

中学生数学 学习手册

ZHONGXUESHENG SHUXUE XUEXI SHOUC

鲁鹤鸣

周成熙

许纪传等编

ZHONGXUESHENG SHUXUE XUEXI SHOUC

上海科学普及出版社

中学生数学学习手册

青鹤鸣 周成熙 许纪传 等编

上海科学普及出版社

(沪)新登字第 305 号

责任编辑 顾蕙兰 胡名正

中学生数学学习手册

鲁鹤鸣 周成熙 许纪传 等编

上海科学普及出版社出版

(上海曹杨路 500 号 邮政编码 200063)

新华书店上海发行所发行 常熟文化印刷厂印刷

开本 850×1168 1/64 印张 12.625 字数 650000

1993 年 10 月第 1 版 1996 年 6 月第 4 次印刷

印数 27501—33800

ISBN 7-5427-0719-1/G·192

定价: 12.00 元

说 明

根据“实用、创新”的指导原则，编者向自己提出了一个追求的目标：手册要根据国家教委公布的教学大纲，覆盖中学数学的所有知识点，覆盖中学数学教学中的所有技能点。简言之，“两个覆盖”。

第一个覆盖，包括初中代数、平面几何、高中代数、平面三角、立体几何、解析几何的全部知识点。

第二个覆盖，是编者对国家教委公布的中学数学教学大纲的学习和研究以及几十年的教学实践而列出的“技能点”。如果说“创新”的话，这第二个“覆盖”是一个创新。

读者在学习、使用本手册时不仅可以从整体上把握住中学数学的所有知识点，而且能把握住所有“技能点”。这对于提高中学数学的教学质量都是至关重要的。

根据以上编写原则，本手册的每个条目下有各类别的例题，有详尽的分析、解答，而且还配有与知识点、技能点相应的适应中学各级考试以及高等学校升学考试的各种类型的习题。为了方便，每一条目的习题后面都附有答案（本书中的选择题，凡不加说明的，均只有一个正确答案）。

本手册适用于每一个进入中学学习的学生。可以陪伴他六年的中学数学学习。对进入初中、高中复习迎考的学生而言，本手册也是一本复习用书。使用后会对中学数学章章节节的知识点、解题技能心中有数。

对刚从事中学数学教学的青年教师，本手册可谓是一本备课手册，可以帮助自己更快提高教学水平。当然也适用于每一个自学的读者。

有些加深、拓宽的内容,习题是为中学数学爱好者服务。

因为本手册的条目详尽,可作为各类图书馆、资料室的备置工具书。

本手册是由中学高级教师鲁鹤鸣、周成熙、许纪传分章编写,陈芳菲、戴时超、肖锋、三棣、陈瑶琴、周权、夏荫、毓英、王美珍、鲁瑜、袁彩娥姚余等同志也参加了编写工作。由鲁鹤鸣统稿完成。

尽管编者对每一章节的内容和习题已仔细斟酌,但肯定还有不妥之处。请读者给予指正使日后更趋完善。

编 者
1993年3月

目 录

第一篇 代 数	1
§1 实数	1
§2 实数的性质与运算	7
§3 比例式	16
§4 代数式	19
§5 指数式与对数式	58
§6 方程和它的同解原理	77
§7 一次方程	79
§8 二次方程	88
§9 一元高次方程	100
§10 分式方程和无理方程	107
§11 集合、映射与函数概念	121
§12 函数	141
§13 常用的几种初等函数	158
§14 不等式	187
§15 解不等式	192
§16 不等式证明	218
§17 数列	232
§18 数列求和	254
§19 数列的极限	262
§20 复数	267
§21 复数的运算	278
§22 复数与方程	291
§23 数学归纳法	294

§24	排列、组合	301
§25	概率	315
§26	二项式定理	322
§27	二项式定理的初步应用	328
第二篇	平面三角	331
§1	三角函数	331
§2	三角变换	352
§3	反三角函数和简单三角方程	386
§4	解三角形	431
第三篇	平面几何	463
§1	基本知识	463
§2	三角形	487
§3	多边形	515
§4	相似形	540
§5	圆	563
第四篇	立体几何	594
§1	平面	594
§2	直线与直线	598
§3	直线与平面	603
§4	平面与平面	609
§5	多面体	617
§6	旋转体	643
第五篇	平面解析几何	684
§1	基本知识	684
§2	直线	699
§3	圆锥曲线	713
§4	坐标变换	759
§5	参数方程	771
§6	极坐标	787

第一篇 代 数

§1 实 数

一、实数及其分类

(一) 有关的一些概念

1. 正数与负数 为表示具有相反意义的量,我们规定其中一种意义的量为正(表示方法是在算术数前加“+”号),另一种与它意义相反的量_{为负}(表示方法是在算术数前加“-”号)。带有正号“+”的数叫做正数(通常,正号省略不写),带有负号“-”的数叫做负数。

2. 数轴 规定了原点、正方向和单位长度的直线,叫做数轴。

3. 倒数 1 除以一个数的商,叫做这个数的倒数。零没有倒数。

4. 相反数 数轴上在原点的两旁,离开原点的长度相等的两个点所表示的两个实数,叫做互为相反数。实数 a 和 $-a(a \neq 0)$ 是互为相反数。零的相反数是零。

5. 绝对值 在数轴上表示一个数的点离开原点的长度,叫做这个数的绝对值。

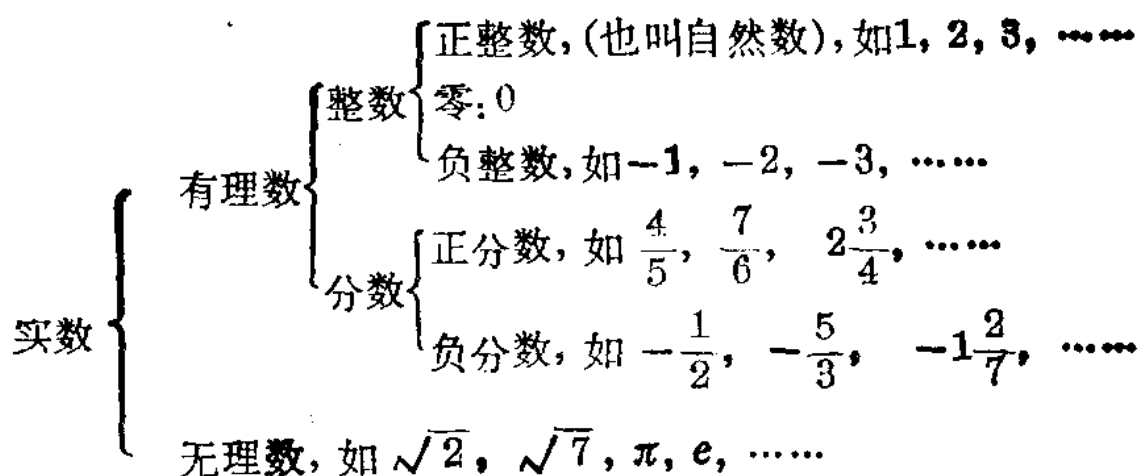
一个正数的绝对值是它本身;一个负数的绝对值是它的相反数;零的绝对值是零。

(二) 分类

整数和分数统称为有理数。任何一个有理数都可表示成 $\frac{m}{n}$ (m 、 n 为互质的整数,且 $n \neq 0$) 的形式。

无限不循环小数叫做无理数。任何无理数都不能表示成分数 $\frac{m}{n}$ (m, n 为互质的整数, 且 $n \neq 0$) 的形式。

有理数和无理数统称为实数。实数的分类如下:



实数与数轴上的所有点之间是一一对应的, 即任何一个实数都可用数轴上的一个点来表示; 反之, 数轴上的每一点又都可表示一个实数。

(三) 有关整数的几点说明

1. 有最小的正整数 1, 但没有最大的正整数; 有最大的负整数 -1, 但没有最小的负整数; “0”既不是正数, 也不是负数。

2. 偶数与奇数 一切能被 2 整除的整数, 叫做偶数, 一切不能被 2 整除的整数, 叫做奇数。通常, 偶数用 $2n$ 表示, 奇数用 $2n-1$ (或 $2n+1$) 表示, 其中 n 取整数。

3. 质数与合数 在自然数中, 除了 1 和它本身以外, 没有其他的约数, 这个数叫做质数 (也就是素数), 否则就是合数。“1”既不是质数, 也不是合数; 偶数中, “2”是唯一的质数。因为自然数的个数是无限的, 所以质数和合数的个数也是无限的。

4. 公约数与公倍数 若正整数 p 是正整数 $a, b, \dots$ 的共同的约数, 则称 p 是它们的公约数, 其中最大的一个公约数, 叫做这几个数的

最大公约数。

若正整数 r 是正整数 $a, b, \dots$ 的共同的倍数, 则称 r 是这几个数的公倍数, 其中最小的一个, 叫做这几个数的最小公倍数。

5. 被 2、3、4、5... 等数整除的整数的特征 分别被 2、4、8 整除的数的特征是: 这个整数的末位数、末两位数、末三位数分别能被 2、4、8 整除; 分别被 3、9 整除的数的特征是: 这个整数的各位数字之和分别能被 3、9 整除; 被 5 整除的数的特征是: 这个整数的个位数字是 5 或 0; 分别被 7、11、13 整除的数的特征是: 将这个整数分成两部分, 一部分是它的末三位数, 其余为另一部分, 则这两部分的差分别能被 7、11、13 整除, 若差仍然较大, 可进行第二次。例如数 93121, $\because 121 - 93 = 28$, 而 28 能被 7 整除, $\therefore 93121$ 能被 7 整除。又如数 98366235, $\because 98366 - 235 = 98131$, $131 - 98 = 33$, 而 33 能被 11 整除, $\therefore 98366235$ 能被 11 整除。

(四) 有关小数的几点说明

1. 小数的分类

小数 $\begin{cases} \text{有限小数, 如 } 0.3, 1.72, \dots \\ \text{无限小数} \begin{cases} \text{无限循环小数, 如 } 0.\dot{4}2\dot{3}, 2.1\dot{7}\dot{6}, \dots \\ \text{无限不循环小数, 如 } \pi, e, \dots \end{cases} \end{cases}$

$0.\dot{4}2\dot{3} = 0.423423423\dots$ 是一个纯循环小数(小数点后第一位就开始循环的小数叫做纯循环小数), 423 叫做一个循环节。 $2.1\dot{7}\dot{6} = 2.1767676\dots$ 是一个混循环小数(小数点后第二位或第二位后的某一位开始循环的小数叫混循环小数), 76 就是一个循环节。

2. 有限小数与无限循环小数都是分数, 因此是有理数, 而无限不循环小数则是无理数。因此, “小数都是有理数”的说法是错误的。

3. 有限小数可以化成分母是 10^n 的分数, 如

$$0.3 = \frac{3}{10}, \quad 1.72 = 1\frac{72}{100} = 1\frac{18}{25}.$$

而无限循环小数可以化成分母是 $99\cdots 9$ 或 $99\cdots 90\cdots 0$ 的分数, 如纯循环小数

$$0.\dot{4}2\dot{3} = \frac{423}{999} = \frac{47}{111},$$

混循环小数

$$2.1\dot{7}\dot{6} = 2\frac{176-1}{990} = 2\frac{175}{990} = 2\frac{35}{198}.$$

(五) 非负数

实数的绝对值、实数的偶次方以及非负数的偶次算术根都是非负数, 于是有

$$\sqrt[2n]{x^{2n}} = |a| = \begin{cases} a, & (a \geq 0) \\ -a, & (a < 0), \end{cases} \quad (n \text{ 为自然数}).$$

非负数的主要性质:

1. 有限个非负数的和仍是一个非负数;
2. 若有限个非负数的和等于零, 则每个非负数都等于零。

理解

1. 判断题(正确的打√, 错误的打×):

- (1) 若 a 为实数, 则 $-a$ 一定是负数。 ()
- (2) 数轴上的每个点都表示一个有理数。 ()
- (3) 任何一个非零整数的倒数都小于它本身。 ()
- (4) 符号相反的两个数叫做互为相反数。 ()
- (5) 一个数的绝对值若等于它本身, 则这个数一定是正数。 ()
- (6) 绝对值最小的实数是零。 ()

(7) 正数、负数和零统称为实数。 ()

(8) -3 是一个奇数, 也是一个质数。 ()

(答案: $\times$. $\times$. $\times$. $\times$. $\times$. $\checkmark$. $\checkmark$. $\times$.)

2. 选择题:

(1) 在“ $3\frac{1}{2}$, 1.4142 , π , 0 , $\frac{22}{7}$, $\sin 45^\circ$, $\lg 0.1$ ”这七个数中, 无理数的个数是 ().

(A) 2 个; (B) 3 个; (C) 4 个; (D) 5 个.

(2) 数“零”是最小的 ().

(A) 自然数; (B) 非负实数;

(C) 整数; (D) 实数.

(3) 下列结论中, 正确的一个是 ().

(A) 如 a 为任意实数, 则 $-a + |a| \geq 0$;

(B) 如 a 为任意实数, 则 a 的倒数是 $\frac{1}{a}$;

(C) 如 a 为任意实数, 则 $10|a| > 9|a|$;

(D) 如实数 a, b 满足 $|a| = |b|$, 则恒有 $a = b$.

(4) 下列式子中, 正确的一个是 ().

(A) $|+5| = \pm 5$; (B) $|\pm 5| = \pm 5$;

(C) $|-5| = -(-5)$; (D) $-|-5| = 5$.

(答案: B. B. A. C.)

3. 填空题:

(1) -5 的倒数的相反数是_____; $3-2\sqrt{2}$ 的相反数是_____, 倒数是_____.

(2) 一个数和它的相反数相等, 这个数是_____; 一个数和它的倒数相等, 这个数是_____; 一个数和它的绝对值互为相反数, 这个数是_____.

(3) 将下列小数化为分数:

$$2.84 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad 0.\dot{2}\dot{7} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$4.0\dot{8}\dot{4} = \underline{\hspace{2cm}}; \quad 1.58\dot{3}\dot{7} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(答案: (1) $\frac{1}{5}$; $2\sqrt{2}-3$; $3+2\sqrt{2}$. (2) 0; ± 1 ; 任何非正实数. (3) $2\frac{21}{25}$; $\frac{3}{11}$; $4\frac{14}{165}$; $1\frac{324}{555}$.)

4. 判断题(正确的打 $\checkmark$, 错误的打 $\times$):

- (1) 任何一个实数的绝对值都不是负数. ()
- (2) 非负数中没有最大的数. ()
- (3) 实数的奇次方是一个非负数. ()

(答案: $\checkmark$. $\checkmark$. $\times$.)

5. 选择题:

- (1) 若 m 为实数, 则 $|m|-m$ 一定是一个 ().
- (A) 正数; (B) 负数; (C) 零; (D) 非负数.
- (2) 如 a 为实数, 则下列各式中恒大于零的是 ().
- (A) $(a+1)^2$; (B) a^2+1 ; (C) $\sqrt{a+1}$; (D) $|a+1|$.

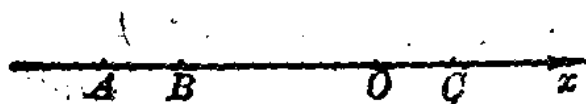
(答案: D. B.)

6. 填空题:

- (1) 如实数 $a < 0$, 则 $|a-|a|| = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 实数 a, b, c 在数轴上的对应点为 A, B, C (如图);

试化简

$$\sqrt{a^2} - |a+b| + |c-a| + |b+c| = \underline{\hspace{2cm}}.$$



(第2题)

- (3) 若实数 x, y, z 满足 $|x-2| + (y+3)^2 + \sqrt{z+4} = 0$, 则

$$\frac{x+y}{z} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(答案: (1) $-2a$, (2) $-a$, (3) $\frac{1}{4}$.)

§2 实数的性质与运算

一、实数的主要性质

实数的主要性质是:

(一) 实数的顺序性

实数可以比较大小。根据实数在数轴上对应点的位置关系, 我们得到比较实数大小的法则: 正实数都大于零; 负实数都小于零; 正实数大于任何一个负实数; 两个负实数, 绝对值大的反而小。

(二) 实数的连续性

从“实数与数轴上的点之间是一一对应的”这一性质就可得出实数是连续的。

(三) 实数的稠密性

任何两个不同实数间一定存在着无数个实数。

理解

1. 判断题(正确的打√, 错误的打×):

(1) 实数中没有最大的数, 也没有最小的数。 ()

(2) 绝对值相等的两个实数一定相等。 ()

(3) 任何实数的平方一定大于零。 ()

(4) 一个负数的3倍小于这个数本身。 ()

(5) 任何一个小于1的实数的平方都比1小。 ()

(答案: √, ×, ×, √, ×.)

2. 填空题:

(1) 比较下列各组数的大小:

$$\frac{1}{3} \underline{\hspace{1cm}} 0.3; \quad -3.1416 \underline{\hspace{1cm}} -\pi; \quad 3\sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} 2\sqrt{7}.$$

(2) 已知 $0 < a < b < 1$, 试用不等符号连接下列各题中的两个数:

$$a^2 \underline{\hspace{1cm}} a; \quad a^2 \underline{\hspace{1cm}} b; \quad ab \underline{\hspace{1cm}} a; \quad \sqrt{a} \underline{\hspace{1cm}} a;$$

$$\frac{1}{a} \underline{\hspace{1cm}} \frac{1}{b}.$$

(3) 将下列各数从小到大排列:

$$(1) \quad -\frac{15}{154}, \quad -\frac{10}{101}, \quad -\frac{5}{51}; \quad \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \quad 3, \quad 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{10}; \quad \underline{\hspace{2cm}}.$$

(4) 试在下列两数之间从小到大写出三个数:

$$(1) \quad \frac{1}{8} \text{ 与 } \frac{1}{6}; \quad \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \quad \sqrt{2} \text{ 与 } \sqrt{3}; \quad \underline{\hspace{2cm}}.$$

(答案: (1) $>; <; <$. (2) $<; <; <; >; >$.)

$$(3) \quad -\frac{10}{101} < -\frac{5}{51} < -\frac{15}{154}; \quad 2\sqrt{2} < 3 < \sqrt{10}.$$

$$(4) \quad \frac{1}{8} < \frac{13}{96} < \frac{7}{48} < \frac{5}{32} < \frac{1}{6};$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{3}.$$

二、近似数

(一) 几个概念

1. 近似数 近似地表示某一个量的数值的数叫做近似数。通常，按四舍五入法计算近似值。小于准确值的近似数叫不足近似数，大于

准确值的近似数叫过剩近似数。

2. 有效数字 一个近似数,从左边第一个非零数字起到右边的最末一个数字(可以是零)止,所有的数字,都叫做这个数的有效数字。例如185.7、2.040都是四个有效数字,而0.048、5.0、0.0030都是两个有效数。

3. 精确度 是指一个近似数最右边一个数字所处的位置。例如5.4、5.40、0.054这三个近似数分别精确到十分位、百分位、千分位。

(二) 近似计算

1. 近似数的加减法 结果的精确度要与最“低”精确度的位数相同,而在计算过程中要多保留一位精确度。

2. 近似数的乘除法 结果的有效数字个数要与有效数字个数最少的一个相同,而在运算过程中有效数字个数要多保留一个。

理解

1. 选择题:

(1) 将0.385995用四舍五入法精确到万分位,所得近似数的有效数字个数有 ()。

(A) 1个; (B) 2个; (C) 3个; (D) 4个。

(2) 按四舍五入法将495000保留两个有效数字的近似数是 ()。

(A) 49; (B) 50; (C) 5×10^5 ; (D) 5.0×10^5 。

(3) 近似数0.08195用四舍五入法精确到万分位的值是()。

(A) 0.081; (B) 0.0820; (C) 0.08195; (D) 0.0819. 1

(答案: D. D. B.)

2. 填空题:

按四舍五入法求近似值:

(1) 将1.3995保留四个有效数字是_____。

(2) 将 0.37549 精确到 0.001 是_____。

(3) 将 80345 保留两个有效数字是_____。

(答案: (1) 1.400; (2) 0.375; (3) 8.0×10^4 或 8.0 万。)

应用

对下列各题作近似计算:

1. $5.376 + 2.88 - 6.0193 + 0.9648$.

解: 最低精确度是 2.88 (精确到 0.01), 所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &\approx 5.376 + 2.88 - 6.019 + 0.965 \\ &= 3.202 \approx 3.20.\end{aligned}$$

2. $73.48 \times 0.27 \div 26.5$.

解: 有效数字个数最少的是 0.27 (两个有效数字), 所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &\approx 73.5 \times 0.27 \div 26.5 \\ &\approx 19.8 \div 26.5 \\ &\approx 0.747 \approx 0.75.\end{aligned}$$

三、实数的乘方与开方

(一) 乘方

1. 概念 求 n 个相同因数的积的运算叫做乘方, 乘方的结果叫做幂. $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}} = a^n$, 其中 a 叫做底数, n 叫做指数.

2. 符号法则 正数的任何次幂都是正数; 负数的偶次幂是正数, 负数的奇次幂是负数.

(二) 开方

1. 开平方 如果一个数的平方等于 a , 那末这个数叫做 a 的平方根 (也叫做二次方根). 正数 a 的平方根是两个互为相反的数, 记作 $\pm\sqrt{a}$, ($a > 0$). 其中正的平方根叫做 a 的算术平方根, 记作 $\sqrt{a}$.