崔远昌

中学数学丛书

多面体与旋转体

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

ZhXShX

多面体与旋转体

崔 远 昌

湖 北 教 育 出 版 社

多 面 体 与 旋 转 体

崔运昌

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

湖北教育出版社印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本　5印张　1插页　103,000字

1986年5月第1版　　1986年5月第1次印刷

印数：　1—4,000

统一书号：7306·237　　定价：0.79元

编者的话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为，这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和

教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系。同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。同时，对教师教学亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》，《概率统计初步》，《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

目　　录

第一章　多面体

§1　多面角

（一）三面角

一个平面内的一条直线把平面分成两部分，每一部分都叫半平面。

从一直线引出的两个半平面所组成的图形叫二面角，这条直线叫二面角的棱，这两个半平面叫二面角的面。若二面角的棱为a、两面分别有点A、B，这个二面角记为A—a—B。

由棱上任意一点O在两个面上分别作射线OA、OB垂直于棱，∠AOB叫二面角的平面角。二面角就是以它的平面角的大小来度量的。

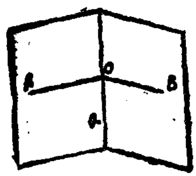

图 1.1

从一点出发并且不在同一平面内的三条射线，以及每两条射线之间的平面部分所组成的图形，叫做三面角，组成三面角的射线叫做它的棱，射线的端点叫做它的顶点，两棱之间的平面部分叫做它的面，两棱组成的角叫做它的面角，两个面之间的二面角叫做它的二面角。如图 1.2 的三面角记为 S—ABC。

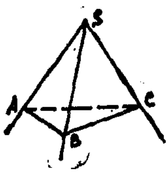

图 1.2

相邻的两面墙壁与天花板所成的屋角就是一个三面角。这样的三面角的三棱两

两互相垂直，这种三面角称为直三面角。

三面角的三棱的反向延长线构成另一个三面角，这两个三面角叫对顶三面角。如图 1.3。

三面角S—ABC，以 S 作三射线SA_0、SB_0、SC_0分别垂直于平面BSC、CSA、ASB，并与射线SA、SB、SC分别在该平面的同侧，那么三面角$S—A_0B_0C_0$与 S—ABC 叫做互补三面角。如图 1.4。

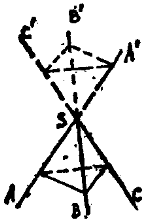

图 1.3

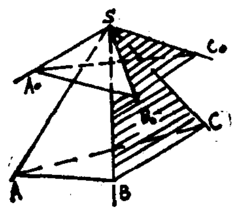

图 1.4

这里要注意到它们的互补：$SC_0\perp SA$，$SB_0\perp SA$，所以也有SA⊥面B_0SC_0。余下类推。

还要注意到：三面角中的二面角与它的棱所垂直的补三面角中的那个面角互补，如二面角 $B_0—SA_0—C_0$与∠BSC互补，这是因为：平面 BSC 截二面角$B_0—SA_0—C_0$，截得的∠B′SC′正是它的平面角，如图1.5，由于SB⊥SC′，SC⊥SB′，所以，∠BSC与∠B′SC′互补。

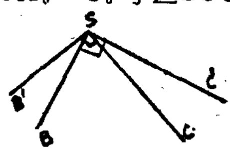

图 1.5

关于三面角还有：

定理 1　三面角任意两个面角之和大于第三个面角，任意两个面角之差小于第三个面角。

证：设三面角S—ABC，如果三个面角相等，定理显然

为真。现设至少有两个面角不等，$\angle ASC>\angle ASB$(图1.6)。在$\angle ASC$内部作SD使$\angle ASD=\angle ASB$，过D引与各棱相交的平面ABC，使$SB=SD$。这时

$$\triangle ASB\cong\triangle ASD,$$

因此，$AB=AD$，但在$\triangle ABC$中，$AB+BC>AC$，由此得到$BC>CD$。

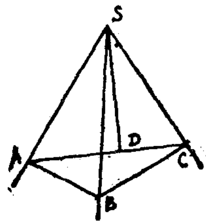

图 1.6

又在$\triangle BSC$、$\triangle DSC$中有两边相等，所以$\angle BSC>\angle DSC$，因此

$$\angle ASB+\angle BSC>\angle ASC,$$

定理前半部得证。

将上式移项$\angle BSC>\angle ASC-\angle ASB$，

定理后半部得证。

应用上一定理又可得

定理 2 三面角各面角之和小于四直角。

证：如图1.7，延长一棱SA得SA′，在三面角$S-A'BC$中

$$\angle BSC<\angle CSA'+\angle A'SB$$
$$=(2d-\angle CSB)+(2d-\angle ASB),$$

移项 $\angle BSC+\angle CSA+\angle ASB<4d$。

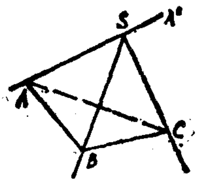

图 1.7

（二）两个三面角的相等

两个三面角中如果对应的面角都相等，对应的二面角都相等，就称两个三面角相等。（如图1.3）

关于两个三面角有下列条件之一则相等。

（1）两个面角和它们之间的二面角对应相等；

（2）两个二面角和它们之间的面角对应相等；

（3）三个面角对应相等；

（4）三个二面角对应相等。

现仅就条件（3）进行证明。

证：设三面角S—ABC和S′—A′B′C′中（图1.8）

$\angle ASB=\angle A'S'B'$，$\angle BSC=\angle B'S'C'$，$\angle CSA=\angle C'S'A'$，

现在取二面角B—SA—C与B′—S′A′—C′比较。

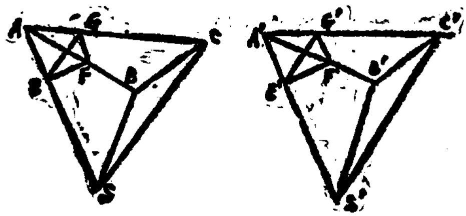

图 1.8

先在各棱上取$SA=SB=SC=S'A'=S'B'=S'C'$，于是得到三对全等的等腰三角形：$\triangle ASB$与$\triangle A'S'B'$；$\triangle BSC$与$\triangle B'S'C'$；$\triangle CSA$与$\triangle C'S'A'$。

从而

$$\angle SAB=\angle S'A'B',\ \angle SAC=\angle S'A'C',$$

又 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$，

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$

得 $\angle BAC=\angle B'A'C'$

其次，因$\angle SAB$、$\angle SAC$都是锐角，可以在线段SA上充分接近点A处取一点E，分别在ASB、ASC 面上作EF、 EG垂直SA，并且与线段AB、AC各交于一点F、G；同样在S′A′上取一点E′，使AE′=AE，同法得出相应的交点F′、G′，于是有$\triangle AEF \cong \triangle A'E'F'$，$\triangle AEG \cong \triangle A'E'G'$，得出$AF=A'F'$，$AG=A'G'$。

$\therefore \triangle AFG \cong \triangle A'F'G'$

得出　$FG=F'G'$，并且由上面得到

$EF=E'F'$，　$EG=E'G'$

最后　$\triangle EFG \cong \triangle E'F'G'$

$\therefore \angle FEG=\angle F'E'G'$

从而　二面角B—SA—C＝二面角B′—S′A′—C′。

同理可证其余两对二面角相等。

从上面可以看出三面角的性质与三角形的性质很类似：三面角的面角与三角形的边对应，二面角与角对应，证明三面角的问题，可以把它归结为证三角形的问题。

（三）多面角

在空间从一点S顺次引出不共面的射线SA、SB、SC、……SK、SL，由S、SA、SB、……SL，以及∠ASB、∠BSC、……∠KSL、∠LSA的内部所构成的图形称为多面角S—ABC……KL。S叫做它的顶点，SA、SB、……SL叫做它的棱，相邻三棱间的平面部分叫做它的面，相邻两棱组成的角∠ASB、∠BSC……∠KSL叫做它的面角，相邻两个面组成的二面角A—SB—C……叫做它的二面角。如图1.9。

我们只考虑仅是相邻两面有公共直线（棱）和一棱仅为两个面角的边的情况，或者说只考虑用一平面与多面角相

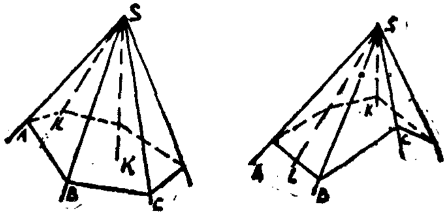

图 1.9

截，在各面上的截痕为简单多边形的情况。

我们允许多面角的面角能大于二直角（如图1.10）。但在一般情况下，我们将它排除在外。

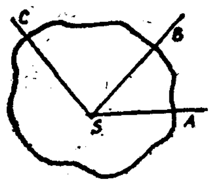

图 1.10

一个多面角的棱数＝面数＝面角数＝二面角数。多面角最少的面数是三，按照它的面数我们叫它是三面角、四面角……。

如果一个多面角的任何一个面伸展成平面，所有其它各面都在这个平面的同侧时，或者说以一个平面截多面角的所有各面和所有各棱得到一个凸多边形时，就叫它是凸多面角。如果1.9的左图。图1.9的右图不是凸多面角。一个多面角的各个面角都相等，各个二面角都相等叫做正多面角。

定理3 任何凸多面角的各面角之和小于四直角。

证：取一个与各棱相交的平面截多面角，以A、B、C、D、……K、L表示与棱的交点，由定理1

$$\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS,$$
$$\angle BCD < \angle BCS + \angle DCS,$$
$$\vdots$$
$$\angle LAB < \angle LAS + \angle BAS,$$

诸式相加，左边是凸多边形 A BC ……KL 的内角和，等于 $(n-2)2d$；右边等于$(2d-\angle ASB)+(2d-\angle BSC)+\cdots\cdots+(2d-\angle LSA)=n2d-(\angle ASB+\angle BSC+\cdots\cdots+\angle LSA)$ 然后移项 $\angle ASB+\angle BSC+\cdots\cdots+\angle LSA<4d$.

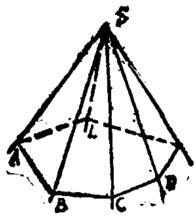

图 1.11

推论 1 凸 n 面角的二面角的和大于 $(2n-4)d$ 而小于 $2nd$.

证：设凸n面角S—ABC……L的二面角的和为Σ，作出它的补n面角S—A′B′C′……L′，因为它们有互补关系，一个面角和相对应的二面角互补，因此n面角S—ABC……L的各二面角与n面角S—A′B′C′……L′的各面角的和为n2d。按上面定理，后者之和小于4d，所以

$$2nd-4d<\Sigma<2nd.$$

即 $$(2n-4)d<\Sigma<2nd.$$

推论2 三面角的二面角的和大于2d而小于6d.

练 习 一

1. 证明多面角的任一面角小于其它面角之和。

2. 一个三面角的两个面角及它们间的二面角分别与另一三面角的两个面角及它们间的二面角相等，则两个三面角全等。

§2 多面体

（一）多面体的概念

客观世界中存在着各种物体，如果除去它们的一切物理性质，而只研究它们的形状、大小和各部分的位置关系，这些物体就被抽象为几何体。

1．多面体

由若干个平面多边形所围成的封闭的几何体叫多面体。根据多边形的面数有四面体、五面体……n面体。各平面多边形（包括其内部）称为多面体的面；各多边形的内角称为该面的面角；各多边形的边称为多面体的棱；共棱的两面所在的半平面组成的二面角称为多面体的二面角；各多边形的顶点称为多面体的顶点；共顶点的棱以及它们所夹的面角构成的多面角称为多面体的多面角。

不在同一面上的两顶点的联线称为多面体的对角线；不在同一面上的三顶点所决定的平面与多面体相截所得的多边形叫做多面体的对角面；不在同一面上的两棱（这两棱所在直线不是异面直线）所决定的平面与多面体相截所得的多边形叫做多面体的对棱面。由此可知，对棱面必定是对角面，但对角面不一定是对棱面。

2．凸多面体

将多面体的任一面无限扩展却再不与多面体相截，这样的多面体称为凸多面体。换句话说，凸多面体对于它的任一面而言，它却在该面的同侧。如图1.12是凸多面体，图1.13

则不是。

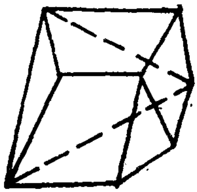

图 1.12

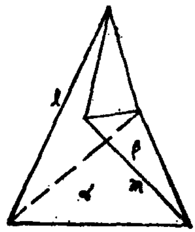

图 1.13

3. 凸多面体的性质

(1) **定理** 凸多面体的各面都是凸多边形。

证：现在假设凸多面体有一面（如图1.13）α是非凸多边形，这个非凸多边形必有一边m延长后与另一边l相交，但m又是面β的一边，将面β扩展后也必与棱l相截（或者说这个多面体不全在β面的一侧），那么，这个多面体就不是凸多面体，与定理中的假设矛盾，故各面都是凸多边形。

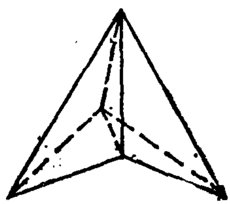

图 1.14

这一命题的逆命题并不真实．即各面为凸多边形的多面体不一定是凸多面体。见图1.14。

(2) **定理** 凸多面体被任意平面所截，所得的截面为凸多边形。

证：截面的任一边m必在多面体的某一面α上，根据凸多面体的定义，α所在平面再不与多面体相截，所以m所在直线与凸多面体再没有公共点，也与截面的其它边无公共点，因此截面是凸多边形。若截面就是多面体的某一面，根

据性质1，本命题也是成立的。这一命题的逆命题也是真实的。

(3) **定理** 任意平面截多面体，若所得的截面都是凸多边形，那么，这个多面体是凸多面体。

证明从略。

根据定理（2）及（3），我们可以这样来定义凸多面体：多面体被任意一平面所截，如果截得的所有截面都是凸多边形，这个多面体叫做凸多面体。

（二）四面体

平面几何里，多边形中最简单的是三角形，一个多边形总可以分割若干个三角形，因此我们通常是通过对三角形的研究来认识多边形的。在立体几何中，最简单的多面体是四面体，一个多面体常常可以通过作它的对角面将它分割成若干个四面体。我们也可以通过对四面体的研究来认识多面体。

四面体中无公共顶点的两棱称为对棱，四面体有三双对棱。

关于四面体还有下面的定理：

定理1 四面体的每一顶点到对面重心所联的四条线段交于一点，且被这点分为3：1。

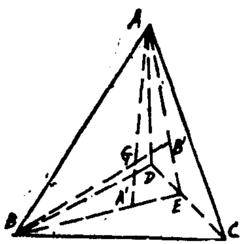

图 1.15

证：四面体 ABCD 按题设的四线段为 AA'、BB'、CC'、DD'。先考虑 AA'、BB'。取CD的中点E，由于 A'、B' 是△BCD、△ACD的重心，所以分别在 BE、AE上，且 AA'、BB' 必相