高等教育自学考试指导书

高等数学（一）

微积分自学指导书

高汝熹　奚声扬

武汉大学出版社

高等数学(一)

微积分自学指导书

高汝熹　奚声扬

武汉大学出版社

高等数学(一)

微积分自学指导书

高汝熹　奚声扬

*

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

武汉正加数据处理部激光照排

崇阳县印刷厂印刷

*

787×1092毫米　1/32　9印张　198千字

1992年1月第1版　　1992年1月第1次印刷

印数:1—50350

ISBN 7-307-01149-2/O·97

定价:3.70元

前　言

本书是为全国高等教育自学考试经济管理类专业教材高等数学（一）——微积分编写的指导读物，以帮助自学者学好高等数学（一）. 本书包括：函数与极限、一元函数微积分学、多元函数微积分学、级数及微分方程初步等内容. 每章按如下三个部分编写：

一、基本要求与重点　这一部分指明读者学习这一章必须掌握的内容及其必须着重掌握的概念、定理及其运算法则. 这是根据自学考试大纲要求编写的.

二、例题解答与分析　这是本书的主要内容. 它按照高等数学（一）教材中的内容，将各章分成一组又一组的例题. 每一组例题围绕一项基本要求或一个重点内容. 在解答每一组例题后，紧接着又简要点明这一部分内容所涉及的基本概念、重要解法及其运算技巧. 希望读者用较短的时间加深对基本要求和重点的认识，提高解题能力和分析问题的水平.

三、思考题与练习题　我们按自学考试大纲要求精选了一些与基本概念有关的思考题和提高解题能力的练习题，供自学者在小结各章时作自我检测用.

由于编者学识肤浅，水平有限，书中一定有不少不妥之处，恳请读者批评指正.

编者

1991. 9

目　　录

第一章　函数及其图形…………………………………… 1
一、基本要求与重点…………………………………… 1
二、例题解答与分析…………………………………… 2
三、思考题与练习题 ………………………………… 16
第二章　极限与连续 ………………………………… 20
一、基本要求与重点 ………………………………… 20
二、例题解答与分析 ………………………………… 20
三、思考题与练习题 ………………………………… 44
第三章　导数与微分 ………………………………… 48
一、基本要求与重点 ………………………………… 48
二、例题解答与分析 ………………………………… 49
三、思考题与练习题 ………………………………… 70
第四章　中值定理与导数的应用 …………………… 76
一、基本要求与重点 ………………………………… 76
二、例题解答与分析 ………………………………… 76
三、思考题与练习题……………………………… 101
第五章　积分……………………………………… 106
一、基本要求与重点……………………………… 106
二、例题解答与分析……………………………… 106
三、思考题与练习题……………………………… 136

第六章　无穷级数…………………………………… 145
一、基本要求与重点………………………………… 145
二、例题解答与分析………………………………… 146
三、思考题与练习题………………………………… 171
第七章　多元函数及其偏导数……………………… 177
一、基本要求与重点………………………………… 177
二、例题解答与分析………………………………… 177
三、思考题与练习题………………………………… 207
第八章　微分方程初步……………………………… 216
一、基本要求与重点………………………………… 216
二、例题解答与分析………………………………… 217
三、思考题与练习题………………………………… 238
附录 1　1987 年上半年全国高等教育自学考试高等数学试题解答 ……………………………… 244
附录 2　1988 年上半年全国高等教育自学统一考试高等数学试题（财经类）解答 ……………… 254
附录 3　1989 年上半年全国高等教育自学考试高等数学试题（财经类）解答 ………………… 263
附录 4　1990 年下半年全国高等教育自学考试高等数学（一）试题解答 ……………………… 271

第一章　函数及其图形

一、基本要求与重点

1. 了解集合的概念，集合的表示方法，两个集合之间的关系，集合之间的并、交、补三种运算及满足的运算律.

2. 了解映射的含义，两个集合之间的映射所必须满足的条件，函数与映射的关系.

3. 正确理解函数的定义，掌握自变量与因变量之间的对应关系与函数的定义域这两个决定函数的要素，会求函数的定义域.

4. 熟练掌握基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）的表达式、定义域、图形和简单性质（单调性、有界性、奇偶性和周期性）.

5. 理解复合函数的概念，会正确地分析复合函数的复合过程. 理解初等函数的概念.

6. 了解反函数的概念及函数存在反函数的条件.

7. 了解经济学上一些常见函数的解析式及其图形，对一些较简单的经济问题，会建立函数关系.

重点　函数的概念，复合函数的概念，函数的定义域的确定，基本初等函数及其图形，函数的简单性质，建立函数的关系式.

二、例题解答与分析

例 1 下列表达式是否确定了 y 是 x 的函数，为什么？

(1) $y=\sqrt{\sin x-1}+2$；

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x-1}}$；

(3) $y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

解 (1) 是. 因为对任一 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（k 为整数），均有唯一确定值 $y=2$ 与之对应，故表达式(1)确定了 y 是 x 的函数.

(2) 不是. 因为在实数范围内，不等式 $\sin x-1>0$ 无解，故不存在某个数集能作 y 的定义域. 或者说定义域不能是空集，所以表达式(2)不构成函数.

(3) 是. 因为对在 $(-\infty,+\infty)$ 内任一有理数 x_1，均有唯一确定值 $y=1$ 与之对应；对在 $(-\infty,+\infty)$ 内任一无理数 x_2，均有唯一确定值 $y=0$ 与之对应，即对 $(-\infty,+\infty)$ 内任一 x，均有唯一确定值 y 与之对应，故表达式(3)确定了 y 是 x 的函数.

函数是指两个实数集合之间的映射，要构成函数，首先要存在两个非空的实数集合，分别作为函数的定义域 D_f 和函数的值域 R_f，其次对任一 $x\in D_f$，必唯一存在确定的 $y\in R_f$ 与 x 对应. 通常定义域是某个区间，但也可以是一些点集（见例 1 (1)）. 有时，在自变量不同的范围内，对应规律可以不同，即用不同的式子来分段表示，这样的函数叫分段函数（见例 1 (3)）. 在有些场合，如给定方程 $x^2+y^2=1$，对任一 $x_0\in[-1,1]$，由方程解得 $y=\pm\sqrt{1-x_0^2}$，有两个不同的 y 值与 x_0 对应，

此时，我们可以把值域限制在$[0,1]$，则对任一$x_0\in[-1,1]$，就有唯一确定的值$y=\sqrt{1-x_0^2}$与之对应；同样，若我们把值域限制在$[-1,0]$，则对任一$x_0\in[-1,1]$，就有唯一确定的值$y=-\sqrt{1-x_0^2}$与之对应. 在将值域作这样处理后我们也可说由方程确定了y是x的函数.

例 2 指出下列各对函数是否等同，并说明理由：

(1) $f(x)=\ln x^2$, $\quad g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=x$, $\quad g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=|x|$, $\quad g(x)=\sqrt{x^2}$;

(4) $f(u)=3u-1$, $\quad g(v)=3v-1$.

解 (1) 不等同. 因为$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，而$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，它们的定义域不同，不是等同函数.

(2) 不等同. 因为当$x=-1$时，$f(-1)=-1$，而$g(-1)=\sqrt{(-1)^2}=1$，$f(-1)\neq g(-1)$，它们的对应规则不相同，不是等同函数.

(3) 等同. 因为①当$x\in(-\infty,0)$时，$f(x)=|x|=-x$，$g(x)=\sqrt{x^2}=-x$；②当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=|x|=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}=x$；③当$x=0$时，$f(0)=0$，$g(0)=0$，即对任一$x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)=g(x)$，所以它们是等同的函数.

(4) 等同. 因为$f(u)$与$g(v)$的定义域(均是$(-\infty,+\infty)$)与对应规则(均是自变量的值的3倍与1的差)都相同，它们的值域(均是$(-\infty,+\infty)$)也必然相同，所以它们是等同的函数.

在函数的概念中，包含五个因素：自变量、因变量、定义域、对应规则和值域. 二个函数，仅是定义域与值域分别相同，还不能说两个函数等同(如$y=\sin x$与$y=\cos x$). 而定义域与

对应规则分别相同，则它们的值域一定相同．在判断两个函数是否等同函数时，只要比较它们的定义域与对应规则是否相同，即使自变量或因变量的符号不同，并不妨碍函数的等同性（见例 2(1)、(2)、(3)、(4)）．函数的定义域和对应规则，是确定函数的两要素．

例 3 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{3}{1-x^2}$；

(2) $y=\sqrt{3x+2}$；

(3) $y=\ln(1-3x)$；

(4) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；

(5) $y=4\sqrt{3x+2}-3\arcsin\frac{x-1}{2}$.

解 (1) 由于分母不能为零，其定义域为 $x^2\neq 1$，即 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$及$(1,+\infty)$.

(2) 由于被开方数不能为负数，其定义域为 $3x+2\geqslant 0$，即$\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

(3) 由于真数不能为负数，其定义域为 $1-3x>0$，即 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$.

(4) 由反正弦函数的定义域知$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1$，即 $-2\leqslant x-1\leqslant 2$，故其定义域为$[-1,3]$.

(5) 函数(5)的定义域为函数(2)、(4)定义域的交集，即 $\left[-\frac{2}{3},3\right]$.

函数 $y=f(x)$的定义域是函数的重要因素，它是使函数 y 有意义的自变量 x 的取值的全体，通常可用不等式或区间表

示．函数定义域的确定依据是：若是实际问题中对应的函数，要使实际问题有意义（如半径为 r 的圆面积 $A=\pi r^2$，定义域为 $(0,+\infty)$；而解析式 $y=\pi x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$）．若是解析式表示的函数，要注意某些运算对函数的限制：

(i) 在分式中的分母不能为零（见例 3(1)）；

(ii) 在根式中负数不能开偶次方根（见例 3(2)）；

(iii) 在对数中，真数不能为负数（见例 3(3)）；

(iv) 在反三角函数中，要符合反三角函数的定义域．

例 4 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[1,2]$，试求函数 (1) $f(x+1)$；(2) $f(ax)\ (a\neq 0)$；(3) $f(\sin x)$；(4) $f(\sin x+1)$ 的定义域．

解 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，即 $1\leqslant x\leqslant 2$，则

(1) 对于 $f(x+1)$，有 $1\leqslant x+1\leqslant 2$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$， 因此 $f(x+1)$ 的定义域是 $[0,1]$．

(2) 对于 $f(ax)\ (a\neq 0)$，有 $1\leqslant ax\leqslant 2$，

①$a>0$，即 $\dfrac{1}{a}\leqslant x\leqslant \dfrac{2}{a}$，因此 $\left[\dfrac{1}{a},\dfrac{2}{a}\right]\ (a>0)$ 为 $f(x)$ 的定义域；②$a<0$，即 $\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{a}$，因此 $\left[\dfrac{2}{a},\dfrac{1}{a}\right]\ (a<0)$ 为 $f(x)$ 的定义域．

(3) 对于 $f(\sin x)$，有 $1\leqslant \sin x\leqslant 2$ 即 $\sin x=1$，因此 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为 $f(\sin x)$ 的定义域．

(4) 对于 $f(\sin x+1)$，有 $1\leqslant \sin x+1\leqslant 2$，即 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，因此 $[2k\pi,(2k+1)\pi]\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为 $f(\sin x+1)$ 的定义域．

通过本例可知，当已知 $f(x)$ 的定义域，要求 $f(\varphi(x))$ 的定义域时，只要将 $\varphi(x)$ 代替 $f(x)$ 表达式中的 x 的变化范围，从

中解出 x 的变化范围即可(见例 4).

例 5 设 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$,求(1)$f(x-1)$;(2)$f(x)-1$;(3)$\dfrac{1}{f(x)}$;(4)$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;(5)$f\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

解 (1) $f(x-1)=\dfrac{1}{(x-1)+1}=\dfrac{1}{x}$.

(2) $f(x)-1=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}$.

(3) $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x+1}}=x+1$.

(4) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+1}=\dfrac{x}{x+1}$.

(5) 因为 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x+1}$,所以 $f\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\dfrac{x+1}{2x+1}$.

在函数记号中,f 指的是函数的对应规则.例 5 中的 f 是指把括号内的变量与数 1 求和再取倒数,这括号内的变量可以是自变量 x(见例 5(2)、(3)),也可以是 x 的函数(见例 5(1)、(4)、(5)).如在 $f(x)=\sqrt[3]{\cos(x-2)}$ 中的 f 指的是自变量与数 2 的差,再取余弦然后开立方.一般说来,给定了解析式,就给定了对应规则.函数的对应规则,还可以用一个表格或一个图形来给出.

例 6 判断下列函数的单调性:

(1) $f(x)=2x-1$;

(2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$.

解 (1) $f(x)=2x-1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,对于

$(-\infty,+\infty)$内任意二点x_1,x_2(不妨设$x_1<x_2$),均有$f(x_1)-f(x_2)=(2x_1-1)-(2x_2-1)=2(x_1-x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$,所以$f(x)=2x-1$在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加函数.

(2) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,对于$(-\infty,+\infty)$内任意二点$x_1,x_2$(不妨设$x_1<x_2$),均有$f(x_1)-f(x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1+x_2}}$,因为$2^{x_1+x_2}>0$, $2^{x_2}>2^{x_1}$,所以$2^{x_2}-2^{x_1}>0$,因此$f(x_1)-f(x_2)>0$,即$f(x_1)>f(x_2)$,故$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调减少函数.

利用单调性定义判断函数单调性时,要注意x_1,x_2的任意性(见例6(1)、(2)),如$f(x)=\sin x$,对$x_1=\frac{\pi}{4}$,$x_2=\frac{5\pi}{4}$$(x_1<x_2)$虽有$\sin\frac{\pi}{4}>\sin\frac{5\pi}{4}$,但不能得出$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内(或在$[0,2\pi]$内)单调减少的结论,事实上,$f(x)=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$($k$为整数)上单调增加,而在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$($k$为整数)上单调减少.关于初等函数的单调性的判别,将在第四章中作深入讨论.

例7 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\sin x-\cos x$;

(2) $y=\sin x\cos x$;

(3) $y=\sin x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$;

(4) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 由奇偶函数的定义

(1) 因为$\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x$,所以$y=\sin x-\cos x$是非奇非偶函数.

(2)　因为 $\sin(-x)\cos(-x)=-\sin x\cos x$，所以 $y=\sin x\cos x$ 是奇函数.

(3)　因为 $\sin(-x)\cdot\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-\sin x\dfrac{\frac{1}{a^x}-1}{\frac{1}{a^x}+1}=-\sin x\cdot\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=\sin x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$，所以 $y=\sin x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$是偶函数.

(4)　因为 $\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})$
$=\log_a\dfrac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=\log_a\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$
$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，所以 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

由奇偶性的定义和类似例 7 的解题方法，可推出奇偶函数的性质：(i)两个偶函数之和(或差)是偶函数，两个奇函数的和(或差)是奇函数；(ii)两个偶函数或两个奇函数之积或商(分母不为零)是偶函数；(iii)一个奇函数与一个偶函数之积或商(分母不为零)是奇函数.

例 8　设 $f(x)$是定义在$(-a,a)$内的任意函数，试证

(1)　$f(x)+f(-x)$是偶函数；

(2)　$f(x)-f(-x)$是奇函数.

证　(1)　设 $g(x)=f(x)+f(-x)$，则 D_g 为$(-a,a)$，对任一 $x\in D_g$，必有 $-x\in D_g$，且 $g(-x)=f(-x)+f(-(-x))=f(-x)+f(x)=g(x)$，所以 $g(x)=f(x)+f(-x)$为$(-a,a)$上定义的偶函数.

(2)　设 $h(x)=f(x)-f(-x)$，则 D_h 为$(-a,a)$，对任一 $x\in D_h$，必有 $-x\in D_h$，且 $h(-x)=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)=-h(x)$，所以 $h(x)=f(x)-f(-x)$为$(-a,a)$上定义的奇函数.

例 8(1)、(2)的结果表明在对称区间(或$(-\infty,+\infty)$)上定义的任一函数 $f(x)$,必可分解为偶函数$\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$与奇函数$\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$的和.

例 9 下列函数能否构成复合函数,为什么?

(1) $y=\arcsin u$, $u=1+e^x$;

(2) $y=\lg u$, $u=1-x^2$.

解 (1) 不能.因为不论 x 取什么实数,$u=1+e^x>1$,而 $\arcsin u$ 的定义域为 $|u|\leqslant 1$,所以 $u=1+e^x$ 的值域不可能包含在反正弦函数的定义域内,即不能构成复合函数.

(2) 能,因为 $y=\lg u$ 的定义域为$(0,+\infty)$,当 $1-x^2>0$ 即 $|x|<1$ 时,$u=1-x^2$ 的值域包含在 $y=\lg u$ 的定义域内,所以能构成复合函数.

判断函数 $y=f(u)$,$u=g(x)$能否构成复合函数的关键是 $u=g(x)$的值域 Ru 是否包含在 $y=f(u)$的定义域中,也就是考察上述二个集合的交集是否为非空集合(例 9(1)中:$u=1+e^x$ 的值域 $Ru=\{u|u>1\}$与 $y=\arcsin u$ 的定义域:$\{u||u|\leqslant 1\}$的交集 $\{u|u>1\}\cap\{u||u|\leqslant 1\}=\varnothing$;例 9(2)中,$Ru=\{u|u\leqslant 1\}$与 $y=\lg u$ 的定义域$\{u|u>0\}$的交集$\{u|u\leqslant 1\}\cap\{u|u>0\}=\{u|0<u\leqslant 1\}$,非空集).

例 10 指出下列函数由哪些简单函数复合而成:

(1) $y=\sqrt{2x-3}$;

(2) $y=\ln\cos x^2$;

(3) $y=e^{\sin^2 x}$

解 (1) 引进中间变量 u,令 $u=2x-3$,则 $y=\sqrt{u}$,故 $y=\sqrt{2x-3}$可由简单函数 $y=\sqrt{u}$,$u=2x-3$ 复合而成.

(2) 引进中间变量 u,v,令 $v=x^2$,$u=\cos v$,则 $y=\ln u$,故 y

$=\ln\cos x^2$ 可由简单函数 $y=\ln u, u=\cos v, v=x^2$ 复合而成.

(3) 引进中间变量 u、v，令 $v=\sin x, u=v^2$，则 $y=e^u$，故 $y=e^{\sin^2 x}$ 可由简单函数 $y=e^u, u=v^2, v=\sin x$ 复合而成.

简单函数是指由基本初等函数与常值函数经过有限次四则运算而得到的函数. 复合函数不仅可由两个函数(见例 10(1))，也可以由多个函数相继进行有限次复合而成(见例 10(2)、(3)). 研究复合函数，不仅能将若干个简单函数复合成一个函数，还要能将复合函数分解成若干个简单函数，这在高等数学中是很重要的.

例 11 试求函数 $y=f(x)=1+\ln(x+2)$ 的反函数，并指出反函数的定义域.

解 由 $y=f(x)=1+\ln(x+2)$，即 $\ln(x+2)=y-1$，$x+2=e^{y-1}$，解得 $x=e^{y-1}-2$，称 $x=\varphi(y)=e^{y-1}-2$ 为 $y=f(x)=1+\ln(x+2)$ 的反函数. 习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，故将 $x=\varphi(y)=e^{y-1}-2$ 的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，得 $y=\varphi(x)=e^{x-1}-2$ 为 $y=f(x)=1+\ln(x+2)$ 的反函数(有时用 $\varphi(x)=f^{-1}(x)$ 表示)，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

如果函数 $y=f(x), x\in Df$ 是严格单调增加(或减少)的函数(对任一 $x\in Df$，必有唯一确定的 $y\in Rf$ 与之对应，反之对任一 $y\in Rf$，必有唯一确定的 $x\in Df$ 与之对应)，则必存在反函数 $x=\varphi(y)$，函数 $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 仅是变量的记号不同，它们是等同函数，都是 $y=f(x)$ 的反函数. 由于函数 $x=\varphi(y)$ 是由函数 $y=f(x)$ 中解得的，故 $x=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形重合. 而函数 $y=\varphi(x)$ 是把函数 $x=\varphi(y)$ 中的 x，y 交换得到的，相当于把 x 轴和 y 轴互换一下，故函数 $x=\varphi(y)$ 的图形与函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的，即函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

例 12 欲建一个容积为 V(米^3)的长方体水池，设它的底为正方形. 如果池底所用材料单位面积的造价是四周侧面单位面积造价的 2 倍，试将造价表示为水池底边长的函数，并确定此函数的定义域.

解 设水池底边长为 x(米)，总造价为 y(元)，四周侧面造价为 a(元/米^2)，则水池的高 $h=\frac{V}{x^2}$(米)，水池底的造价为 $2a$(元/米^2)，于是得到总造价为

$$\begin{aligned} y &= 2ax^2+4ahx \\ &= 2ax^2+4ax\cdot\frac{V}{x^2} \\ &= 2ax^2+\frac{4aV}{x} \qquad \text{定义域}(0,+\infty). \end{aligned}$$

例 13 某工厂生产某产品，年产量为 Q 台，每台售价为 100 元，当年产量超过 800 台时，超过的部分只能打 9 折出售，这样可多售出 200 台，如果再多生产，本年内就销售不出去了，试写出本年的收益函数.

解 设收益函数为 $R=R(Q)$，据题意，可分三种情况讨论：

(1) 当 $0\leqslant Q\leqslant 800$ 时，有 $R(Q)=100Q$；

(2) 当 $800<Q\leqslant 1000$ 时，有 $R(Q)=100\times 800+0.9\times 100\times(Q-800)=80000+90(Q-800)$；

(3) 当 $Q>1000$ 时，有 $R(Q)=100\times 800+0.9\times 100\times(1000-800)=80000+90\times 200=98000$，

综合以上三种情况得

$$R(Q)=\begin{cases} 100Q, & 0\leqslant Q\leqslant 800 \\ 80000+90(Q-800), & 800<Q\leqslant 1000 \\ 98000, & Q>1000. \end{cases}$$