

数理化基础知识丛书

初中数学基础知识

代 数

第四册

北京实验中学数学教研室 编

北京教育出版社

数理化基础知识丛书
初中数学基础知识代数第四册
北京实验中学数学教研室 编

*

北 京 出 版 社 出 版
(北京北三环中路 6 号)
新华书店北京发行所发行
北 京 印 刷 一 厂 印 刷

*

787×1092毫米 32开本 6印张 120,000字
1983年8月第1版 1983年8月第1次印刷
印数: 1—7,900

ISBN 7-5303-0039-3/G·32

定 价: 1.70元

编写说明

为了帮助广大青年和在校学生学好数、理、化，我社约请北京市人大附中、北大附中、清华附中、北京实验中学等校的有经验的教师共同编写了数理化基础知识丛书。

《初中数学基础知识》共分六册与课本相对应。各册均分章编写，每章包括内容提要，重点、难点解析，典型例题，练习和自我检查题，最后附答案或提示。书中对初中数学基础和概念作了由浅入深的剖析，对学生学习初中数学中不易理解之处，易出差错易混淆的内容，作了详尽的讲解和辅导。对解题的思路、方法、技巧进行了全面的介绍。

本书是《初中数学基础知识代数》第四册，可以作为在校学生学习数学的辅导书，也可以作为中学数学教师的教学参考书。

本书编写组成员是北京实验中学蔡晓东、杨淑云、金元、张春条、李芳宜、张继林、任孝娟、储瑞年。

由于我们的水平有限，难免出现一些错误和缺点，希望读者批评指正。

目 录

第十三章 常用对数	1
一、内容提要.....	1
二、重点、难点解析.....	1
1. 对数概念.....	1
2. 指数式和对数式互化.....	3
3. 对数的性质.....	4
4. 关于对数式中字母的取值范围.....	4
*5. 对数恒等式.....	5
6. 对数的运算法则.....	6
7. 对数运算法则的应用.....	8
8. 常用对数.....	10
三、典型例题.....	23
习题十三.....	35
自我检查题十三.....	38
第十四章 函数及其图象	41
一、内容提要.....	41
二、重点、难点解析.....	41
1. 平面直角坐标系.....	41
2. 函数及其图象.....	50
3. 函数种类及其图象.....	54
4. 关于作函数的图象.....	64
5. 根据已知条件求二次函数解析式.....	70

6. 观察图形得到二次函数的有关性质	73
7. 二次函数极值的应用	74
8. 一元一次不等式组及其解法	76
9. 一元一次不等式的应用题	79
10. 一元二次不等式	80
11. 一元二次不等式的应用	84
三、典型例题	87
习题十四	110
自我检查题十四	113
第十五章 解三角形	116
一、内容提要	116
二、重点、难点解析	116
1. 三角函数的概念	116
2. 三角函数表	124
3. 解直角三角形	127
4. 直角三角形的解法应用	131
5. 解斜三角形	134
6. 利用斜三角形的解法解应用题	145
三、典型例题	147
习题十五	173
自我检查题十五	176
答案或提示	179

第十三章 常用对数

一、内 容 提 要

本章的主要内容:对数和常用对数的概念及其性质,对数的运算法则,对数表和反对数表的用法,利用对数进行计算.

对数与常用对数的概念及其性质和利用对数进行计算是这章学习的重点.

对数和常用对数及其首数和尾数的概念,对数恒等式和含有负首数的计算,常用对数的查表,尤其是真数为纯小数时的情况查表是这章学习的难点.

学习这章内容的关键在于掌握好对数的运算性质,为此必须透彻理解对数的定义.

这章概念与方法较多,要求大家作到运算熟练,掌握解题步骤,注意格式的规范化.

二、重点、难点解析

1. 对数概念

对数的概念是在指数概念的基础上建立起来的,指数与对数有什么关系呢?

指数式 $a^b = N$ 中有三个量:底数—— a ,指数—— b ,幂—— N .只要已知 a 、 b 、 N 三个量中的两个量,就可以求出

第三个量。例如：已知 a 、 b ，求 N ，这是求幂的问题，可以用乘方运算来解决；已知 b 、 N ，求 a ，这是求底数的问题，可以用开方运算来解决；已知 a 、 N ，求 b ，这是求指数的问题，用什么运算来解决呢？这就是本章要解决的问题，即对数和对数的运算。

定义：如果 a 是一个不等于1的正数， a 的 b 次幂等于 N ，那么 b 就叫做以 a 为底的 N 的对数。记作： $\log_a N = b$ ，($a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ， $N > 0$)。

理解定义要注意以下几点：

(1) 弄清对数式 $\log_a N = b$ 的含义，即各数相对于指数式中的什么数，找出它们之间的联系和区别。

(2) 对数用符号“log”来表示，书写时要规范。底数与真数书写的位置要分清。“log”如同“+”、“-”，“ $\times$ ”、“ $\sqrt{\quad}$ ”等符号，表示一种运算，即对数运算。

(3) 注意对数式 $\log_a N = b$ 中字母的取值范围，为什么规定 $a > 0$ ， $a \neq 1$ 呢？我们可以与指数式 $a^b = N$ 中的底数 a 的条件对照考虑：

如果 $a < 0$ ，那么 N 取某些值时， b 不存在，例如在 N 取 -4 时 $\log_{(-2)}(-4) = ?$ 可见 b 是不存在的。

如果 $a = 0$ ，当 N 不为0时，那么 b 不存在，例如在 N 取2时， $\log_0 2$ 是不存在的；当 N 为0时， b 可为任何正数，是不唯一的，也就是说 $\log_0 0$ 有无数个值。

如果 $a = 1$ ，当 N 不为1时， b 不存在，例如 $\log_1 3$ 不存在； N 为1时， b 可为任何数，是不唯一的，也就是 $\log_1 1$ 有无数个值。

因此，为了保证当 b 取任何实数时 N 都是存在而且唯一的，对于不同的数值， N 总有不同的值与之对应，所以规定

了 $a > 0$, 且 $a \neq 1$.

在对数式 $\log_a N = b$ 中又为什么限定 $N > 0$ 呢? 这是由于在实数范围内, 正数的任何次幂都是正数, 因而 $a^b = N$ 中的 N 总是正数, 故对数式中必须 $N > 0$.

2. 指数式和对数式互化

由于指数式 $a^b = N$ 和对数式 $\log_a N = b$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $N > 0$), 表达了 a 、 b 、 N 三个数之间的同一种关系, 对数式 $\log_a N = b$ 只不过是指数式 $a^b = N$ 的改写, 但是它们又有本质上的区别. 指数式是已知 a 、 b 求 N ; 而对数式是已知 a 、 N 求 b 的问题. 在底数相同的条件下, 对数式和指数式可以互化(即把对数运算转化为指数运算). 这样给解对数问题带来方便.

例1 将下列指数式改写成对数式:

$$(1) 3^4 = 81; \quad (2) \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2; \quad (3) 5^0 = 1;$$

$$(4) 10^{-2} = 0.01.$$

解 (1) $\because 3^4 = 81, \therefore \log_3 81 = 4;$

$$(2) \because \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2, \therefore \log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{1}{2};$$

$$(3) \because 5^0 = 1, \therefore \log_5 1 = 0;$$

$$(4) \because 10^{-2} = 0.01, \therefore \log_{10} 0.01 = -2.$$

例2 将下列对数式改写成指数式:

$$(1) \log_3 27 = 3; \quad (2) \log_{\frac{1}{9}} 3 = -\frac{1}{2};$$

$$(3) \log_7 1 = 0; \quad (4) \log_{10} 10 = 1.$$

解 (1) $\because \log_3 27 = 3, \therefore 3^3 = 27;$

$$(2) \because \log_{\frac{1}{3}} 3 = -\frac{1}{2}, \therefore \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3,$$

$$(3) \because \log_7 1 = 0, \therefore 7^0 = 1;$$

$$(4) \because \log_{10} 10 = 1, \therefore 10^1 = 10.$$

3. 对数的性质

(1) 零和负数没有对数;

(2) 底的对数等于1, 即 $\log_a a = 1$;

(3) 1的对数等于零, 即 $\log_a 1 = 0$. ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

性质(1)是从对数式 $\log_a N = b$ 中直接得到的, 式中的 a 是一个不等于1的正数, 对于任意实数 b , $a^b = N$ 都是正数, 所以 N 必定是正数, 也就是零和负数没有对数.

4. 关于对数式中字母的取值范围

指出下列各对数式中字母 x 的取值范围. (已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$)

$$(1) \log_a 3x; \quad (2) \log_a (x-1); \quad (3) \log_a x^2;$$

$$(4) \log_a \sqrt{x-1}; \quad (5) \log_a (1-|x|).$$

解 (1) $\because$ 仅当 $3x > 0$ 时, $\log_a 3x$ 才有意义,

$$\therefore x > 0.$$

$$(2) \because x-1 > 0, \therefore x > 1.$$

$$(3) \because x^2 > 0, \therefore x \neq 0.$$

$$(4) \because \sqrt{x-1} > 0, \text{ 即 } x-1 > 0, \therefore x > 1.$$

$$(5) \because 1-|x| > 0, \text{ 即 } |x| < 1, \therefore -1 < x < 1.$$

说明: 求字母 x 的取值范围, 就是解出使对数式有意义的 x 的值, 它和解不等式紧密相关.

*5. 对数恒等式

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $N > 0$ 时, 式子 $a^{\log_a N} = N$ 和 $\log_a a^b = b$ 叫做对数恒等式, 这两个式子实质上是对数定义用公式形式的一种表达.

$$\because \text{若 } a^b = N, \text{ 则 } b = \log_a N, \therefore a^{\log_a N} = N.$$

$$\because \log_a N = b, \therefore N = a^b, \therefore \log_a a^b = b.$$

例 化简: $3^{1+\log_3 5} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 2}$

解 原式 $= 3 \times 3^{\log_3 5} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 2}$

$$= 3 \times (3)^{\log_3 5} + (3^{-1})^{\log_3 2}$$

$$= 3 \times 5 + 3^{-\log_3 2}$$

$$= 15 + \frac{1}{3^{\log_3 2}}$$

$$= 15 + \frac{1}{2}$$

$$= 15\frac{1}{2}.$$

应用对数恒等式时要注意以下三点:

(1) 公式成立的条件: $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $N > 0$.

(2) 应用对数恒等式时, 必须要使幂的底数和对数的底数相同.

(3) 它的作用在于能把任意一个正数 N 写成以 a 为底的幂的形式, 这时指数是 $\log_a N$.

例如 $5^{\log_5 7} = 7$, $25^{\log_5 7} = 7$.

* 属于选学内容, 下同.

6. 对数的运算法则

积、商、幂、方根的对数的求法，直接影响到能否正确，熟练地利用对数进行计算，是解题的重要基础。而正确掌握和运用公式的关键是透彻地理解公式的实质，所以不能死背公式，要理解和掌握公式的产生和推导过程。

当我们要计算（1） 16×64 或（2） $1024 \div 64$ 时，用竖式乘、除法计算比较麻烦，如果能把已知数据化成以某一个正数为底的幂的形式，便可以利用指数法则来简化运算。即： $16 \times 64 = 2^4 \times 2^6 = 2^{10} = 1024$ ， $1024 \div 64 = 2^{10} \div 2^6 = 2^4 = 16$ 。由于指数式和对数式中幂与真数，指数与对数的对应关系，当真数是两个正数的乘积时，它的对数就等于两个因数的对数的和。

对于同一底数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，两个（或多个）真数乘法运算可以转化为对数的加法运算，这样就可以使计算过程简化。

$$\text{例 } \log_a (M \cdot N \cdot P \cdots G) = \log_a M + \log_a N + \log_a P \\ + \cdots + \log_a G.$$

下面将对数的运算法则分别用语言表达和式子表达如下：

（1）两个正数的积的对数等于这两个正数的对数的和： $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$ 。

（2）两个正数的商的对数等于被除数的对数减去除数的对数： $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ 。

（3）正数的幂的对数等于幂底数的对数乘以幂指数： $\log_a M^n = n \cdot \log_a M$ 。

（4）根式的对数等于被开方数的对数除以根指数：

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{\log_a M}{n}.$$

为了更好的掌握法则应注意以下几点:

(1) 注意法则中各字母的取值范围: $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 幂的对数法则中 n 是一切实数, 根式的对数法则中 n 是大于 1 的整数.

(2) 由商的对数法则中可知: 当 $M = 1$ 时变为 $\log_a \frac{1}{N}$
 $= \log_a 1 - \log_a N = -\log_a N$, 或者根据幂的对数法则计算可得 $\log_a \frac{1}{N} = \log_a N^{-1} = -\log_a N$, 即: 某正数的倒数的对数, 等于此正数的对数的相反数.

(3) 根据对数运算法则, 可以把乘、除、乘方、开方的运算转化为加、减、乘、除的运算. 也就是说, 利用对数的运算法则可以把高一级的运算转化为低一级的运算, 把复杂的运算转化为简单的运算, 不仅加快了运算速度, 也简化了计算方法, 显示了利用对数进行计算的优越性.

使用对数运算法注意防止以下错误:

$$\log_a (M \pm N) = \log_a M \pm \log_a N;$$

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M \cdot \log_a N;$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \frac{\log_a M}{\log_a N};$$

$$\log_a M^n = (\log_a M)^n;$$

$$\log_a M \cdot \log_a N = \log_a M + \log_a N;$$

$$\frac{\log_a M}{\log_a N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$(\log_a M)^n = n \log_a M;$$

$$\sqrt[n]{\log_a M} = \frac{1}{n} \log_a M.$$

还需注意：只有所得结果中的对数和所给的对数都存在时等式才能成立。

例如 $\log_2(-5)(-8) \neq \log_2(-5) + \log_2(-8)$ 。

虽然 $\log_2(-5)(-8)$ 是存在的，但是 $\log_2(-5)$ 与 $\log_2(-8)$ 是无意义的。同样 $\log_3(-3)^2 \neq 2\log_3(-3)$ ，因为 $\log_3(-3)$ 无意义。

为了防止以上错误，在作题时先想一想每一步计算的根据是什么，然后再动笔写，强调应用对数运算法则时，明确法则中各字母的取值范围。

例 判断下列计算是否正确

$$(1) \log_5 8 \cdot \log_5 2 = \log_5 16;$$

$$(2) \frac{\log_2 10}{\log_2 8} = \log_2 2 = 1;$$

$$(3) \frac{\log_4 8}{\log_4 2} = \log_4 4 = 1;$$

$$(4) \log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{\sqrt{3}} 3^3 = 3;$$

$$(5) \log_{27} \sqrt[3]{3} = \log_{27} \sqrt[6]{27} = \frac{1}{6}.$$

解 (1) (2) (3) (4) 均不正确，(5) 正确。

7. 对数运算法则的应用

应用对数运算法则，把 n 个正数的幂或算术根相乘、除所得的式子，用式子里的各个数的对数来表示，称为展开对数式。

例 1 展开对数式 $\log_a \sqrt[3]{z(x^2 - y^2)}$ 。

分析：取式子的对数时，应当先分析代数式中有哪几种运算及它们的顺序（此题有开方运算，乘法（乘方）运算），找出最后一步运算，然后从最后一个运算开始，把代数式化为对数式。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= \frac{1}{3} \log_a [x(x+y)(x-y)] \\ &= \frac{1}{3} \log_a x + \frac{1}{3} \log_a (x+y) + \frac{1}{3} \log_a (x-y)\end{aligned}$$

在解题过程中经常把对数的运算法则反过来应用，即当 $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时，

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN;$$

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N};$$

$$n \log_a M = \log_a M^n \quad (n \text{ 是一切实数});$$

$$\frac{1}{n} \log_a M = \log_a \sqrt[n]{M} \quad (n > 1 \text{ 的整数}).$$

从某一个式子的对数求出这个式子，这种方法叫做“从式子的对数求原式”。

例2 根据已知条件求 x 。

$$(1) \log_5 x = \frac{1}{3} \log_5 8 + \log_5 \frac{1}{2};$$

$$(2) \log_{10} 10x + 1 = 3 \log_{10} x;$$

$$(3) \log_a x = 5 \log_a m + \frac{2}{3} \log_a n - \frac{1}{3} \log_a P.$$

$$\begin{aligned}\text{解 (1)} \quad \because \log_5 x &= \frac{1}{3} \log_5 8 + \log_5 \frac{1}{2} \\ &= \log_5 \sqrt[3]{8} + \log_5 \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$= \log_5 \left(2 \times \frac{1}{2} \right) = \log_5 1$$

$$\therefore x = 1.$$

$$(2) \because \log_{10} 10x + \log_{10} 10 = 3 \log_{10} x$$

$$\log_{10} (10x \cdot 10) = \log_{10} x^3.$$

$$\log_{10} (100x) = \log_{10} x^3.$$

$$100x = x^3.$$

$$x^3 - 100x = 0.$$

$$x(x^2 - 100) = 0.$$

解得 $x = 0, -10, 10.$

$\therefore x$ 必须大于 0, $\therefore x = 10.$

$$(3) \because \log_a x = 5 \log_a m + \frac{2}{3} \log_a n - \frac{1}{3} \log_a P$$

$$= \log_a m^5 + \log_a \sqrt[3]{n^2} - \log_a \sqrt[3]{P}$$

$$= \log_a \frac{m^5 \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{P}},$$

$$\therefore x = \frac{m^5 \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{P}}.$$

8. 常用对数

用10做底的对数叫做常用对数，因为我们的记数法是十进制位的，用10做底来取对数，在运算上是很方便的。

常用对数不仅具有对数的一切性质，而且有它的特殊性质，利用这些性质就可以造表和使运算大大简化。不是以10为底的对数可以通过换底公式（高一代数中会学到）代作以10为底的对数，所以常用对数的应用范围十分广泛。

(1) 常用对数的性质。

① 10的整数次幂的对数是一个整数，它等于幂的指数，即 $\lg 10^n = n$ (n 为整数)。

② 当真数较大时，对数也较大。

③ 10的整数次幂以外的正数的对数都是小数。

④ 所有正数的对数都可以写成一个整数与一个正的纯小数（或者零）的和的形式。

⑤ 对于仅小数点位置不同的数，它们的对数的尾数都相同，但首数不同。

(2) 对数的首数和尾数。

任何一个正数 N 都可以用科学记数法来表示。即 $N = a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为整数。

$$\begin{aligned}\text{所以 } \lg N &= \lg(a \times 10^n) = \lg a + \lg 10^n = \lg a + n \lg 10 \\ &= n + \lg a,\end{aligned}$$

又 $\because 1 \leq a < 10$ ，则 $\lg 1 \leq \lg a < \lg 10$ ，

$$\therefore 0 \leq \lg a < 1.$$

可见 $\lg N$ 可以表示为一个整数与一个正的纯小数（或者零）的和的形式。

首数的求法，就是把真数 N 用科学记数法写成 $a \times 10^n$ ， n 为所求的首数；也可以用真数的位数直接确定：

大于1的真数的对数的首数等于这个真数的整数位数减1，例如 $\lg 34560$ 的首数是真数34560这个五位整数的位数5减1为4。

小于1的真数的首数是一个负整数，它的绝对值等于真数中第一个非零数字前边零的个数（包括个位上的零）。例如 $\lg 0.005456$ 的首数是个负整数，其绝对值是第一个非零数字5前边零的个数3（包括个位上的零），记做 $\overline{3}$ 。

对数的尾数可用常用对数表查出。只有小数点位置不同

的数，它们的对数的尾数都相同，也就是说有效数字顺序相同的数，它们的对数尾数是完全相同的。这是常用对数区别于其它对数的特殊性质，这个性质给运算带来方便，使编制对数尾数表成为可能。

例1 $\lg 5.403 = 0.7326$.

$$\begin{aligned}\lg 540.3 &= \lg(5.403 \times 10^2) = \lg 5.403 + \lg 10^2 \\ &= 0.7326 + 2 = 2.7326.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lg 0.0005403 &= \lg(5.403 \times 10^{-4}) = \lg 5.403 \\ &+ \lg 10^{-4} = 0.7326 + (-4) \\ &= \bar{4}.7326\end{aligned}$$

很明显，上面三个数的尾数部分是相同的，所差的只是首数部分。

例2 一个数的对数的首数是 m ，尾数是 n ，求它的倒数的对数的首数及尾数。

解 设这个数为 x ，由 $\lg x = m + n$

$$\text{可得 } \lg \frac{1}{x} = -\lg x = -m - n.$$

这时如何确定 $\frac{1}{x}$ 的对数的首数和尾数呢？由题目的已知条件知， m 是整数，而 n 是正的纯小数或零，此处 $-m$ 当然表示整数，而 $-n$ 一定是负的纯小数或零，当然 $-n$ 在 $n \neq 0$ 是不能作对数的尾数，怎么办？可将结果变形：

$$\lg \frac{1}{x} = -(m+1) + (1-n).$$

$\therefore \frac{1}{x}$ 的对数的首数为 $-(m+1)$ 。当 $n \neq 0$ 时尾数为

$1-n$ 。当 $n=0$ 时，首数是 $-m$ ，尾数是 0 。