常微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG

西南师范大学数学与财经学院编

西南师范大学出版社

常微分方程

西南师范大学数学与财经学院编

西南师范大学出版

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/西南师范大学数学与财经学院编. —重庆:西南师范大学出版社,2005.3

ISBN 7-5621-3329-8

Ⅰ.常... Ⅱ.西... Ⅲ.常微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.0175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 022239 号

常微分方程

西南师范大学数学与财经学院编

责任编辑:朱乃明 李虹利

封面设计:王正端

出版、发行:西南师范大学出版社

重庆·北碚 邮编:400715

印 刷:西南师范大学印刷厂

开 本:850 mm×1168 mm 1/32

印 张:17.375

字 数:436 千字

版 次:2005 年 4 月第 1 版

印 次:2005 年 4 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-5621-3329-8/O·76

定 价:25.00 元

前　　言

与微积分学相伴而长的微分方程，是数学系、计科系等理科学生必修的一门专业基础理论课，它一方面始终直接从与生产实践和科学试验相联系的其他科学技术中汲取活力，另一方面，它始终又不断以全部数学科学（如数学分析、解析几何、线性代数、复变函数、实变函数、拓扑学等）的新旧成就来武装自己，完善自己．它所涉及的问题和方法显得越来越丰富多彩，不仅促使众多的数学工作者去研究微分方程，而且化学、生物学、力学、电子技术、自动控制、星际航行等各个学科或尖端技术领域内的研究工作者也无一不以它为研究的必需工具了．由此可见，它在一般科学中发挥着极其重要的作用．至于它在数学科学内的地位，可以一言以概之：凡是运用无穷小分析法研究的任何对象，大抵都离不开微分方程．因此，微分方程与数学科学的其他分支，也始终是互相联系、互相促进的．

为了搞好微分方程学科的教学工作，笔者在多年从事微分方程教学工作及使用王高雄等编的《常微分方程》教材的实践基础上，根据国家教委“关于制定和实施高等理科教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革研究计划的通知”精神，并结合高等师范院校数学、物理、计算机等专业对常微分方程的基本知识要求编写而成本常微分方程．

微分方程的建立，微分方程的解法以及微分方程解的性质，是微分方程课程的三大基本内容. 本书拟据周 4 学时的教学时间来安排这三大基本内容. 其中，着重论述微分方程的最基本的而且是最经典的内容，它与王高雄等编《常微分方程》教程相类比，主要有以下差异：

1. 关于微分方程的建立

本书明确提出了由简单到复杂，由一般到特殊以及运用微元分析法等建立微分方程的方法. 同时，根据计科系、数学系等理科学生所掌握的专业知识的特点，略去了建立微分方程需要涉及太多其他专业知识(物理学知识)的实例.

2. 关于微分方程的解法

这是本书重点论述的内容.

首先，注意突出最基本而且是最重要的一阶微分方程的初等解法. 其中，加强了更为一般的积分因子法和参数变换法，增添了数值法.

其次，加强了线性微分方程的常数变易法内容，增添了求常系数非齐次线性方程的特解的微分算子法和求常系数线性方程组的算子消去法内容，从而将能求解的常系数线性方程或方程组的范围扩大了不少.

最后，还增加了某些特殊微分方程的特殊解法.

因此，经过本书的学习，相信建立并求解微分方程的能力将有较大程度的提高，对考研的学生亦会有所助益.

3. 关于微分方程解的性质

本书较详细地论述了初值问题解的存在、唯一性定理，解对初

值的连续性、可微性定理等. 至于解的稳定性和定性理论，由于学时限制，所以作为选修内容，安排在本书最后以便选修课程《定性理论与生物数学》教学选用.

本书作为自学教材，成书过程中主要注意实现教材的以下几点基本要求：

1. 坚持试图做到“由浅入深，循序渐进”和“少而精”、“精而细”. 力求重点突出，论证清晰明了，以便于自学. 微分方程的基本定理(存在唯一性定理)的证明中所使用的逐次逼近法是一种重要的分析问题、解决问题的方法，它有很广泛的实际应用，应予认真学习掌握之.

此外，各章后附学习小结，目的是对本章基本内容、基本思想加以概括、总结，以便帮助初学者掌握好各部分的基本内容.

2. 在认真加强基本理论教学的同时，还十分注意运算能力的培养和训练. 为此，本书不但各部分内容都配有一些典型实例，而且各章节末还配有一定数量的习题. 希望通过“解题”这个学习数学的不可缺少的环节，来帮助初学者真正巩固所掌握的基本概念、基本理论和基本方法，最终提高解题能力，掌握解题技巧.

3. 规范解题表述，培养和提高初学者的解题数学修养.

根据近几年的教学实践，发现学生解题很不“规范”，出现许多不该出现的问题，而且要完成各章节后的习题还有相当的难度. 因此，作为负责任的任课教师，为不断提高教学质量，不得不花费较多的时间和精力去认真处理这些问题. 为彻底改变现状，一方面本书注意提供典型范例，让学生参考；而另一方面，又试图将本书各章节后的习题，汇编成规范的《常微分方程习题解答》，作为本课程

的配套辅导读物，提供给初学者学习时参考.相信经过这两方面的努力，定可较大地提高初学者的解题能力和数学修养.

本书由李荣江同志编写，王稳地同志审定.本书的出版发行，得到了西南师范大学数学与财经学院和西南师范大学出版社的大力支持和帮助，在此谨表示深切地感谢.

由于知识水平和教学经验所限，缺点、错误在所难免，恳请同志们批评、指正.

编　者

2000 年 2 月于西南师大

目　　录

第一章　绪论……………………………………………………（1）

§1.1　微分方程的概念与实例 ……………………………（1）

一、微分方程的概念 ……………………………………（1）

二、微分方程的实例 ……………………………………（2）

三、微分方程具有广泛的社会实践性………………………（12）

四、学习微分方程的几点要求 ……………………………（12）

习　题　1.1 …………………………………………………（13）

§1.2　微分方程的大致分类与基本概念………………………（14）

一、微分方程的大致分类 …………………………………（14）

二、微分方程的一些基本概念 ……………………………（16）

习　题　1.2 …………………………………………………（25）

本章学习小结 ………………………………………………（27）

第二章　一阶微分方程的初等解法 ………………………（29）

§2.1　可分离变量方程与变量变换……………………………（29）

一、可分离变量方程…………………………………………（29）

二、可化为可分离变量的方程类型…………………………（33）

三、应用实例 ………………………………………………（44）

习　题　2.1 …………………………………………………（51）

§2.2 线性方程与可化为线性方程的方程…………………… (53)
一、一阶线性方程………………………………………… (53)
二、可化为一阶线性方程的贝努利(Bernoulli)方程 …………… (60)
习 题 2.2 ………………………………………………… (63)
§2.3 恰当方程与积分因子………………………………… (64)
一、恰当方程 ……………………………………………… (64)
二、积分因子 ……………………………………………… (74)
习 题 2.3 ………………………………………………… (89)
§2.4 一阶隐方程………………………………………… (92)
一、一阶隐方程的概念与求解思路………………………… (92)
二、各类型一阶隐方程的解法 …………………………… (93)
习 题 2.4 ………………………………………………… (108)
本章学习小结……………………………………………… (108)
习 题 ……………………………………………………… (113)

第三章 一阶微分方程的初值问题的解的若干问题……… (115)
§3.1 一阶方程初值问题解的存在唯一性 ……………… (117)
一、方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的初值问题解的存在唯一性……………… (117)
二、方程 $F(x,y,y')=0$ 的初值问题解的存在唯一性 ……… (130)
三、初值问题解的存在唯一性定理的某些应用 …………… (132)
四、存在唯一性定理引出的问题 ………………………… (135)
习 题 3.1 ………………………………………………… (149)
§3.2 解的延拓 ………………………………………… (151)
一、问题的提出 …………………………………………… (151)

二、初值问题解的延拓 …………………………………… (152)
习　题　3 2 …………………………………………………… (157)
§3.3　初值问题的解的性质 ……………………………… (157)
一、初值问题的解是自变量、初值的三元函数 ……………… (157)
二、初值问题的解关于初值的一些基本性质………………… (158)
习　题　3.3 …………………………………………………… (171)
本章学习小结…………………………………………………… (172)

第四章　高阶微分方程……………………………………… (175)
§4.1　线性微分方程的一般理论 ………………………… (175)
一、n 阶线性微分方程概述 ………………………………… (175)
二、n 阶齐次线性方程解的性质以及通解的结构 ………… (178)
三、n 阶非齐次线性方程解的性质以及通解的结构 ……… (188)
习　题　4 1 …………………………………………………… (198)
§4.2　常系数线性方程的解法 …………………………… (201)
一、常系数齐次线性方程和欧拉方程的解法………………… (201)
二、常系数非齐次线性方程的解法 ………………………… (213)
习　题　4.2 …………………………………………………… (274)
§4.3　高阶方程的降阶解法和幂级数解法 ……………… (276)
一、降阶解法 …………………………………………………… (277)
二、微分方程的初值问题的幂级数解法和广义幂级数解法 … (286)
三、应用实例 …………………………………………………… (297)
习　题　4 3 …………………………………………………… (300)
本章学习小结…………………………………………………… (301)
一、关于解的性质 …………………………………………… (301)

二、关于求解方法 …………………………………… (302)

第五章 线性微分方程组…………………………………… (304)
§5.1 线性微分方程组的初值问题的解的存在唯一性………
…………………………………………………………… (304)
一、等价性与一般性 …………………………………… (305)
二、一阶线性微分方程组的初值问题解的存在唯一性 ……… (315)
习 题 5.1 …………………………………………… (325)
§5.2 线性微分方程组的一般求解理论 ……………… (326)
一、一阶齐次线性微分方程组的解的性质及通解的结构 …… (326)
二、一阶非齐次线性微分方程组的解的性质及通解的结构 … (339)
习 题 5.2 …………………………………………… (350)
§5.3 常系数线性微分方程组 ……………………… (353)
一、矩阵指数函数 e^{Ax} 的定义和性质………………………… (354)
二、基解矩阵的计算 …………………………………… (361)
三、高阶常系数线性微分方程组及其初值问题的直接解法 … (401)
习 题 5.3 …………………………………………… (406)
本章学习小结……………………………………………… (408)

第六章 稳定性理论问题* …………………………………… (414)
§6.1 基本概念 …………………………………… (414)
一、稳定性概念的提出 ………………………………… (414)
二、稳定性的严格定义 ………………………………… (424)
三、运用稳定性的定义讨论方程或方程组的常数特解的稳定性 ………
…………………………………………………………… (426)

习　题　6.1 ………………………………………………………… (427)
§6.2　二阶及二阶以上的 n 阶常系数线性
　　驻定方程组的奇点类型及零解的稳定性 ……… (428)
一、二阶驻定方程组的奇点及其类型 ……………………… (428)
二、n 阶常系数驻定线性方程组零解的稳定性 ………… (455)
习　题　6.2 ………………………………………………………… (459)
§6.3　n 阶非线性驻定方程组零解的稳定性 ………… (460)
一、按第一近似确定稳定性 ……………………………… (461)
二、李雅普诺夫第二方法 ………………………………… (467)
三、含有时间 t 的 n 阶非驻定方程组的零解的稳定性 ………… (482)
习　题　6.3 ………………………………………………………… (486)
§6.4　二阶驻定方程组的周期解与极限圈 …………… (488)
一、二阶驻定方程组的极限圈的概念 ……………………… (488)
二、极限圈的稳定性的概念 ……………………………… (489)
三、寻求方程组(6.23)的极限圈存在的方法 ……………… (493)
四、研究极限圈及其稳定性问题的实际意义 ……………… (497)
习　题　6.4 ………………………………………………………… (500)
§6.5　二次型 V 函数的构造与
　　一类控制系统的绝对稳定性 ………………………… (502)
一、二次型 V 函数的构造 ………………………………… (502)
二、一类非线性微分方程组的解的全局渐近稳定性与
　　这类方程组的绝对稳定性 ……………………………… (511)
习　题　6.5 ………………………………………………………… (523)
本章学习小结 ……………………………………………………… (524)

答　案 ………………………………………………………… (527)

第一章　绪　论

§1.1　微分方程的概念与实例

一、微分方程的概念

我们知道,反映客观现实世界中物质运动变化规律的量与量之间总是存在着一定的内在联系,研究和揭示这种内在联系,无疑是我们改造自然,战胜自然,利用自然为人类造福、促进社会发展的需要.正是由于这种需要,才促使我们进入到又一个新的应用数学分支——微分方程学科领域中去刻苦攻读,一显身手.

谈到微分方程,我们首先自然会问:什么是微分方程呢?

在中学,我们通过建立方程或方程组,已经揭示了某些反映客观现实世界中物质运动变化规律的量与量之间在某个特定条件下的内在联系,但是还很不够;在大学,我们通过数学分析的研究对象——函数的研究,虽然又将解决这类实际问题的范围扩大了不少,但是仍有较大的局限性.因为在大量的这类实际问题中,遇到较为复杂的一些物质运动变化过程时,反映其变化规律的量与量之间的关系(函数)往往不易直接建立起来,反倒是比较容易地建立这些量与其中某些量的导数或微分的关系式.在数学上,我们把这种联系自变量、未知函数及其导数或微分的关系式,称为微分方程.当然,其中未知函数的导数或微分理所当然是不可或缺的.否则就不是微分方程了.因此,在上述意义下,我们亦可类比于方程的概念,把含有未知函数的导数或微分的等式称为微分方程.

二、微分方程的实例

微分方程作为一门自然科学，同其他科学一样，有着非常广泛的实际背景. 其实早在一元微积分学中，我们就已接触过微分方程，只不过那时未提出微分方程这个概念罢了. 例如下述例 1.1 就是其中之一.

例 1.1 试求作一曲线 $y = f(x)$，使在其上每一点 (x, y) 处的切线斜率均是该点横坐标 x 的 2 倍，且过点(1,2).

解: 为了解决这里的问题，需要有一定的数学知识，例如微积分学知识. 如此，由导数的几何意义及题意，有

$$y' = 2x \tag{1.1}$$

方程(1.1) 含有自变量 x 和未知函数 y 的一阶导数 y'，这样的方程，称为一阶微分方程.

显然，要从(1.1) 中"解出"未知函数 y，只需直接积分(1.1). 如此，得

$$y = x^2 + c \quad (c\ \text{为任意常数}) \tag{1.2}$$

由于(1.2) 中的 c 可取任意常数，所以这时求出的未知函数 $y = x^2 + c$ 的图形是一族抛物线. 显然，我们所要求的曲线 $y = f(x)$ 仅是这一族抛物线中的某一条.

由题意知：所求曲线 $y = f(x)$ 还满足条件：

$$y(x)\,|_{x=1} = 2 \tag{1.3}$$

于是，将(1.3) 代入(1.2) 得

$$2 = 1^2 + c$$

解之，得

$$c = 1 \tag{1.4}$$

将(1.4) 代入(1.2)，得

$$y = x^2 + 1 \tag{1.5}$$

这就是我们所要求的曲线方程.

(1.2) 是通过直接积分微分方程(1.1) 而得到的一族函数，它们自然满足微分方程(1.1)，以后称其为微分方程(1.1) 的“通解”，而(1.5) 是将条件(1.3) 代入“通解”(1.2)，通过确定其中的任意常数 c 值后再代入“通解”(1.2) 而得到的一个函数，它亦满足方程(1.1)，称其为方程(1.1) 满足条件(1.3) 的一“特解”.

注意，在微分方程中，有时为简便计，也不加区别地称“通解”(1.2) 和“特解”(1.5) 是方程(1.1) 的“解”，称条件(1.3) 为方程(1.1) 的“初值条件”或“初始条件”. 同时，我们还把寻求一个微分方程“解”的过程称为解微分方程或简称解方程，有时亦称为积分微分方程.

例 1.2 物体冷却问题.

将某物体置于空气中. 在时刻 $t = 0$ 时，测得它的温度为 $u = 150$ ℃，10 min 后测得它的温度为 $u_1 = 100$ ℃，试确定该物体的温度 u 与时间 t 的关系，并计算 20 min 后该物体的温度. 这里我们假设空气的温度保持为 $u_a = 24$ ℃.

解：(ⅰ) 必备知识：

1°热传导定律：热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的；

2°牛顿(Newton) 冷却定律：在一定的温度范围内，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在介质的温度的差值成比例.

(ⅱ) 建立方程和确定“初始条件”：

设该物体在时刻 t 的温度为 $u = u(t)$，则该物体的温度变化速度为 $\frac{du}{dt}$.

由于该物体将随其置放于空气中的时间 t 的增加而逐渐冷却，所以 $\frac{du}{dt} < 0$

于是，由牛顿冷却定律，有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-u_a) \tag{1.6}$$

其中，$k>0$ 是比例常数.

(1.6) 就是我们所要建立的反映该物体的温度 u 与时间 t 间关系的微分方程.

由题意即知初始条件为：$u(t)\big|_{t=0}=u_0=150$ ℃ (1.7)

(Ⅲ) 解方程

为确定 u 与 t 间的关系，需从(1.6) 中"解出"u. 为此，注意到 u_a 是常数，而且由热传导定律知：$u-u_a>0$，从而可将(1.6) 改写为：

$$\frac{\mathrm{d}(u-u_a)}{u-u_a}=-k\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

如此就使(1.6) 等价地变为(1.8) 而致变量 u 和 t"分离" 开来，从而直接积分(1.8)，得

$$\ln(u-u_a)=-kt+c_1 \quad (c_1\text{ 为任意常数})$$

即

$$u=u_a+e^{-kt+c_1}=u_a+ce^{-kt} \tag{1.9}$$

其中，$c=e^{c_1}>0$ 是常数.

为确定(1.9) 中的 c，将(1.7) 代入(1.9)，得

$$u_0=u_a+ce^{-k\cdot 0}=u_a+c$$

故

$$c=u_0-u_a \tag{1.10}$$

再将(1.10) 代入(1.9)，得

$$u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt} \tag{1.11}$$

为完全确定 u 与 t 间的关系，还需确定(1.11) 中的比例常数 $k>0$. 为此，将条件：

$$u(t)\big|_{t=10}=u_1=100\ ℃$$

代入(1.11)，得

$$u_1=u_a+(u_0-u_a)e^{k\cdot 10}$$

解之,得

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{u_0 - u_a}{u_1 - u_a} \tag{1.12}$$

将(1.12)代入(1.11),得

$$u = u_a + (u_0 - u_a)e^{-\left(\frac{1}{10}\ln\frac{u_0 - u_a}{u_1 - u_a}\right)t} \tag{1.13}$$

再用测得的 $u_0 = 150$ ℃, $u_1 = 100$ ℃ 和假定 $u_a = 24$ ℃ 代入(1.13),得

$$u = 24 + 126e^{-\left(\frac{1}{10}\ln\frac{63}{38}\right)t} \tag{1.14}$$

或

$$u \approx 24 + 126e^{-0\ 051t} \tag{1.15}$$

这样,便可由(1.14)或(1.15)计算出该物体在任意时刻 t 的温度 u 的值或近似值.

例如,当 $t = 20$ min 时,由(1.15)可求得

$$u \approx 24 + 126e^{-0\ 051\times 20} \approx 70\ ℃$$

(Ⅳ)解释“解”的实际意义:

1° 由(1.14)或(1.15)知:$t\uparrow u\downarrow$,这说明该物体将随其置放于空气中的时间 t 的增加而逐渐冷却,这显然与我们的直觉认识是完全一致的;

2° 当 $t \to +\infty$ 时,$u \to u_0 = 24$ ℃,这说明该物体置放于空气中充分长一段时间之后,其温度与空气的温度已充分接近,几乎没有差别了,这亦与我们的直觉认识是完全一致的;

3° 当 $t = 120$ min 时,由(1.15)可计算得 $u \approx 24.3$ ℃,这时该物体的温度与空气的温度较为接近;

4° 当 $t = 180$ min 时,由(1.15)可计算得 $u \approx 24.01$ ℃,这时该物体的温度与空气的温度更为接近,我们的一些测量仪器已测不出它们的差别了。

在实用上,人们就有充分的理由认为:$t = 180$ min 时,该物体