

大學微積分 自習手冊

(此書為美國數學學會專為高三及大一程度之學者編著作為自修自用)

(下冊)

主編者：美國數學協會
教育傳播委員會

譯者：楊睢林 馮家金
楊志伊 嚴夢輝

徐氏基金會出版

大學 微積分 自習手冊 (下冊)

主編者：美國數學協會
教育傳播委員會

譯者：楊睢林 馮家金
楊志伊 嚴夢輝

徐氏基金會出版

序

在世界科學文明已進步到太空時代的今天，任何一個人都了解發展科學的重要性，談發展科學，必須提高大家研究科學的興趣，才能按步就班地求發展。

本基金會對於海內外中國人士從事發展科學研究的情況，向來都寄予深切的關心，過去六年，本會曾資助大學理工科畢業學生前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯世界著名科學技術書籍出版供給在校學生及社會大眾閱讀，其目的都在幫助促進科學發展。

我們深深希望自由中國的科學家和工程師們了解本基金會的用意，主動的重視科學技術書籍為發展科學的基本工具，從事寫作和翻譯，並且熱誠盼望與我們聯繫合作，我們願意運用基金從事各種出版工作，共同為我們邁進工業化的途徑而努力。

徐氏基金會

1968年1月

徐氏基金會啓事

- 一、凡對本書任何一部份，或本會所出版之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角至一百二十五元（折合新臺幣五百元至五千元），以示謝意。
- 二、本基金會爲了提倡及鼓勵我國同胞研究科學的興趣，進一步希望達到發展科學的目的，特公開徵求下面各類有關的中文創作及翻譯稿件。

甲、自然科學類：

數學，化學，物理學，及生物學。

乙、技術及工程類：

機械工程，電機及電子工程，無線電，電視，電信，汽車修理，鐘錶修理及製造，房屋建築，木工，水泥工等以及機械工程，電機工程及土木工程的製圖。

丙、醫學類：

個人及家庭保健衛生等一般醫學常識及教育方法。

凡是應徵的稿件必需採用通俗而流暢的筆調，使得社會一般人士及中等以上學校的學生容易吸收及了解爲原則，至於科學同技術方面的名詞應以國立編譯館所譯經教育部審定公佈的名詞爲標準。

稿酬：應徵稿件經過本會審查接受者，一律按每一千字新臺幣一百元（美金二元五角）核付稿費，如果本會認爲

內容特佳，並得提高其稿酬。

三、獎助：經本會接受付給稿費以後之創作及譯稿，其版權即屬於本會所有，並由本會出版，分別在臺灣、香港、星加坡等地區銷售。

本會將在各該書籍出版以後的第二年年底，核計其總銷售量，並分別贈與作者及翻譯者下面三種獎金。

1. 銷數佔第一位者：獎給新臺幣二十四萬元（美金六千元）
2. 銷數佔第二位者：獎給新臺幣一十六萬元（美金四千元）
3. 銷數佔第三位者：獎給新臺幣八萬元（美金二千元）

獎助辦法實行期間：自即日起，每年頒獎一次，暫定實行三年。

應徵者請直接向香港郵政第一二八四號信箱徐氏基金會接洽

原 序

這八章程序教材，是為大學一年級編訂一套完整而標準的微積分教材而設計，對每學期選修五門課程的學生，最後一章的材料，有時可以留待二年級實施。本書以用做微積分的基本教材最佳，也可作為一般教材的輔助讀物。

程序教材的使用，是當要點提出之後，必須立刻得到反應，緊接着便是一個用來做比較的正确答案。程序教學的重點，在於要求學生的活動，並全盤控制這項活動的過程。在學生心無旁騖或課堂討論時間不夠充裕的情況，這套循序漸進的方法似乎特別有益。

教育傳播委員會（CEM）的「程序教學計劃」，在國家科學基金會經費支援下編訂了這套教材。本會在美國數學協會之下奉命成立以後，藉種種不同的媒介，例如電影，電視，程序教學法，或聯合各媒介組成的教學體系等等，在教材表現的技術和方法方面，近來都有長足的進步；而本會特別重視如何最有效地運用這些方法，來改進大學程度的數學教學。

本會把一年級微積分課程的題材列為最優先，因為在微積分方面，似乎缺乏適宜的程序教材，作為傳播材料有效運用的研究；於是本會編輯小組在史丹福大學歷經三個暑期（1964至1966年），編訂了這一套書籍。

1964年和1965年的初稿，稱為「微積分程序專題」，以少量的管制版本印行，然後在下一教育年度中試教，以便獲得課堂的評價實效，作為修訂之用。所以現在這一套程序教材，就是初版材料的修正本。

本人是教育傳播委員會「程序教學計劃」的主持人，曾蒙許多人士

的關切，支援和合作，由於人數過多，無法一一登錄，只好把直接參與本計劃的團體名稱列舉出來。我要感謝的，有美國數學協會的各位理事；本委員會的委員，職員和計劃指導人員；國家科學基金會的各位代表；史丹福大學很多教授和職員先生；試教教學計劃顧問委員會的各位委員先生。

三個執筆團體間的互助，熱誠，和意業的精神，尤其令人感佩。還有志願參加支援執筆先生的助編人員，本人必須謹致個人的謝意，因限於篇幅，不能刊載芳名，深表抱歉。

教育傳播委員會

程序教學計劃

主 持 人

傑 爾

給讀者的說明

這是一本程序教材，它和一般教本不同的地方有下列各點：

1. 給你提供的要點，是一些簡短而編成號碼的小節，稱為進度。
2. 大部份的進度，是要你對一個問題立刻發生反應，來測驗你關於進度中要點的了解情況。
3. 可以馬上把你的答案，和進度下方解答欄中的正確答案作一比較。在提供摘要，自我測驗，複習及習題方面，與一般教本無異，所不同的，是有更詳盡的解答和剖析。

爲了能夠從程序教材中獲取最大的裨益，你必須：

1. 準備鉛筆和紙張，寫出你的答案。可以寫在書上，也可以寫在另一張紙上，那要看你打算將來怎樣處置本書而定。
2. 在你着手書寫所有問題的解答而未完成以前，始終要把解答欄遮蓋起來。
3. 把你的答案和書上的答案比較一下。
4. 確認你的答案是和書上的答案符合或相當。如果你的答案錯了，再看一遍，直到了解什麼地方做得不對爲止。有些解答欄中，寫在括弧裡面的其他答案和解釋，並不希望也爲你的答案所包括，只是給你參考而已。
5. 細心閱讀並遵行各項說明。有些進度，談到完成某一節的途徑或方法，告訴你要去複習或略去不做，你的取捨，完全看你在該進度中的表現而定。

各章以第一章，第二章，第三章等等標明，每章中的各節，按次編號，例如 3.2 節，就是第三章，第二節。在每節中，各進度依次編號，提到本節中某一進度時，只說進度的號數，例如，進度 27；提到不同

章節的進度時，用全部的編號，例如，進度 3.3.28，就是第三章，第 3 節，第 28 個進度。

特別重要的題材，如定義，定理，或推論，則在兩個星號之間，標明進度的全部編號，如 *3.2.28*。這些題材，可以查閱各冊書末所彙列的「摘述備查」；在書末也有「符號彙錄」，便於查閱。

如果你能夠去精讀，去思考，並遵從上述的指示去實行，那麼這套設計出來的教材，不必他山之助，便可順利地圓滿學成。

大學微積分 自習手冊

上册

(一) 函數，極限與導數……楊睢林譯(1 — 361)
第1 — 2 章

(二) 定積分……馮家金譯(1 — 292)
第3 — 4 章

下册

(三) 超越函數……楊志伊譯(1 — 130)
第5 章

(四) 積分的應用與積分術…嚴夢輝譯(1 — 231)
第6 — 7 章

(五) 無限數列與級數……嚴夢輝譯(1 — 118)
第八章

下 冊 目 錄

原序	V
給讀者的說明	VII

(三) 超越函數

第五章 超越函數

5.1	前言	3
5.2	自然對數函數的定義	4
5.3	自然對數函數的導數	23
5.4	指數函數	34
5.5	普通指數函數	54
5.6	普通對數函數	63
5.7	三角複習	72
5.8	三角函數的導數	79
5.9	反三角函數	97
5.10	雙曲線函數	122

(四) 積分的應用與積分術

第六章 定積分的應用

6.1	面積	3
6.2	面積的近似值	38
6.3	功	42
6.4	功與達布定理	55
6.5	體積：薄盤法	73
6.6	體積：薄殼法	85
6.7	一個定理更多的應用	93

6.6	模型	-----	116
第七章 積分術			
7.1	初步討論	-----	131
7.2	反導數	-----	134
7.3	不定積分	-----	138
7.4	簡易積分術	-----	143
7.5	分部積分法	-----	158
7.6	三角積分	-----	169
7.7	三角代換法	-----	185
7.8	定積分的計值	-----	197
7.9	有理函數的積分	-----	207
7.10	積分表的使用	-----	225

(五) 無限數列與級數

第八章 無限數列與級數

8.1	數列	-----	3
8.2	數列的極限	-----	20
8.3	極限的其他定義；部分數列	-----	45
8.4	有界數列	-----	63
8.5	單調數列	-----	82
8.6	零數列；極限定理	-----	97
摘述備查			摘 1—32
符號彙錄			符 1— 8
索引			索 1—10

第五章

超越函數



致讀者：
爲了對本書的
有效使用起見
你必須先看扉頁中
「給讀者的說明」

5.1 前言

這一章書講的是對數，指數，三角，與反三角函數，一般通稱之為超越函數，這些函數對讀者而言並非完全陌生，因為其中的一部份甚至全部讀者已經學過了。

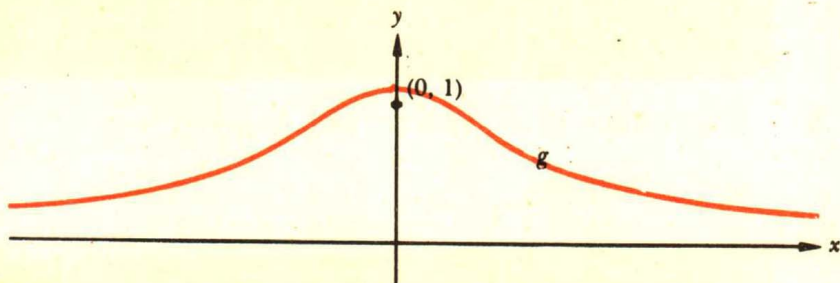
討論超越函數，有很多方法可以遵循，首先將自然對數函數，視同整數予以定義，其次將指數函數定義為自然對數函數之反函數，則普通指數函數如 $f(x) = b^x$ ， $b > 0$ 以及以 b 為底 $0 < b \neq 1$ 的對數函數都在討論範圍之內，最後講到三角與反三角函數。

超越函數之導數公式一經求得，本書中將以之討論這些函數在代數及幾何上的某些性質。

5.2 自然對數函數的定義

- 1 在 5.2 與 5.3 中完全討論自然對數函數之發展，前面章節裏，我們曾經學過以整數為基礎的普通函數問題，自然對數的定義，只是運算技巧中特殊應用而已。
- 2 自進度 2 到 17，用舉例方法來講，從這些例題的內容可以看出自然對數函數的某些性質，首先講一個與對數函數無關的函數

令 $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ，則 g 是一連續函數，它的定義域是 _____， g 之圖形如下圖。



$(-\infty, \infty)$

- 3 函數 G 是由下面公式而定義的，對所有的 x 而言。

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt, \text{ 則 } G(0) \text{ 之數值是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

0 (因為任何函數在 $x = a$ 時，均有 $\int_a^a f(x) dx = 0$ 之結果)

, 參閱 *4.5.20 *

- 4 在微積分中有個很重要的定理, (定理 *4.6.16 *) 設 f 在 $[a, b]$ 是一連續函數, 由

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

所定義的函數 G , 其中 $x \in [a, b]$, 則.

$$G'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$G'(x) = f(x)$, 所有的 $x \in [a, b]$

5. 當 $G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$, 則 $G'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

- 6 對每一實數 x 而言, 導數 $G'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

則 G' 的定義域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

$(-\infty, \infty)$

- 7 由上進度可知 $G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$, 在它的定義域內的每一點都有一個導數, 由此可知對每一實數而言, G 是連續的, 寫出 (用你自己的意思) 這一段話是那一個定理的特例, 寫出該定理的名稱與含義.

若函數 f 在 a 有一導數, 則 f 在 a 是連續的, (見定理 2.6.2)

- 8 對所有實數 x 而言, 若 $G'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 則就實數集合而言