	集合
$a,b,c,\lambda,\mu,k,\cdots$	元素或数
$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{X},\cdots$	矩阵
$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega},\cdots$	向量
$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{E},\mathscr{T},\cdots$	线性变换
K	一般数域(集)
$\mathbf{C}$	复数域(集)
$\mathbf{R}$	实数域(集)
$\mathbf{Q}$	有理数域(集)
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{N}$	自然数集
$\sigma: X\to Y$	σ 是集合 X 到集合 Y 的映射
$x\to y$	给定 x,有惟一的 y 与之对应
R^n	n 维实向量空间
$R^{m\times n}$	$m\times n$ 阶实矩阵空间
$\mathrm{Re}\ \lambda$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}\ \lambda$	复数 λ 的虚部
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置共轭
$\boldsymbol{A}^{*}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$R(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域(列空间)
$N(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核(零空间)
$r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩(或注 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$)
$(\boldsymbol{A})_{ij}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行 j 列的元素(或记 a_{ij})
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\det\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式(或记$\|A\|$)
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹,即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和
$\\|\boldsymbol{A}\\|$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数
$\\|\boldsymbol{A}\\| = \max\limits_{\\|\boldsymbol{\chi}\\|=1}\\|\boldsymbol{A\chi}\\|$	所有向量 $\boldsymbol{\chi}$ 范数为 1 的使向量 $\boldsymbol{A\chi}$ 范数最大者
$\boldsymbol{A}^{+}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆
$\boldsymbol{A}_L^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左逆
$\boldsymbol{A}_R^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右逆
$\mathscr{A}: V\to V$	$\mathscr{A}$ 是线性空间 V 到 V 的线性变换
$\mathrm{Hom}(V,V)$	线性空间 V 到 V 的线性变换全体
$R(\mathscr{A})$	线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域
$N(\mathscr{A})$	线性变换 $\mathscr{A}$ 的核
$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 积
$\boldsymbol{A}\oplus_k\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 和

目录

第1篇　线性空间与线性变换

第 2 篇　矩阵理论及其应用

第 1 篇

线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是学习《矩阵论》经常用到的两个极其重要的概念。本篇先简要论述这两个概念及其理论，然后再讨论两个特殊的线性空间，这就是 Euclid 空间和酉空间。所有论述是在假定读者已经具备了 n 维向量空间的理论，矩阵的初步运算，线性方程组的理论和二次型的有关知识基础上进行的。

第 1 章
线性空间

1.1 集合与映射

1.1.1 集　合

集合是数学中最基本的概念之一。所谓集合，是指作为整体看的一堆东西。例如由一些数(有限个或无限个)组成的集合，叫做数集合或数集；一个线性方程组解的全体组成一个集合，叫做解集合；一个已知半径和圆心的开圆内的所有点组成一个集合，叫做点集合或点集等等。组成集合的事物叫做这个集合的元素。一般用英文大写字母 $A,B,\cdots$ 表示集合，小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素，常用记号

$$a \in A$$

表示 a 是集合 A 的元素，读作 a 属于 A；用记号

$$a \notin A$$

表示 a 不是集合 A 的元素，读作 a 不属于 A。

集合有多种定义法，常见的有枚举法、隐式法、递归法。

枚举法是列出集合的全体元素。但当集合的元素有一定规律时，可只列出一部分。例如，由桌子，椅子，教室，电灯组成的集合 A，可记为

$$A = \{\text{桌子,椅子,教室,电灯}\}$$

自然数集合 $\mathbf{N}$，可记

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,\cdots\}$$

隐式法是用描述集合的元素所具有的特征性质的方法定义集合。例如，适合方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的全部点组成的集合 B，可记为

$$B = \{(x\ y) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$$

递归定义一个集合分三步完成。如定义偶数集 $\mathbf{E}$,

1)2 属于集合 $\mathbf{E}$。

2)若 x,y 属于集合 $\mathbf{E}$,则 $x+y,x-y$ 都属于 $\mathbf{E}$。

3)满足 1 和 2 的元素都属于集合 $\mathbf{E}$。

不包含任何元素的集合称为空集,记为 ϕ。例如,一个无解的线性方程组的解的集合就是一个空集。空集合在集合运算中所起的作用,类似于数零在数的运算中所起的作用。

如果集合 B 的所有元素全是集合 A 的元素,即由 $a\in B$ 可以推出 $a\in A$,那么就称 B 为 A 的子集合,记为

$$B\subseteq A \quad 或 \quad A\supseteq B$$

例如,全体偶数集 $\mathbf{E}$ 就是全体整数集 $\mathbf{Z}$ 的子集合。我们规定空集合 ϕ 是任意一个集合的子集合,按定义,每个集合都是它自身的子集合,于是把集合的这两个子集合称为平凡子集合,而把它的其他子集合称为真子集。

如果集合 A 的元素与集合 B 的元素完全相同,即 $a\in A$,当且仅当 $a\in B$,那么称它们相等,记为

$$A=B$$

显然两个集合 A 与 B 如果同时满足 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$,那么 $A=B$。

我们把既属于集合 A,又属于集合 B 的全体元素所组成的集合叫做 A 与 B 的交,记为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A 且 x\in B\}$$

例如,$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{6,3,2,1\}$,$A\cap B=\{1,2,3\}$,两个集合的交集显然具有下面性质

$$A\cap B\subseteq A \quad A\cap B\subseteq B$$

属于集合 A 或属于集合 B 的元素全体组成的集合,称为 A 与 B 的并,记为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A 或 x\in B\}$$

A 与 B 的并显然满足关系

$$A\subseteq B\cup A \quad B\subseteq B\cup A$$

集合 A 与集合 B 的和集是指如下的集合

$$\{a+b\mid a\in A,b\in B\}$$

常用记号 $A+B$ 来表示,于是有

$$A+B=\{a+b\mid a\in A,b\in B\}$$

应该指出,两个集合的和集概念不同于它们并集的概念,例如

$$\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2,3\}+\{2,3,4\}=\{3,4,5,6,7\}$$

某些数集(含 0,1),如果其中任意两个数的和、差、积、商(除数不为 0)仍在该数集中(即数集关于四则运算封闭),那么称该数集为数域。例如,实数集关于四则运算封闭,因此它形成一个数域,称其为实数域,记为 $\mathbf{R}$;同样,复数集也形成一个数域,称其为复数域,记为 $\mathbf{C}$;读者可以自行验证有理数集形成一个有理数域,记为 $\mathbf{Q}$。但奇数集不能成为数域,偶数集也不能成为数域。

1.1.2 映 射

设 X 与 Y 是两个集合。所谓集合 X 到集合 Y 的一个映射(或映照)是指一个法则(规则)

σ,σ 使 X 中每一个元素 x 都有 Y 中惟一确定的元素 y 与之对应,记为

$$\sigma:X \to Y \quad \sigma(x) = y \quad 或 \quad x \to y(=\sigma(x))$$

y 称为 x 在映射 σ 下的像,而 x 称为 y 在映射 σ 下的源像(像源)。

X 到 X 自身的映射,有时也称为 X 到自身的一个变换。这种特殊的映射,在矩阵论中,也是经常出现的,读者应予以注意。

例如,A 是数域 K① 上全体 n 阶方阵的集合,定义

$$\sigma_1(X) = \det X, X \in A$$

则有 $\sigma_1:A \to K$,即 σ_1 是 A 到 K 的一个映射;如果定义

$$\sigma_2(k) = k\boldsymbol{E}, k \in K$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,则有 $\sigma_2:K \to A$。

令 P_n 表示所有次数不超过 n 的实系数多项式集合,定义

$$\sigma(f(t)) = f'(t) \qquad f(t) \in P_n$$

σ 是 P_n 到 P_n 的一个映射(实为求导运算)。

设 σ 是 X 到 Y 的一个映射,若对 Y 中每个元 y,都有 X 中的元 x 与之对应,即 $\sigma(x)=y$,称 σ 是满映射。例如 σ_1,对任意的 K 中一个 k,显然选

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} k & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, 则 \det \boldsymbol{X} = k$$

故 σ_1 是 A 到 K 的一个满映射。

设 σ 是 X 到 Y 的一个映射,若对任意的 $x_1, x_2 \in X$,当 $x_1 \neq x_2$ 时,有 $\sigma(x_1) \neq \sigma(x_2)$,称 σ 是单映射。例如 σ_2,当 $k_1 \neq k_2$ 时,$k_1, k_2 \in K$,这时 $\sigma_2(k_1) = k_1E \neq k_2E = \sigma_2(k_2)$,故称 σ_2 是 K 到 A 的一个单映射。

若 σ 是既单又满的映射,称 σ 是一一映射。例如定义 $\sigma:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,对任意 $a \in \mathbf{R}$,$\sigma(a) = 2a+1$,这时若 $a_1 \neq a_2$,当然 $\sigma(a_1) = 2a_1 + 1 \neq 2a_2 + 1 = \sigma(a_2)$,并且对任意 $k \in \mathbf{R}$,存在 $a = \dfrac{k-1}{2} \in \mathbf{R}$,使 $\sigma(a) = k$。所以 σ 是一一映射。

设 σ_1 和 σ_2 都是集合 X 到 Y 的映射,如果对于每个元素 $x \in X$,都有 $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$,则称映射 σ_1 与 σ_2 相等,记为 $\sigma_1 = \sigma_2$。

设 σ 是 X 到 Y 的映射,τ 是 Y 到 Z 的映射,映射的乘积 $\tau\sigma$ 定义如下

$$(\tau\sigma)(x) = \tau[\sigma(x)], x \in X$$

此即相继施行映射 σ 和 τ 的结果,$\tau\sigma$ 是 X 到 Z 的映射。

设 $\sigma:X \to Y$, $\tau:Y \to Z$, $\mu:Z \to W$,则可以证明映射的乘积满足结合律,但不满足交换律,即分别有

$$(\mu\tau)\sigma = \mu(\tau\sigma)$$

$$\tau\sigma \neq \sigma\tau$$

① 数域 K 表示一般的数域。

1.2　线性空间定义及其性质

线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是学习矩阵论的重要基础。

定义 1.1　设 K 是一个数域，V 是一个非空集合，如果 V 满足以下条件：

1）在 V 中定义了一个加法运算，即给定一个法则，对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\beta}\in V$，通过此法则，都有惟一确定的 V 中元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 对应，元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 叫做 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}$（即 $\sigma:V\times V\to V$ 是映射）。

$$V\times V=\{(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\mid\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V\})$$

$(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\to\sigma(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\gamma}$

2）在 V 中定义了一个数乘运算，即给定一个法则，对任意的 $k\in K$，任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，通过此法则，都有惟一确定的 V 中元素 δ 与 k 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应，元素 δ 叫做 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘，记为 $\delta=k\odot\boldsymbol{\alpha}$（即 $\tau:K\times V\to V$ 是映射）。

$$(k\,\boldsymbol{\alpha})\to\tau(k\boldsymbol{\alpha})=\delta=k\odot\boldsymbol{\alpha}$$

3）加法和数乘满足以下 8 条性质

1°　交换律　$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}$；

2°　结合律　$(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})\oplus\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\oplus(\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\gamma})$；

3°　存在零元素 0 使　$\boldsymbol{\alpha}\oplus 0=\boldsymbol{\alpha}$；

4°　存在负元素，即对任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 存在元素 $\boldsymbol{\beta}$ 使 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=0$，$\boldsymbol{\beta}$ 叫 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元；

5°　分配律　$k\odot(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})=k\odot\boldsymbol{\alpha}\oplus k\odot\boldsymbol{\beta}$

6°　分配律　$(k+l)\odot\boldsymbol{\alpha}=k\odot\boldsymbol{\alpha}\oplus l\odot\boldsymbol{\alpha}$

7°　　　　$k\odot(l\odot\boldsymbol{\alpha})=(kl)\odot\boldsymbol{\alpha}$

8°　　　　$1\odot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V,k,l\in K$，称 V 为数域 K 上的线性空间，也叫向量空间，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 称为向量。

V 中定义的加法及数乘运算统称为 V 的线性运算。

例 1　$K^{1\times n}=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in K\}$ 关于向量的加法与数乘作成数域 K 上的线性空间。

例 2　$K^{m\times n}=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \vdots\quad\vdots\\ a_{m1}\cdots a_{mn}\end{bmatrix}\mid a_{ij}\in K\right\}$

关于矩阵的加法及数乘做成数域 K 上的线性空间。

例 3　$K[x]_n=\{$数域 K 上次数不超过 n 的多项式全体，零多项式$\}$ 关于多项式的加法及数乘做成数域 K 上的线性空间。

例 4　设 $\mathbf{R}_+$ 表示所有正实数集合，其加法和数乘各定义为

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta},\quad k\odot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^k$$

证明 $\mathbf{R}_+$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间。

证明　设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}_+,k\in\mathbf{R}$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}_+,\quad k\odot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^k\in\mathbf{R}_+$$

即 $\mathbf{R}_+$ 对定义的加法“$\oplus$”与数乘运算“$\odot$”是封闭的，且有

1° $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha\beta}=\boldsymbol{\beta\alpha}=\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}$

2° $(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})\oplus\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\alpha\beta})\oplus\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\oplus(\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\gamma})$

3° 1 是零元素 $\mathbf{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}\oplus 1=\boldsymbol{\alpha}1=\boldsymbol{\alpha}$

4° $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素是$\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{\alpha}\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}}=1$

5° $k\odot(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})=k\odot(\boldsymbol{\alpha\beta})=(\boldsymbol{\alpha\beta})^k=\boldsymbol{\alpha}^k\boldsymbol{\beta}^k=k\odot\boldsymbol{\alpha}\oplus k\odot\boldsymbol{\beta}$

6° $(k+l)\odot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{k+l}=\boldsymbol{\alpha}^k\boldsymbol{\alpha}^l=k\odot\boldsymbol{\alpha}\oplus l\odot\boldsymbol{\alpha}$

7° $k\odot(l\odot\boldsymbol{\alpha})=k\odot\boldsymbol{\alpha}^l=(\boldsymbol{\alpha}^l)^k=\boldsymbol{\alpha}^{kl}=(kl)\odot\boldsymbol{\alpha}$

8° $1\odot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^1=\boldsymbol{\alpha}$

成立，故 $\mathbf{R}_+$ 在上述定义的运算下成为 $\mathbf{R}$ 上的线性空间。

从以上例子看到，线性空间的概念是很抽象的，正因为抽象，它才代表广泛的含意，这源于集合元素具有广泛的含意，而加法、数乘也仅仅是称呼而已，与原来对数的加法，数乘的理解完全不同。

线性空间的概念是从现实世界中得到的，它以极度抽象的形式出现，在表面上掩盖了它们源于外部世界的实质。它是描述自然现象中某种量的关系的数学概念，只是由于在数学形式上与描述平常几何空间有很大类似，因此也叫它作“空间”，实际上“空间”已经推广了我们平常用语的含义了。

定理 1.2.1　线性空间 V 中的零元素 $\mathbf{0}$ 惟一，记为 $\mathbf{0}$；任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素惟一，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$。

证明　若 $\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 为线性空间 V 的零元素，考虑和

$$\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1\oplus\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2$$

这就证明了零元素的惟一性。

设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元，所以 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}_2$，从而有

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_1\oplus\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}_1\oplus(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\beta}_1\oplus\boldsymbol{\alpha})\oplus\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}\oplus\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_2$$

这就证明了负元素的惟一性。

利用负元素，定义 V 中的减法如下

$$\boldsymbol{\alpha}\ominus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\oplus(-\boldsymbol{\beta})$$

命题 1　$k\odot\mathbf{0}=\mathbf{0}$，$0\odot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，$(-1)\odot\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$

证明　因为　$k\odot\boldsymbol{\beta}\oplus k\odot\mathbf{0}=k\odot(\boldsymbol{\beta}\oplus\mathbf{0})=k\odot\boldsymbol{\beta}$

由于零元的惟一性，所以　$k\odot\mathbf{0}=\mathbf{0}$。

因为 $k\odot\boldsymbol{\alpha}\oplus 0\odot\boldsymbol{\alpha}=(k+0)\odot\boldsymbol{\alpha}=k\odot\boldsymbol{\alpha}$

由于零元的惟一性，所以　$0\odot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$。

因为 $\boldsymbol{\alpha}\oplus(-1)\odot\boldsymbol{\alpha}=1\odot\boldsymbol{\alpha}\oplus(-1)\odot\boldsymbol{\alpha}=(1-1)\odot\boldsymbol{\alpha}=0\odot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

由于负元的惟一性，所以 $(-1)\odot\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$

命题 2　若 $k\odot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则必有 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$。

证明　若 $k\odot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，且 $k=0$，则结论已经成立；若 $k\neq 0$，则$\frac{1}{k}\odot(k\odot\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{k}\odot\mathbf{0}=\mathbf{0}$，也即$\frac{1}{k}\odot(k\odot\boldsymbol{\alpha})=(\frac{1}{k}k)\odot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

于是，由上述，可得符号法则

$$-(-\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha},\ -(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}) = (-\boldsymbol{\alpha})\oplus(-\boldsymbol{\beta})$$
$$(-k)\odot\boldsymbol{\alpha} = -k\odot\boldsymbol{\alpha},\ (-k)\odot(-\boldsymbol{\alpha}) = k\odot\boldsymbol{\alpha}$$

1.3　线性空间的基与坐标

在不至引起混淆的前提下，$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}$ 简记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$k\odot\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$。

定义 1.2　设 V 是数域 K 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in V$，若存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{0}$$

成立，称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，否则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关。

例如，$\boldsymbol{\alpha}=(a_1\quad a_2\quad a_3)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(2a_1\quad 2a_2\quad 2a_3)$ 就是 $K^{1\times 3}$ 上的两个线性相关的向量；$\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}4&4\\8&8\end{bmatrix}$ 也是 $K^{2\times 2}$ 上的线性相关的两个向量；$1,x,x^2$ 是 $K[x]_2$ 中三个线性无关的向量，因为若 $k_1 1+k_2x+k_3x^2=0$，只有 $k_1=k_2=k_3=0$ 才成立。

定义 1.3　设 V 是数域 K 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 1)$ 是 V 中任意 n 个向量，如果它满足

①$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

②V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示。

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一个基（或基底），并称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为基向量，且称 V 是 n 维向量空间（线性空间）。

由定义可见，基不过是线性空间 V 中的极大线性无关组而已；而线性空间的维数就是其基中所含向量的个数罢了！

例 1　K^n 中的元素 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1\quad 0\quad\cdots\quad 0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0\quad\cdots\quad 0\quad 1)^T$ 就是基，K^n 是 n 维。

例 2　$K^{m\times n}$ 中的元素 $\boldsymbol{E}_{ij}$（i 行 j 列处元素为 1，其余全是零的矩阵）$i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$，是一基，$K^{m\times n}$ 是 mn 维。

例 3　$K[x]$ 是无穷维空间，因为对任何正整数 n，$1,x,x^2,\cdots,x^n$ 都是线性无关的。

例 4　$K[x]_n$ 中的 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 是一个基，维数为 $n+1$。

例 5　1.2 节例 5 中的线性空间 $\mathbf{R}_+$，任意选 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}_+$，$\boldsymbol{\alpha}\neq 1$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的。另选 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\neq 1$，设

$$k_1\cdot\boldsymbol{\alpha} + k_2\cdot\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}^{k_1}\boldsymbol{\beta}^{k_2} = 1$$

两边取对数　$k_1=\dfrac{\ln\boldsymbol{\beta}}{\ln\boldsymbol{\alpha}}k_2$

所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是线性相关的，故可选 2 作 $\mathbf{R}_+$ 的基，对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}_+$

$$\boldsymbol{\alpha} = \log_2\boldsymbol{\alpha}\cdot 2$$

因此 $\mathbf{R}_+$ 是 1 维的。

需要指出，一个线性空间的基是不惟一的。

定理 1.3.1　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一个基底，对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以惟一

表示为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的线性组合。

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$

若还有 $\boldsymbol{\alpha}=k_1'\boldsymbol{\alpha}_1+k_2'\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n'\boldsymbol{\alpha}_n$

这两式相减,得

$$(k_1-k_1')\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-k_2')\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_n-k_n')\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,所以$k_1=k_1',\cdots,k_n=k_n'$。

定义 1.4 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$n$维线性空间$V$的一个基底,对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$,若$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$,称$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$是$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$之下的坐标。

注意,就是同一个向量$\boldsymbol{\alpha}$在不同基下的坐标一般是不相同的,例如$\boldsymbol{\alpha}=(4\ \ 3)=4(1\ \ 0)+3(0\ \ 1)=(1\ \ 0)+3(1\ \ 1)$,$(1\ \ 0)$,$(0\ \ 1)$与$(1\ \ 0)$,$(1\ \ 1)$都可以作$K^2$的基底,那么$\boldsymbol{\alpha}$在$(1\ \ 0)$,$(0\ \ 1)$之下的坐标是$(4\ \ 3)$,而在$(1\ \ 0)$,$(1\ \ 1)$之下的坐标是$(1\ \ 3)$。

例 6 可以验证复数域$\mathbf{C}$是自身上的关于数的加法、乘法作成的线性空间,且维数$=1$,因为$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C},\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\cdot 1$。复数域$\mathbf{C}$也可以看成实数域上的线性空间,且维数$=2$,因为$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C}$,$\boldsymbol{\alpha}=a+b\mathrm{i}$,$a,b$是实数。复数域$\mathbf{C}$也可看成有理数域$\mathbf{Q}$上的线性空间,此时$\mathbf{C}$是无穷维的,因为$1,\pi,\pi^2,\cdots,\pi^n,\cdots$是线性无关的。

此例说明,作为一个集合V,它形成一个线性空间时的维数与它所在的数域是紧密相关的。

1.4 基变换与坐标变换

1.4.1 基变换公式

在n维线性空间V中,任意n个线性无关的向量都可以作它的基。对不同的基,同一个向量的坐标一般是不同的。现在讨论当基改变时,向量的坐标如何变化?先介绍由V的一基底改变成另一基底的过渡矩阵的概念。

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一旧基,$\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n'$是$V$的一新基,则由基定义,可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1'&=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2'&=c_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n'&=c_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{aligned}$$

或者写成(形式上)

$$(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n')=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}^{①}\tag{1.1}$$

① 这里矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$的元素是向量,矩阵$C$的元素是数,这种不同类型的矩阵间的运算,称为矩阵的形式运算,一般无意义。不过在特殊情况下,可使这种约定的算法不会出问题。