数学竞赛培训教程

周春荔、周沛耕、周国镇、孔令颐、何裕新 编著

高等教育出版社

高中册

数学竞赛培训教程

高 中 册

周春荔 周沛耕 周国镇 孔令颐 何裕新 编著

高等教育出版社

一九九〇年

内 容 简 介

本书由三部分组成：1.专题培训；2.综合习题；3.模拟试题.包含了参加省市级的、全国的高中数学竞赛及参加国际数学竞赛选拔赛培训所必备的知识、方法与技巧。可供准备参加数学竞赛的高中生和教练员作为教材使用，也可供爱好数学的高中生阅读.

数学竞赛培训教程

高 中 册

周春荔 周沛耕 周国镇 孔令颐 何裕新 编著

•

高等教育出版社出版发行

北京顺义牛栏山一中印刷厂印刷

•

开本850×1168 1/32 印张 18.125 字数 470,000

1990年3月第1版 1990年3月第1次印刷

印数 2,001—5,000

ISBN7-04-002719-4/O·867

定价6.85元

前　言

近五年来，我国中学生数学竞赛活动进入了一个新的阶段，从小学到高中各年级、各种层次的数学竞赛广泛开展。省市一级及全国范围的大型数学竞赛已初步形成与教学同步。有计划的系列，数学第二课堂的活动方兴未艾，各种层次、多种风格的辅导讲座材料相继问世。为了培训选手的需要，继北京数学奥林匹克学校于1985年6月创办以来，全国各地兴办的数学奥林匹克学校如雨后春笋，标志着我国对数学奥林匹克选手的培训找到了一种基本稳定的形式。1985年我国首次派观察小组（其中包括两名队员）参加了第26届国际数学奥林匹克（简称IMO），我国的中学生数学选手开始步入IMO的殿堂。仅仅五年，我国选手从跻身总分第八名到跃居总分第二名，并于1989年第30届IMO上荣获了四块金牌、两块银牌，夺得总分第一。充分证实了华罗庚先生生前讲过的一句名言："数学是我国人民擅长的学科"。现在，第31届IMO将于1990年夏天在北京举行，全国各地的数学选手和教练员都期待着在第31届IMO大赛上为祖国争取更大的荣誉。

为了迎接第31届IMO，应该对我们以往的培训工作做必要地回顾与总结。发扬成绩，改进工作，以利再战。我们认为，对有特殊才能的苗子需要特殊的培训。进行特殊培训就需要专门的教材，才能使培训工作有计划地系统进行，推动数学奥林匹克活动向更高层次发展。我们开展数学奥林匹克活动的目的，是为提高广大青少年的数学思维素质，同时也为各门学科发现、培养和输送拔尖的人才。这种人材的发现与培养，应从小抓起，使小学、初中到高中有机地配套成为一项系统工程。正是为了这一目的，我们应高等教育出版社之邀，合作编写了这套《数学竞赛培训教程》。这套教程共分小学分册、初中分册和高中分册。本书是其中的高中分册。

本人作为这个分册的主编，受另外四位作者之托，在此向读者简单介绍一下本书的构想和使用方法，以求得尽可能好的阅读使用效果。

本书所介绍的是“奥林匹克数学”的内容。“奥林匹克数学”是随着数学竞赛的发展而兴起的一种特殊的数学领域，其内容除各国中学数学的共同基础部分之外，还涉及整数论、组合论、一般几何学、不等式等方面。问题的难度不在于了解和解决试题所需要的数学知识的多少，而在于对数学本质的洞察力及是否具有创造力和数学的机智，奥林匹克数学不是大学里的高等数学，因为其内容并未超出中学或中学生所能接受的范围。奥林匹克数学也不同于中学数学，因为它有许多高等数学的背景，采用了许多高等数学中的思想方法。“奥林匹克数学”这一特殊的领域日益引起大家的研究和关注，本书的内容正是对“奥林匹克数学”的一种探索。

本书是为准备参加高中各级别的数学竞赛的同学和教练员编写的，书中已经包容了足够的知识 方法，技能和训练题目。对于指导自己的学生作参加竞赛准备的教练与指导教师，本书将成为您的得力助手和顾问。

本书包括三个部分。

Ⅰ 专题培训。共有二十个专题，每个专题都较详细地介绍了基本知识、分析了典型例题、配备了相当数量的习题并给了提示和答案，这是全书的主体，应该仔细研读。其中各专题相对独立，可以不按标题顺序，先从自己感兴趣的或需要的专题入手。由于《教程》三个分册是系统配套的，有的知识比如“抽屉原则”在初中册已经较详细的介绍过，高中分册就不再重复了。如需用可查阅初中分册的有关内容。

Ⅱ 综合训练。这部分编入了一百个难度较大并且综合性强的题目，所有题目都附有详细解答，这是本书的提高部分．我们相信，这些题目对读者提高解题能力是有益的。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

Ⅱ 模拟试题。这部分共包括十组模拟赛题，是本书的实战演习部分。学习这一部分要象正式参赛一样，用2—3小时独立完成一组，并对照答案自我检查。通过这样的练习测试自己的实际水平和提高参赛的心理素质。

数学是锻炼思维的体操。使用本教程的读者要认真读书，刻苦研习，不但要学知识，而且要学习体会数学的思想方法。经过自己努力而悟得的妙解，是一种数学美的精神享受。你会从中受到鼓舞，得到信心和力量，这是比做题本身更重要的收获。

本书是五位作者分工协作的产物，由于编写时间仓促，书中失当之处，作者们愿意与广大读者互相切磋，以期提高本书的质量，提高我们的水平，为探索数学奥林匹克的培训规律共同努力。

高等教育出版社的副编审张月娥老师积极组织了本书的编写与审阅的工作，高尚华副编审进行了认真地编辑加工，该社的吴文信同志精心绘制了本书的插图。中国人民大学附中的杨志清老师为本书设计了别致、新颖。寓意深长的封面。本书的五位作者向以上同志表示诚挚的感谢。

周春荔

1989年12月于北京师院

数学竞赛培训教程

高 中 册

目 录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

I 专题培训

§1 集合

1. 基本知识

(1) 集合间运算的主要性质

设A，B，C，…为给定的集合，I表示在考虑一个问题时的全集，$\varnothing$为空集，$\overline{A}$为A的补集，则有

$A\subseteq A$，$A\subseteq I$，$\varnothing\subseteq A$；

若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$；

$A\cup A=A$，$A\cup I=I$，$A\cup\varnothing=A$，$A\subseteq A\cup B$，$A\cup B=B\cup A$；

$A\cap A=A$，$A\cap I=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B=B\cap A$；

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$\overline{\overline{A}}=A$；

$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n$；

$\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n$．

(2) 四组等价关系

$A\subseteq B$ 且$B\subseteq A\Longleftrightarrow A=B$；

$A\cap B=A\Longleftrightarrow A\subseteq B$；

$A\subseteq B\Longleftrightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}$；

$A\cap\overline{B}=\varnothing\Longleftrightarrow A\subseteq B$．

(3) 有限集合的元素数目关系

这里用$n(A)$表示集合A中元素数目，$n(A)$是个非负整

数．若$A\neq\varnothing$，则$n(A)\in N$．计算有限集合元素数目时常用到下列关系：

$n(A)+n(\overline{A})=n(I)$；

$n(A\cup B)\leqslant n(A)+n(B)$，当且仅当$A\cap B=\varnothing$时取等号；

$n(A\cap B)\leqslant\min\{n(A),\ n(B)\}$；

$n(A\cup B)=n(B)+n(A\cap\overline{B})$；

若$A\subseteq B$，则$n(A)\leqslant n(B)$；

$n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n)=[n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)+\cdots+n(A_n)]-[n(A_1\cap A_2)+n(A_1\cap A_3)+\cdots+n(A_1\cap A_n)+\cdots+n(A_{n-1}\cap A_n)]+[n(A_1\cap A_2\cap A_3)+\cdots+n(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)]-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n)$.

特别地，当$n=2$，就是$n(A_1\cup A_2)=n(A_1)+n(A_2)-n(A_1\cap A_2)$.

（4）n阶集合的全部子集数目

含有n个元素的集合叫n阶集合．n阶集合的全部子集（包括该集合本身以及$\varnothing$）共有2^n个（这里n是个自然数），这是由恒等式

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$$

给出的结果．

（5）以n阶集合的子集（或子集的一部分）为元素的集合（常称为集合的子集类）的概念和两个常用子集类（R类和K类）及其性质

设$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots a_n\}$是给定的$n$阶集合，用大写花体字母$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}\cdots$表示$A$的子集类．

① $\mathscr{A}=\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k\}$是集合$A$的$k$阶子集类，具有性质如下：对某个$2\leqslant r\leqslant k-1$，有

(i)　$A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cdots\cap A_{i_r}\neq\varnothing$，其中$1\leqslant i_1<i_2<\cdots$

$<i_r \leqslant k$；

(ii) $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots\cdots \cap A_{i_r} \cap A_{i_{r+1}} = \varnothing$，其中$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r < i_{r+1} \leqslant k$，则称$\mathscr{A}$是$A$的一个指数为$r$的"$R$类".

也就是说，指数为r的R类中每r个（A的）子集都相交，但每$r+1$个子集的交集是空集.

上述定义下的A的一个指数为r的R类具有下面的重要性质：

指数为r的k阶R类中每个元素（它是A的子集）的阶数不少于C_k^{r-1}；进一步地，对集合A而言，能形成指数为r的k阶R类的必要条件是$C_k^r \leqslant n$.

② A的一个k阶子集类$\mathscr{A}$如具有性质：$\mathscr{A}$中任何两个元素（它们都是A的子集）A_i，A_j都有$A_i \not\subset A_j$，且$A_j \not\subset A_i$，则称$\mathscr{A}$是一个"K类".

关于K类，有重要性质：n阶集合A的K类中，阶数最高为$C_n^{[\frac{n}{2}]}$阶.

2．例题

例1 对集合{1，2，…，n}及其每一个非空子集，定义一个唯一确定的"交替和"如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始交替地减或加后继的数所得的结果．例如，集合{1，2，4，6，9}的"交替和"是$9-6+4-2+1=6$，{5，6}的"交替和"是$6-5=1$，{2}的"交替和"是2等．对于$n=7$，求所有"交替和"的总和

分析：$n=7$时，集合{1，2，…，7}的非空子集有2^7-1个．虽然子集数目有限，但是逐一计算各自的"交替和"再相加，运算量十分大．根据"交替和"的定义，容易看到：

集合{1，2，3，4，5，6，7}与{1，2，3，4，5，6}的"交替和"之和是7；

集合{1，2，3，7}与{1，2，3}的"交替和"之和是7；

………

可见，除集合{7}之外，我们把其他的非空子集两两结组算出它们"交替和"之和．结组原则是：如果一个子集合中有元素7，就与这个子集合中去掉7的那个新的子集合结成一组．这样，问题就归结为{1，2，3，4，5，6}的非空子集个数的问题．

解：集合{1，2，3，4，5，6，7}的子集中，除去{7}外，还有2^7-2个非空子集合．把这2^7-2个非空子集两两结组后分别计算每一组中"交替和"之和，结组原则是：设$A_i=\{7, a_1, a_2, \cdots\}$，$A_i'=A_i-\{7\}$，这时，把$A_i$与$A_i'$结为一组（这里$a_1, a_2, \cdots \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$）．

显然每一组中"交替和"之和是7．

这样的组数为$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6-1$（组），再加上集合{7}的"交替和"7，最后得到所求的和是

$7\cdot(2^6-1)+7=7\cdot2^6=448$．

说明：一般地，集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有子集上的"交替和"之和是$n\cdot2^{n-1}$．

例2 一个数集的"和"定义为这个集合中所有元素的和．设集合S是由不大于15的正整数构成的集合，假如S的任意两个不相交的子集有不同的"和"，具有这样性质的集合S的"和"的最大值是多少？

分析：S的元素数不会太多．例如当$S=\{1, 2, \cdots, 15\}$时，显然有$1+15=2+14$，即{1，15}，{2，14}的"和"相等，与已知条件矛盾．可见，具有最大"和"的S中含的元素应小于15．

如果S中元素数是6．它的不超4个元素的子集数目有

$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56$个．但是这样的子集中元素"和"的最大值是$15+14+13+12=54$．由抽屉原则知：至少有两个这样的

子集，它们的“和”相等．设这两个集合是A_i，A_j．则$A_i-(A_i\cap A_j)$与$A_j-(A_i\cap A_j)$也有相等的“和”，这与已知矛盾．可见，S不能含有6个或6个以上元素．

容易验证：$C_5^1+C_5^2+\cdots+C_5^r>15+14+\cdots+(15-r+1)$ $(1\leqslant r\leqslant 5)$无解，可见，$S$可能含有5个元素．

考虑$\{15, 14, 13, 12, 11\}$，其中$15+11=14+12$，又有$15+12=14+13$．可见，S中不能有四个相邻的数．

考虑$\{15, 14, 13, 11, 10\}$，又有$14+10=13+11$；

考虑$\{15, 14, 13, 11, 9\}$，又有$15+9=13+11$；

考虑$\{15, 14, 13, 11, 8\}$，容易验证这个集合符合题目要求，且是“和”最大的集合．这个和是$15+14+13+11+8=61$．

例3 设$A=\{1, 2, \cdots, 2n\}$，证明：A的任意$n+1$阶子集中，存在两个数（这两个数是同一个$n+1$阶子集中的两个元素），一个可被另一个整除．

证明：前$2n$个自然数中，共有n个奇数：$1, 3\cdots, 2n-1$．根据自然数的一种有用的表达形式：$n=(2k-1)\cdot 2^l$ ($k\in N$，l为非负整数)考查A的下列n个子集：

$A_1=\{1, 1\times 2, 1\times 2^2, 1\times 2^3, \cdots\}$，

$A_2=\{3, 3\times 2, 3\times 2^2, 3\times 2^3, \cdots\}$，

………

$A_n=\{2n-1\}$．

容易看到：

$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，且$A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i, j=1, 2, \cdots, n, i\neq j)$．

考虑A中任意$n+1$个元素，根据抽屉原则知，至少有两个元素是上述n个子集合中同一个集合中的元素．这两个数中，必有一个可被另一个整除．

说明：把一个集合分成若干个两两不交的子集的并集也叫分

子集的"直和". 这种分子集的方法是集合划分的一种常用方法.

例4 某班期末对数学、物理、化学三科总评成绩统计如下：数学总评有21人优秀，物理总评有19人优秀，化学总评有20人优秀，如果把数学和物理两科的统计表放在一起来看，数学和物理都优秀的有9人，同样，物理和化学都优秀的有7人，化学和数学都优秀的有8人. 试确定全班人数以及仅数学，仅物理，仅化学单科优秀的人数范围（这个班有5名学生没有任一科是优秀）.

分析：设$A=\{$数学总评优秀的学生$\}$,

$B=\{$物理总评优秀的学生$\}$,

$C=\{$化学总评优秀的学生$\}$,

则已知是 $n(A)=21$，$n(B)=19$，$n(C)=20$，$n(A\cap B)=9$，$n(B\cap C)=7$，$n(C\cap A)=8$.

$$\because n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C),$$

$$\therefore n(A\cup B\cup C)=21+19+20-9-7-8+n(A\cap B\cap C).$$

即

$$n(A\cup B\cup C)-n(A\cap B\cap C)=36.$$

这里，$n(A\cup B\cup C)$ 是数、理、化中至少一门是优秀的人数，$n(A\cap B\cap C)$ 是这三科全优秀的人数. 可见，估计$n(A\cup B\cup C)$的范围的问题与估计$n(A\cap B\cap C)$的范围有密切联系.

注意到$n(A\cap B\cap C)\leqslant\min\{n(A\cap B),n(B\cap C),n(C\cap A)\}=7$，可知 $0\leqslant n(A\cap B\cap C)\leqslant 7$. 因而得出

$$36\leqslant n(A\cup B\cup C)\leqslant 43.$$

又因为 $n(A\cup B\cup C)+n(\overline{A\cup B\cup C})=n(I)$，其中 $n(\overline{A\cup B\cup C})=5$，所以 $41\leqslant n(I)\leqslant 48$，这表明全班人数在41至48人之间.

仅数学优秀的人数是$n(A\cap\overline{B\cup C})$. 根据公式知

$$n(A\cap\overline{B\cup C})=n(A\cup B\cup C)-n(B\cup C)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com