- 浙江大学城市学院
- 浙江工业大学之江学院

资助项目

微积分

（上册）

吴迪光 张 彬 编著

浙江大學出版社

●浙江大学城市学院
●浙江工业大学之江学院
资助项目

微 积 分

上 册

吴迪光　张　彬　编著

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分 上册／吴迪光，张彬编著．—杭州：浙江大学出版社，2003 5

ISBN 7-308-03311 2

Ⅰ 微 Ⅱ ①吴 ②张 Ⅲ 微积分－高等学校－教材 Ⅳ O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 027095 号

责任编辑：樊晓燕
出版发行：浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj cn）
（网址：http://www.zjupress com）
排　　版：浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷：浙江大学印刷厂
开　　本：787mm×1092mm 1/16
印　　张：16
字　　数：389 千
版 印 次：2003 年 5 月第 1 版 2003 年 5 月第 1 次印刷
印　　数：0001－3000
书　　号：ISBN 7-308-03311-2/O·290
定　　价：24.00 元

序

随着新世纪的来到,我国的高等教育进入了前所未有的大发展时期。许多原先无缘深造的学子,纷纷步入大学的殿堂,接受本科教育。而数学则是理工科学生进校伊始就要面对的一门课程。然而,众所周知,数学一方面是各专业的重要基础,另一方面又是使一部分同学望而却步的学科。如何使众多理工科学生能将数学学好、学懂、学深、学透,不断提高自己的数学应用能力,关键之一是要有一本易教易学、深入浅出、重能力、少而精且能适合学生特点的教材。

吴迪光教授(浙江大学城市学院)和张彬教授(浙江工业大学之江学院)知难而进,毅然决定代表两校联合编写一部《微积分》教材,以示自己对数学教育事业的赤诚。

他们所编教材,从少而精入手,注意最基本的概念、理论和方法的讲清讲透,努力使初学者学有所获。此书比起同类型教科书来,篇幅要少许多,而这正好是少而精的一种表征。

他们还博采众长,对过去很多教学上比较棘手的内容作了科学的处理,化解了很多难点,更新了不少传统的叙述与证法,起到了易学、省时的效果。细心的读者一定会从中发现许多新意与亮点。

本书每章习题都分成基本题、综合题和自测题三档,这将会便利学生的训练和自测,也将会便利教师的选题。

行文流畅、叙述清楚、通俗易懂、便于自学是两位作者平时写书的一贯风格,本书当然也不例外。

本书的特点很多,不能一一列举,但仅此几点,就足以使它成为一本受广大师生欢迎的好教材。

浙江大学城市学院和浙江工业大学之江学院对此教材寄予了厚望,两校在经费上均给予了强力支持,并在各自范围内进行了试用,听取了很多同学的宝贵意见,才使教材进一步完善,最终能以较高的质量出版。

浙江大学出版社始终关注、支持这部教材的出版,也是作者有信心写好这本书的一个原因。今将本书编写的背景、特点与过程简记于此,聊以为序。

丁善瑞

2003 年 4 月于杭州

前　言

本书是按照教育部关于“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的基本精神，以及高等理工科院校关于“高等数学课程教学基本要求”而编写的。编写中注意到优化数学内容的结构，紧扣数学基本内容，渗入现代数学思想，加强应用能力的培养与训练，以适应新世纪对理工科人才数学素质的要求。

本书共七篇，内容包括：微积分研究的主要对象与工具(包括函数、极限与连续)、一元函数的微分学、一元函数的积分学、常微分方程、多元函数的微分学(包括向量代数与空间解析几何)、多元函数的积分学、无穷级数(包括Fourier级数)，并按内容结构分为20章，每章附有习题、答案与提示。而习题又分为基本题、综合题、自测题三部分。基本题着重基本训练，适合课后布置；综合题着重灵活应用，适合因材施教；自测题内含单项选择题、填空题、计算题、证明题与应用题等题型，适合学生自我检查与评价，以期达到课堂教学、自学实践、检测提高的目的，以体现教学全过程的有机结合。

在编写过程中，我们做了以下改革的尝试：

(1)优化内容结构　如对于极限的处理，先介绍数列极限，再介绍函数极限与数列极限的关系定理，然后介绍函数极限的定义、性质、运算法则等一系列问题。这一方面有利于与中学数学内容相衔接，另一方面，由离散变量到连续变量，使学生易于掌握。又如多元函数的积分学，分为多元实值函数的积分(重积分和第一类线、面积分)、向量值函数的积分(第二类线面积分)、各类积分的联系(包括格林公式、高斯公式、司托克斯公式以及散度、旋度)等三章，一方面加强了各类积分的内在联系，同时又明确了数量与向量值函数积分的区别，避免了过去学生对两类线、面积分易混淆而难以掌握的教学难点。通过实践，证明这样做是行之有效的。

(2)注重数学思想与方法的训练　如在介绍数学概念的实际背景、定理条件及其作用以及由此产生的公式的应用范围时，使学生明确教学内容的一般性与特殊性，了解概念的产生与发展，从而掌握本课程的内容体系。如从“一尺之棰，日取其半，万世不竭”这个古典哲学命题引入数列极限概念，从自由落体的瞬时速度引入函数极限概念。对“ε-N”，“ε-δ”的数学语言既不回避，又不神秘化，使概念回归自然，从本来面目自然而然地去了解它，掌握它，从而帮助学生克服过去因极限概念抽象而对其望而生畏的心理。其他如导数、各类积分概念的引入，都注意到它的实际背景，通过适当的实例，归纳成数学问题，阐明数学

观点，既使数学与其他学科相联系，又增强了学生运用数学解决问题的思维方法。典型的实例是数学教材中的新鲜血液，如在介绍相对论中物体高速运行时质量 m 随速度 v 变化的函数关系时，利用微分近似公式，导出质能转换的近似公式 $(m-m_0)c^2\approx\frac{1}{2}m_0v^2$，表明微小质量的变化可产生巨大的动能。又如在微分方程中导出一物体对另一物体的追踪曲线的简单数学模型。这样，在本课程范围内渗入一些现代科学知识，增强了学生应用数学方法的意识，激发学生对学习数学的兴趣。

(3)适当融合现代数学思想 如集合、映射、$\mathbf{R}^n$ 维空间、点函数、微分算子、无穷小的阶、离散与连续、函数的逼近等在本书中，都予以适当的体现，使学生了解一些数学语言符号，如 $\forall$、$\exists$ 等，为学生进一步学习现代科学技术知识提供切入口。

(4)化解教学内容中的难点，尽量做到便于教、便于学 为了使教材适应理工科和其他非数学专业学生的实际，对定理的证明作了淡化处理。如只证必要性，充分性证明从略，或都从略，或先作几何直观说明再作分析论证，或只作几何直观说明，重在定理的条件作用、结论的应用范围和它的数学思想。有的内容打上“*”号，便于教师根据专业要求和学生实际作出灵活处理。有的地方加上“注”，以说明内容的内涵与外延，以拓宽学生的思维。

本书分上、下册，基本上符合一学年上、下学期的教学内容要求。本书的预备知识、第一篇、第二篇中的第五章，以及第四、六、七篇由吴迪光撰写，第二篇中的第六、七章，以及第三、五篇由张彬撰写。

本书的编写是在浙江大学城市学院、浙江工业大学之江学院的学校领导的支持与资助下，以及在浙江大学出版社的具体帮助下完成的。丁善瑞教授直接领导本书的具体编写工作，并担任主审，对全部稿件作了十分仔细的审阅，提出了许多宝贵的建设性意见。本书稿于2002—2003学年度在两个学院的10个教学班进行了试教。孙燮华、叶显驰、陈仲慈、方照琴、邱巨岳、张德参等教授、副教授及张兵权讲师与本书作者一起试用了本教材。试点班级的同学对本教材的使用给予了极大的热情与支持，他们在教与学中，对试用教材提出了许多极为珍贵的意见，在此表示衷心的感谢。但毕竟本书编写时间仓促，不足之处敬希专家、读者不吝批评、指正。

吴迪光　　张　彬

2003年4月于杭州玉泉

目　录

第二篇　一元函数的微分学

第三篇　一元函数的积分学

第四篇 常微分方程

预备知识

微积分(Calculus)是研究函数的微分、积分以及有关概念、理论和应用的数学分支.它在17世纪由牛顿(Newton,1642—1727)和莱布尼兹(Leibniz,1646—1716)发展了前人对变量问题的研究而创立.以后又经过了许多数学家的相继努力,它的理论才得到逐渐完善.19世纪初,柯西(Cauchy,1789—1857)和魏尔斯特拉斯(Weierstrass,1815—1897)把微积分学建立在极限方法上,戴德金(Dedekind,1831—1916)和康托(Cantor,1845—1918)等建立了实数理论,为极限方法奠定了坚实的理论基础,从而使微积分成为一门新学科,同时也促进了近代数学的发展.

下面,介绍学习微积分这门课程的一些预备知识.

一、实数集

若所研究的对象,它具有某种确定的特征性质,这种对象所组成的全体称为**集合**(简称**集**),其中单个对象称为集的**元素**.若集的元素的个数是有限的,则称为**有限集**,否则就称为**无限集**.若集的元素由全体实数所组成,则该集称为**实数集**,表示为:

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 或是有理数,或是无理数}\}.$$

R的子集简称**数集**.自然数集**N**,整数集**Z**,有理数集**Q**,它们都是**R**的真子集,且有$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

为了使数的研究更直观,我们引进数轴的概念.设l为一水平直线,我们任意地在这直线上选定一点,设为O,称它为**原点**;在原点的右方,取定一点,把O到这一点的距离定为单位长度,并用1来表示这一点.这样,这直线上的每一点都可用一个数来表示,这个点在点O的左边,则用负数表示;在右边,则用正数表示,并用数0表示点O.用这种方法就把实数的全体同这条直线上的点一对一地对应了起来,这条直线称为**数轴**.从此以后,我们将数轴上的点与它所对应的数等同起来,不加分别.

实数的基本性质:

(1) **有序性** 对任何两个实数x,y,有且仅有下列关系之一成立:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

(2) **稠密性** 在任何两个不相等的实数之间,总存在实数.

(3) **连续性** 将实数集**R**分割成左、右两个子集A,B,它们满足:

1° $A \cup B = \mathbf{R}$;

2° $A \cap B = \varnothing, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$;

3° 对任何$x \in A, y \in B$,都有$x < y$;

则或者左集A有最大数,或者右集B有最小数,二者必居其一.

也就是说,对**R**的满足上述条件的任何一个分割,都存在惟一的$z \in \mathbf{R}$,使得对所有的$x \in A$和$y \in B$,都有$x \leqslant z \leqslant y$.

从几何上看,实数的连续性表示全体实数正好充满了数轴,中间不存在“空隙”.用一个

比喻,如果我们用一把其薄无比的刀,将直线切成左、右两段,那么刀口必然能切到一个代表实数的点.大家知道,有理数集 **Q** 虽然在直线上也分布得密密麻麻(所谓稠密性),但它中间存在空隙(即不连续性).

二、距离 绝对值

对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,称非负实数

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \overset{\text{def}}{=} |x_1 - x_2|$$

为两点 x_1 与 x_2 间的**距离**.距离 $d = |x_1 - x_2|$ 也称为两实数 x_1 与 x_2 之差的**绝对值**.其中记号“def” 是 define 的缩写,表示“定义为”、“表示为” 或“记为”.

在距离 $|x_1 - x_2|$ 中,特别地,若取 $x_2 = 0$,并将 x_1 改记为 x,于是有

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

三、几个常用的不等式

(1) 绝对值不等式

对任意的 $x \in \mathbf{R}$,有 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,有 $\big||x_1| - |x_2|\big| \leqslant |x_1 \pm x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$.

(2) 平均值不等式

设有 $n(n \geqslant 2)$ 个正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

(几何平均值)　　(算术平均值)

等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立.

特别地,把 n 个正实数分别取为 $1, 2, \cdots, n$,则有 $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

四、区间 邻域

(1) 区间

设 $a, b \in \mathbf{R}$,且 $a < b$,则数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 表示数轴上 a 与 b 两点间一切点的全体,称为**开区间**,记为 (a, b),即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

类似地,$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**.

$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ 与 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ 称为**半开区间**.

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$,

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$,

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \text{ 是任何实数}\} = \mathbf{R}$, $[0, +\infty) = \{x \mid x \text{ 为非负实数}\} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R}_+$,统称**无穷区间**.记号“$-\infty$”读做“负无穷”,“$+\infty$”读做“正无穷”.

(2) 邻域

设 $x_0, \delta \in \mathbf{R}$,且 $\delta > 0$,则数集

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \overset{\text{def}}{=} U(x_0, \delta)$$

称为点 x_0 的 δ 邻域,又

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\stackrel{\text{def}}{=}\mathring{U}(x_0,\delta)$$

称为点 x_0 的去心 δ 邻域.

五、有界数集

设 A 是非空数集,于是有

(1) 若存在实数 M,使对任意的 $x\in A$,都有 $x\leqslant M$,则称数集 A 为**有上界**,并称 M 是数集 A 的一个**上界**.

(2) 若存在实数 m,使对任意的 $x\in A$,都有 $x\geqslant m$,则称数集 A 为**有下界**,并称 m 是数集 A 的一个**下界**.

(3) 若同时存在实数 m,M,使对任意的 $x\in A$,都有 $m\leqslant x\leqslant M$,则称 A 是**有界数集**.

若记 $K=\max\{|m|,|M|\}$,则对任意的 $x\in A$,都有 $|x|\leqslant K$,则这个正数 K,称为有界数集 A 的一个**界**.

没有上(下)界的集称为**无上(下)界集**,统称**无界集**.

对无界集也可描述为:对任意给定的正数 K(不管 K 多么大),总可找到一个数 $x_0\in A$,使得 $|x_0|>K$,则称 A 是无界集.

六、逻辑符号

在数学中,对许多命题的描述与推导常使用数理逻辑中的量词概念与量词符号,以便将数学内容简洁、明确地进行表述.量词有两种:

(1) 符号"$\forall$"称为**全称量词**,表示**"对所有的"**(for all)或**"对任意的"**(for arbitrary),它是其英文的第一个字母 A 的倒写.

(2) 符号"$\exists$"称为**存在量词**,表示**"存在"**(exist),它是其英文的第一个字母 E 的反写.

除了量词符号外,还常用到以下逻辑符号:

(1) "$\Rightarrow$" 在命题中,若 P 成立时可推出 Q 成立,记为

$$P\Rightarrow Q,$$

称 **P 是 Q 的充分条件;Q 是 P 的必要条件**.

(2) "$\Leftrightarrow$" 若命题中 P,Q 互为充分必要条件,即 $P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$,记为

$$P\Leftrightarrow Q,$$

或说成**"P 等价于 Q"**,有时还说成**"当且仅当 P 成立时,Q 成立"**或**"Q 成立,必须且只须 P 成立"**.

例如 数集 A 有上界 $\Leftrightarrow\exists M\in\mathbf{R},\forall x\in A$,有 $x\leqslant M$,

数集 A 无上界 $\Leftrightarrow\forall M\in\mathbf{R},\exists x_0\in A$,使 $x_0>M$.

数集 A 有界 $\Leftrightarrow\exists M\in\mathbf{R}_+,\forall x\in A$,有 $|x|\leqslant M$,

数集 A 无界 $\Leftrightarrow\forall M\in\mathbf{R}_+,\exists x_0\in A$,使 $|x_0|>M$.

(3) 在一个命题的证明完毕后,用符号 □ 表示"证毕".

第一篇　微积分研究的主要对象与工具

本篇介绍微积分研究的主要对象与工具,内容有映射与函数概念、基本初等函数、初等函数,数列极限、函数极限、连续函数、无穷小的阶等概念、理论与运算方法,它们不但是学好微积分的前提,同时也是现代数学的基础.

第一章　函　数

函数是微积分研究的主要对象.本章将引入映射概念,它是函数概念的一种拓广,并介绍几类有某种特性的函数,以及复合函数、反函数、基本初等函数和初等函数等内容.

第一节　映射与函数的概念

一、映射与函数的定义

定义 1.1　设 A,B 是两个非空的集合,如果存在一个对应法则 f,使得对每一个元素 $x\in A$,按照法则 f 都有惟一元素 $y\in B$ 与之对应,则称 f 是从集合 A 到集合 B 的**映射**.

特别地,非空集合 A,B 的元素,在都是实数的情况下,则从 A 到 B 的映射 f 称为**一元实值函数**,简称**函数**,并记作

$$y=f(x),x\in A\ 或\ x\mapsto y=f(x). \tag{1.1}$$

x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.数集 A 称为函数 f 的**定义域**,$f(x)$ 称为与 x 对应的**函数值**.当 x 取遍 A 的每一个数值时,对应的函数值的全体 $\{y\mid y=f(x),x\in A\}\subset B$ 称为函数 f 的**值域**,记为 $f(A)$,即

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}. \tag{1.2}$$

平面点集

$$\Gamma=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in A\} \tag{1.3}$$

称为**函数 f 的图形**.

注　在(1.1)式中,关系式"$y=f(x),x\in A$"也表达了因变量 y 随自变量 x 的变化而变化的规律,在讨论中,常通过函数值 y 的变化规律来研究函数 f 本身,因此,习惯上常将 y 或 $f(x)$ 也说成是 x 的函数.

在函数定义中,由函数的定义域与对应的法则确定了函数的值域.如果两个函数的定

义域相同，且对定义域内任何自变量的值，对应的两个函数值都相等，则这两个函数相等同；否则，这两个函数不相同.

例如，设 $a>0, a\neq 1$，下列三个函数

$$f(x)=\log_a x^2,\quad g(x)=2\log_a|x|,\quad h(x)=2\log_a x,$$

就有 $f=g\neq h$，这是由于函数 h 的定义域与 f, g 的定义域不相同.

在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定，但在数学上作一般讨论时，函数的定义域就约定为使数学表达式有意义的自变量的取值范围，称它为**自然定义域**，简称**定义域**.

例 1　一圆锥形容器，上底半径 R 厘米，高 H 厘米，放置如图 1-1，若以等速每秒 v_0 立方厘米注入液体，求容器内液面高 h 和时间 t 的函数关系.

解　在过程开始后的时刻 t，容器内液体体积为 $v_0 t$，水面高为 h，半径为 r，即有 $v_0 t=\frac{\pi}{3}r^2 h$. 由于 $r=\frac{R}{H}h$，代入并化简，得容器内液高 h 与时间 t 的函数关系为

$$h=H\left(\frac{v_0}{V}t\right)^{\frac{1}{3}}.$$

其中 $V=\frac{\pi}{3}R^2 H$. 由问题的实际意义，函数的定义域是

$$A=\left\{t\,\middle|\,0\leqslant t\leqslant\frac{V}{v_0}\right\}.$$

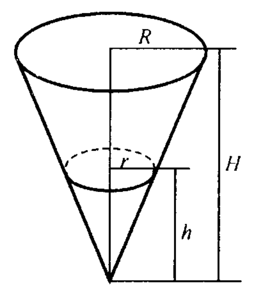

图 1-1

例 2　求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\log_2(9-x)}$ 的定义域.

解　分子 $\sqrt{x^2-4}$ 的定义域 $A_1=\{x\mid |x|\geqslant 2\}$，分母 $\log_2(9-x)$ 的定义域 $A_2=\{x\mid x<9\}$，又分母取 $A_3=\{8\}$ 时为零，因此函数 f 的定义域（自然定义域）为

$$(A_1\cap A_2)-A_3=\{x\mid x\in(-\infty,-2]\cup[2,8)\cup(8,9)\}.$$

二、分段函数

在许多问题中，一个函数在它的定义域内的一些不相重叠的真子集中，其对应法则须用不同的数学表达式来表示，这样的函数称为**分段函数**. 下面举几个分段函数的例子：

例 3　一脉冲器发生的三角波（图 1-2），在一个周期 T 内其电压 V 与时间 t 的关系为：

当 $0\leqslant t<\frac{T}{2}$ 时，$V=t$；

当 $\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant T$ 时，$V=T-t$.

这一波形可用分段函数表示为

$$V=V(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<\dfrac{T}{2};\\ T-t, & \dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

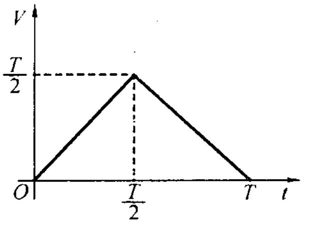

图 1-2

这个函数的定义域是 $[0,T]$，值域是 $[0,\frac{T}{2}]$.

例 4　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

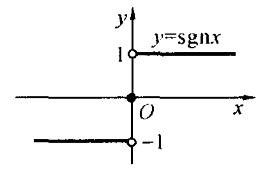

图 1-3

也是分段函数(图 1-3),其定义域是$(-\infty, +\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$.

例 5　取整函数　对任意的 $x \in \mathbf{R}$,用记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数,从而得到一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y = [x] = \begin{cases} \cdots\cdots \\ -1, & -1 \leqslant x < 0; \\ 0, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & 1 \leqslant x < 2; \\ \cdots\cdots \\ n, & n \leqslant x < n+1; \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

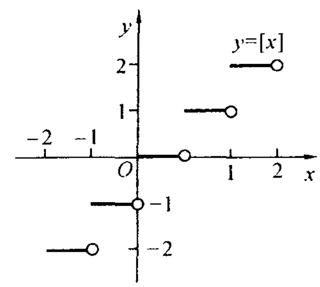

图 1-4

它称为**取整函数**(图 1-4),$[x]$称为 x 的**整数部分**.例如:

$[-0.32] = -1, [0.32] = 0, [1.32] = 1, [3.1416] = 3.$

取整函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$,值域是 $\mathbf{Z}$.

取整函数有如下的重要性质:

(1)　$[x] \leqslant x < [x] + 1$ 或 $x - 1 < [x] \leqslant x, x \in \mathbf{R}$;

(2)　$[x + n] = [x] + n, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$.

第二节　　几类有某种特性的函数

一、有界函数

设函数 $f(x)$ 的定义域是 A, $A_1 \subset A$,若对 $x \in A_1$ 上所有函数值 $f(x)$ 所成的数集$\{f(x), x \in A_1\}$上有上界(或下界),则称函数 $f(x)$ 在 A_1 上有上界(或下界).如果 $f(x)$ 的值域$\{f(x), x \in A\}$是有界集,则称函数 $f(x)$ 在其定义域 A 上是**有界函数**,否则,称为**无界函数**.

例如 $\arctan x$ 是有界函数,因它的值域$\{\arctan x, x \in (-\infty, +\infty)\}$有界,即存在正数 $\frac{\pi}{2}$,使得$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, +\infty)$.

又如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$内无界,因对任意给定的正数 G(不管正数 G 多么大,不妨设 $G > 1$),总存在 $x_0 = \frac{1}{2G} \in (0,1)$ 使得

$$|f(x_0)| = \frac{1}{|x_0|} = \frac{1}{x_0} = 2G > G,$$

即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上的值域无界，它是无界函数.

二、单调函数

设函数 $f(x)$ 的定义域是 A，$A_1 \subset A$，若对任意的 $x_1,x_2 \in A_1$，且 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)), \tag{1.4}$$

则称函数 $f(x)$ 在 A_1 上是**单调增（或单调减）函数**.

在(1.4)式中，若将"$\leqslant$"（或"$\geqslant$"）改为"$<$"（或"$>$"），则称 $f(x)$ 在 A_1 上是**严格单调增（或严格单调减）函数**.

若在整个定义域 A 中，具有上述性质的函数，统称**单调函数**或**严格单调函数**.

例如 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上严格单调减；在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调增，而在定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

又如 $f(x)=[x]$ 在定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调函数，但不是严格单调函数.

三、奇函数与偶函数

设函数 $f(x)$ 的定义域 A 关于原点对称，即当 $x \in A$ 时，必有 $-x \in A$. 若对任意的 $x \in A$，都有

$$f(-x)=-f(x) \quad (\text{或 } f(-x)=f(x)), \tag{1.5}$$

则称 $f(x)$ 在定义域 A 上是奇函数（或偶函数）.

在直角坐标系 xOy 下，奇函数的图形关于原点是对称的；偶函数的图形关于 y 轴是对称的.

例如 $\sin x$，$\arctan x$，$\operatorname{sgn} x$ 是奇函数；$\cos x$，$|x|$ 是偶函数.

四、周期函数

设函数 $f(x)$ 的定义域是 A，若存在非零常数 T，使得对任意 $x \in A$，且 $(x \pm T) \in A$，都有

$$f(x+T)=f(x), \tag{1.6}$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**，常数 T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期是指最小正周期（如果存在的话），周期函数的自然定义域是 $\mathbf{R}$ 中的无界数集.

例如 $\sin x$，$\cos x$ 以 2π 为周期，$\tan x$，$\cot x$ 以 π 为周期，常值函数 $f(x)=C$（常数）以任何实数为周期，但没有最小正周期.

第三节　　复合函数

当一个函数的值域或部分值域包含在另一个函数的定义域之内时，那么这两个函数可以组成一个新的函数. 例如

$$y=\sqrt{u}, \quad u=\log_2 x.$$

当 $x \in [1,+\infty)$ 时，$u=\log_2 x \geqslant 0$，即其部分值域都包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域之内，于是 $y=\sqrt{u}$ 通过中间变量 $u=\log_2 x$ 建立了 y 与 x 的对应关系，从而得到一个新的函数，记为