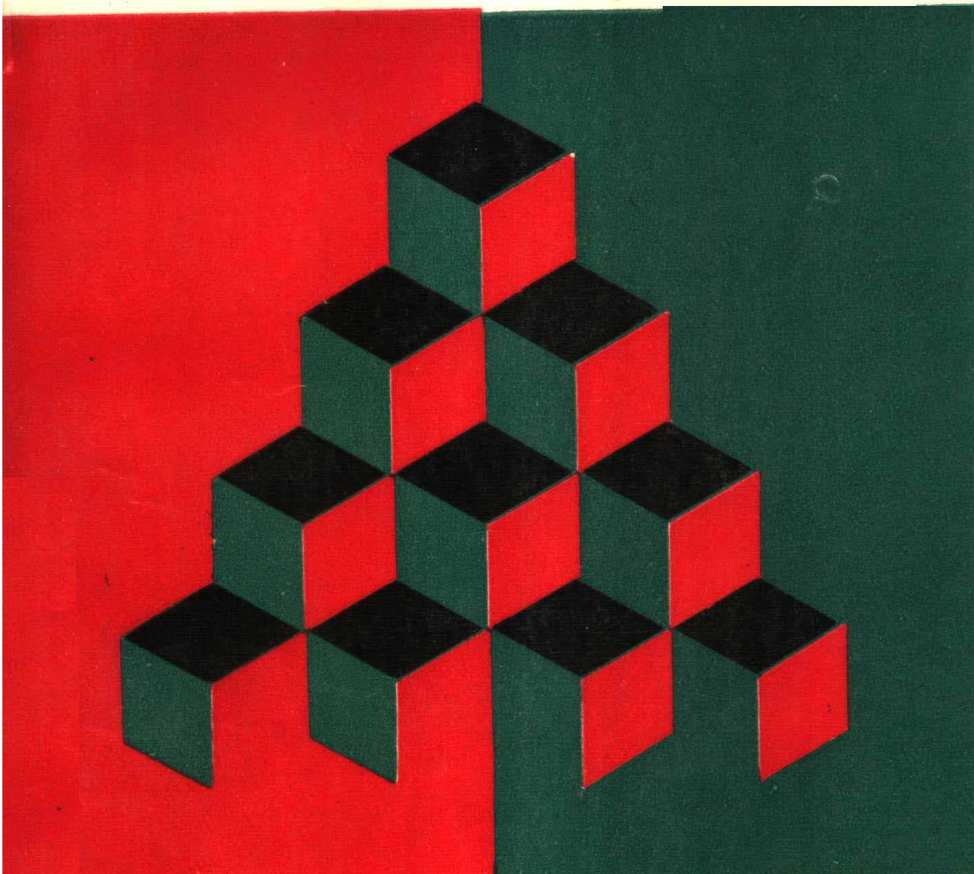
中学生课外读物

# 数列求和

明知白 主编



北京师范大学出版社

# 数 列 求 和

明知白 主编

北京师范大学出版社

封面设计：孙　琳


**数　列　求　和**

明知白　主编

*

北京师范大学出版社出版发行

全　国　新　华　书　店　经　销

中国科学院印刷厂　印刷

开本：787×1092　1/32　印张：6.625　字数：138　千

1990 年　11　月　第 1 版　　1990 年　11　月　第 1 次印刷

印数：1　8 000

ISBN 7-303-00954-X/G・565

定价：2.30 元

# 序

知白同志为我挚友，也是我的良师．他早年以优异成绩毕业于北京大学数学系，近三十年从事中学数学教育的实践和研究，成就卓著．由于大量精辟论文和著作面世，他的名字在全国中学数学界及学生中间广为人所称颂．

而佳作《数列求和》，尤使我钦叹．故在我为东城区或北京市数学奥林匹克学校的学生讲课涉及数列求和问题时，必以它为教材．在北京二十二中，我所教历届学生亦人手一册，不仅作为“数列”部分的补充教材，更是培养能力、发展思维的有力工具，供学生经常翻阅．

《数列求和》一书的内容，源于课本，又高于课本，既有利于加深课内知识的学习，又有利于开拓中学生的知识领域；既有利于使学生学到并扎实地掌握一些重要的技能技巧，又有利于使学生学到一些常用的数学方法和数学思想．因此，无论对于数学成绩优秀生的深造或广大高中学生学好数学，本书都是十分有益的．

全书从讲述等差数列和等比数列求和问题入手，然后讲述可以转化为等差或等比数列求和的问题及群数列中的求和问题，以巩固和加深对课本的学习，但例题的编拟，则新颖别致，趣意盎然；继而引入裂项相消方法，解决分数数列、乘积数列、三角数列等的求和问题；进一步又讨论自然数的方幂和及其应用；最后达于高阶等差数列求和及应用．全书立论清楚，

说理透彻，结构缜密，书中给出的10个定理、25个求和公式中，不少是作者潜心研究的创见，亦有从国外引进的最优方法与最优结果。

全书大部分例题的解法之前有解题思路的分析，之后有解题方法的说明与总结。阅读时，要特别注意这两方面的内容，以有利于学会思考、掌握解题规律，提高解题能力。这两方面的内容，也为青年教师提高自己的业务水平，提供了良好的借鉴。

深入掌握数列求和，不仅将为高等数学中级数理论的学习提供良好的帮助，同时，在中学范围内，又为许多问题的解决提供了便利。某些繁难的题目，用数列求和的方法去处理，令人耳目一新。例如解1989年全国高等学校招生考试（理工类）的第23题：

“是否存在常数 $a$、$b$、$c$，使得等式

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$$

对一切自然数都成立？并证明你的结论。”就是明显的一例。

有鉴于此，我诚挚地向广大中学生和中学青年数学教师推荐《数列求和》一书。

（特级教师，北京市东城区奥林匹克数学学校校长）

孙维刚

1989年11月于北京



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 前　言

数列求和是中学数学中一个十分有趣的课题，它对于加深巩固中学数学课程的学习，开拓中学生的知识领域都十分有益，同时级数理论又是高等数学中一个重要的内容，因此在设计这本中学生读物的写作方案时，我们所依据的三条原则是：

一、“内容要源于课本，高于课本，既有利于加深课内知识的学习，又有利于开拓中学生的知识领域.”为此，首先讲述了等差数列和等比数列的求和问题，以及可以转化为等差数列或等比数列的求和问题，以加深巩固课本的学习. 在例题的选择上，尽量作到新颖有趣，与课本内的题目不重复. 接着，逐步把读者的视野引向分数数列、乘积数列与三角数列，自然数的方幂和、幂数列与多项式数列，以及高阶等差数列的求和. 这样，既能引导中学生用更高的观点认识中学所学的有关内容，又能引导中学生学到一些有用的课外知识.

二、“突出方法，总结规律，启迪思维.”全书以求和方法为主线，按“直接求和法——转化求和法——其他求和法”为线索，先课内，后课外.

为了交给学生思考问题的方法，而不是现成的解题方案，在大部分例题的解法之前有“分析”，即解题思路的分析. 为使学生解题之后有更多的收获，不少例题解完之后有“说明”或“小结”，即解题方法的说明与总结. 总之，力求使学生学会

思考问题的方法和掌握解题的规律。当然，书中所给出的求和方法不一定是最优方案，读者还可以探索更好的方法。

三、为使更多的中学生看懂学会，例题的解答尽可能详尽，超出课本的知识，叙述尽可能通俗易懂，个别问题由于证明繁、难，故省略不写。另一方面，为使读者读后仍有余兴，有些问题则有意的点而不露，让学生们去思考、去探索。

为照顾到各种不同程度的读者，每一节例题的安排由易到难，既顾及到一般水平的高中学生，又兼顾到学有余力或者水平较高的学生。

以上三条原则，是我们写作时努力追求的目标。实际上，由于水平所限，离这个目标还有很大的差距。本书中的缺点、错误与不足之处，敬希读者指正。

参与本书编写与习题核算工作的还有：邵琰明、阎祖聿、明辉等。

# 目　　录

# 引　言

首先讲一个有趣的小故事.

被誉为“数学之王”的德国数学家高斯(*)，在数学和其他许多领域作出了杰出的贡献. 据说他幼年时代就很注意观察事物和思考问题. 他在上小学时，有一天，数学老师布特纳让学生们计算:

$$1+2+3+\cdots+99+100=?$$

老师出完题后，学生们都埋头计算时，小高斯却很快地把写有答案的石板交给了老师. 老师认为这个年仅十岁、全班最小的学生准是瞎写了一个解答，不屑一看. 过了很久，当别的学生都陆续把写有解答的石板交上时，老师大吃一惊，小高斯的答案 5050 是完全正确的，而其他学生却没有算对.

小高斯为什么算得又快又准呢? 原来他是这样作的:

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+98+99+100\\=&\underbrace{(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51)}_{50\text{个}101}\\=&101\times 50\\=&5050.\end{aligned}$$

这里，小高斯已经利用了等差数列(自然数列是公差为 1 的等差数列)的性质来求数列的和，因此十分简捷.

---

(*) 高斯 (Garl Friedrich Gauss, 1777—1855).

这个历史小故事告诉我们，数列求和问题是一个很重要、也很有趣的问题。

我们再看一个实例：

一批圆柱形罐头，堆成方形角锥垛．每一层为正方形，上一层每一边的罐头个数较下层每边个数少一个．如果顶层每边个数为3，最底层每边个数为10，求这堆罐头数的总和．

最底层正方形每边为10个，这一层共$10^2$个，上一层正方形每边少一个，也就是9个，这一层共$9^2$个．以此类推，再上一层共$8^2$个，……，最上一层为$3^2$个，于是这一批罐头总数是

$$3^2+4^2+5^2+\cdots+9^2+10^2.$$

这到底是多少呢？我们可以逐个计算每一个平方数，然后再相加，如果问题是求$1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2+100^2$呢？还是这样逐个平方再相加吗？这似乎有点笨拙了．更一般地，求$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2$，怎么办呢？看来我们有必要寻求新的求和方法了．

“数列求和”问题在日常生活中，在生产、科技的许多领域，广泛地存在着．这本书就是献给学过数列问题或正在学习数列的中学生看的．全书共分四章，第一章讲等差数列与等比数列的求和问题以及可以化为上述两类数列的求和问题．通过这一章的学习，就可以把课本中的有关内容学得更扎实，理解得更透彻．后几章，我们从课本中的一些问题出发，逐步引深推广，把我们带到一个更加开阔、更加有趣的“数列求和”的世界里，这可以极大的丰富我们的数学知识，提高我们的数学思维能力，掌握更多、更有效的“求和”方法．同时，它反过来又可以使我们对课本中的许多问题，理解得更透彻，掌握得更牢固．



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 第一章 等差数列与等比数列的求和

## §1.1 直接求和法

如果所给数列是等差数列或等比数列，那么它们的求和问题，可以直接利用求和公式．在中学课本中，主要学习并掌握以下三套求和公式：等差数列前 $n$ 项和公式，等比数列前 $n$ 项和公式，无穷递缩等比数列各项和公式．下面，把这三类求和公式作一些归纳与重要说明．

**（一）等差数列前 $n$ 项和公式**

已知 $a_1$，$n$，$a_n$ 时，利用公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \tag{I}$$

求和；

已知 $a_1$，$d$，$n$ 时，利用公式

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \tag{II}$$

求和．

**说明：**

1．公式（I）和（II）共涉及五个量：$a_1$，$d$，$n$，$a_n$，$S_n$，求和时，必须知道 $a_1$，$d$，$n$，$a_n$ 四个量中的三个量．如果给了 $a_1$，$d$，$a_n$ 而项数 $n$ 没有给出，可以利用等差数列通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 求出 $n$ 来．

2. 把 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入公式 (I)，便可以得出公式 (II) 来. 为简单起见，也可以只记公式 (I) 或者只记公式 (II).

**(二) 等比数列前 $n$ 项和公式**

已知 $a_1$, $q$, $n$ 时，利用公式

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1), \\ na_1 & (q = 1). \end{cases} \tag{III}$$

已知 $a_1$, $q$, $a_n$ 时，可以把 (III) 改为

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} \ (q \neq 1). \tag{IV}$$

公式 (III) 和 (IV) 共涉及五个量: $a_1$, $q$, $n$, $a_n$, $S_n$, 求和时，需要知道前四个量中的三个. 如果给了 $a_1$, $n$, $a_n$, 而没有给 $q$, 可以利用 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 求出 $q$ 来.

由上面的分析，我们得出一个重要结论: 不论是等差数列还是等比数列的求和(指前 $n$ 项和)问题，都是在四个量 $a_1$, $d$ (或 $q$), $n$, $a_n$ 中，已知三个量时，去求出 $S_n$ 来.

**(三) 无穷递缩等比数列的各项和公式**

如果一个无穷等比数列的公比 $q$ 的绝对值小于 1, 即 $|q| < 1$, 那么这个数列称为**无穷递缩等比数列**. 所谓"递缩"，是指数列各项的绝对值越来越小.

一个无穷递缩等比数列，它的前 $n$ 项和 $S_n$ 的极限是存在的，这个极限值，就叫做**无穷递缩等比数列的各项和**，求和公式是

$$S = \frac{a_1}{1-q} \ (|q| < 1). \tag{V}$$

下面我们举几个例子来说明这些公式的运用。

**例1** 求

$$\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, \cdots, & n; \\ 2, & 3, & 4, \cdots, & n+1; \\ 3, & 4, & 5, \cdots, & n+2; \\ \cdots\cdots & & & \\ n, & n+1, & n+2, \cdots, & 2n-1 \end{array}$$

这 $n^2$ 个数的和。

**分析**：这个"方阵"的每一横行的 $n$ 个数都是一个等差数列，这是"已知 $a_1$，$n$，$a_n$，求 $S_n$"类型的问题，利用公式（I）可以求和。求出每一横行的数字之和，再把 $n$ 个横行的数字和相加。

**解**：第一横行的数字和是

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

第二横行的数字和是

$$2+3+4+\cdots+(n+1)=\frac{n(n+3)}{2}.$$

第三横行的数字和是

$$3+4+5+\cdots+(n+2)=\frac{n(n+5)}{2}.$$

以此类推，最后一个横行的数字和是

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-1)$$
$$=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

把以上 $n$ 个数相加，得所给"方阵"中 $n^2$ 个数字的和

$$S=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+3)}{2}+\frac{n(n+5)}{2}$$
$$+\cdots+\frac{n(3n-1)}{2}$$
$$=\frac{n}{2}[(n+1)+(n+3)$$
$$+(n+5)+\cdots+(3n-1)].$$

中括号内共有 $n$ 个数，是公差为 2 的等差数列，所以

$$S=\frac{n}{2}\cdot\frac{n[(n+1)+(3n-1)]}{2}=n^3.$$

**另解**：这个“方阵”的第一横行 $n$ 个数的和是 $\frac{n(n+1)}{2}$，而第二横行中的每一个数，都比第一横行中相应的数大 1，所以第二横行数字之和比第一横行数字之和大 $n$，第三横行数字之和又比第二横行数字之和大 $n$，……，因此 $n$ 个横行的数字之和组成一个首项是 $\frac{n(n+1)}{2}$，公差为 $n$ 的等差数列，由公式 (II)，其总和为

$$S_n=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot n=n^3.$$

**说明**：显然，第二种解法要比第一种解法简单得多. 数列求和问题往往不只一种解法，在解题时，我们要多动脑筋思考，尽量选择较好的解法. 这个题目，不用等差数列求和公式，也是可以求和的.

从“方阵”的对角线考虑：

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & & n \\
2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n+1 \\
3 & 4 & 5 & \cdots & & n+1 & n+2 \\
4 & 5 & 6 & \cdots & & n+2 & n+3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & \cdots & 2n-2 \\
n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & \cdots & 2n-1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + 2\times 2 + 3\times 3 + \cdots + n\cdot n \\
&\quad + (n+1)(n-1) + (n+2)(n-2) + \cdots \\
&\quad + [n+(n-1)][n-(n-1)] \\
&= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n^2-1^2) \\
&\quad + (n^2-2^2) + \cdots + [n^2-(n-1)^2] \\
&= n^2 + n^2 + \cdots + n^2 = n\cdot n^2 = n^3.
\end{aligned}
$$

**例 2** 设数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1 = 110,\ a_{n+1} = a_n + 6\ (n \geqslant 1),$$

试求此数列中介于 450 与 600 之间各项之和.

**分析:** 显然 $\{a_n\}$ 为 $A.P$ (等差数列,下同),关键是确定所求各项之和中的首项与末项.

**解:** 由已知,得 $a_{n+1} - a_n = 6$, 因此 $\{a_n\}$ 是公差为 6 的 $A.P$, 于是 $a_n = 110 + 6(n-1)$.

由 $\quad a_n = 110 + 6(n-1) = 6n + 104 \geqslant 450,$

得 $n \geqslant 57.6\cdots$. 于是满足此式的最小整数是 $n = 58$. 因此,超过 450 的最初一项在原数列中居第 58 项,它的值是

$$110 + 6 \times 57 = 452.$$

此外，再从 $a_n=6n+104\leqslant 600$，

得 $$n\leqslant 82.6\cdots.$$

这就是说，满足此式的最大整数是 82。因此，不超过 600 的最后一项在原数列中居第 82 项，它的值是

$$110+6\times 81=596.$$

此外，在 450 与 600 之间共有项数为

$$82-58+1=25.$$

因此，这些项的和，就是首项为 452，末项为 596，项数为 25 的等差数列的和，它的总和是

$$\frac{25(452+596)}{2}=13100.$$

**例 3** 一个等差数列的前 $n$ 项的和等于 $m$，前 $m$ 项的和等于 $n$（其中 $m\neq n$），试求这个数列的前（$n+m$）项的和。

**分析**：已知条件是 $S_n=m$，$S_m=n$。利用公式（II），可以求出 $a_1$ 与 $d$，这样便可以求出 $S_{n+m}$ 来。

**解**：设这个数列的首项为 $a$，公差为 $d$，由已知条件，有

$$\begin{cases} na+\dfrac{n(n-1)}{2}d=m, & ① \\ ma+\dfrac{m(m-1)}{2}d=n. & ② \end{cases}$$

① $\times m-$ ② $\times n$，得

$$\frac{mnd}{2}[(n-1)-(m-1)]=m^2-n^2.$$

$\because\quad n\neq m$，

$\therefore\quad d=-\dfrac{2(m+n)}{mn}.$

由此得



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com