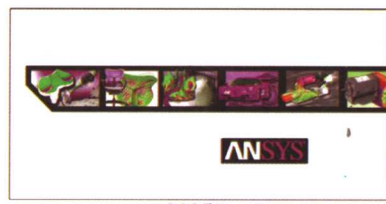


11
高等学校计算机辅助设计规划教材



有限元基础理论

与ANSYS应用



张洪信 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等学校计算机辅助设计规划教材

有限元基础理论与 ANSYS 应用

主 编 张洪信

副主编 吴俊飞 沈孝芹



机械工业出版社

本书介绍了有限单元法的基础理论与 ANSYS9.0 的应用。共分 7 章, 为了兼顾缺乏弹性力学知识的读者, 附录中对有限单元法涉及的弹性力学基本知识作了简要介绍。第 1 章对有限元法及 ANSYS 分析进行全面概述, 以便总体把握个中要点; 第 2 章介绍了有限元法的基础知识及应用, 涉及结构静力学、结构动力学、结构非线性、温度场分析、流体力学分析、电磁场分析等问题的有限元法理论; 第 3~7 章主要讲述 ANSYS 操作, 第 3 章介绍 ANSYS 建模与网格划分, 对连接板、轴类零件、支座类零件、圆柱齿轮等建模过程实例操作; 第 4 章介绍结构线性静力分析过程, 对连杆受力分析、板中圆孔应力集中分析、内六角扳手受力分析、轮子的受力分析等实例操作; 第 5 章介绍动力学分析过程, 对机翼模态分析、电动机系统谐响应分析、梁结构瞬态动力学分析等实例操作; 第 6 章介绍非线性分析过程, 对铜弹冲击刚性壁分析、圆盘塑性变形分析、弹簧卡子的接触分析等实例操作; 第 7 章介绍温度场分析、流体力学分析、电磁场分析、结构优化设计等过程与实例操作。

本书面向高等院校工程专业的本科生或研究生教学使用, 可作为土木、水利、机械等工科专业本科生及研究生教材, 也可以作为工程设计人员的参考书籍。非常利于读者初步掌握有限元方法和 ANSYS 操作, 并提高解决工程结构实际问题的能力。

图书在版编目 (CIP) 数据

有限元基础理论与 ANSYS 应用 / 张洪信主编. —北京:
机械工业出版社, 2006.2

高等学校计算机辅助设计规划教材

ISBN 7-111-18257-X

I. 有... II. 张... III. 有限元分析—应用程序,
ANSYS—高等学校—教材 IV. 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 156223 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 商红云

封面设计: 陈 沛 责任印制: 杨 曦

济南新华印刷厂印刷

2006 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

787mm × 1 092mm 1/16 · 24.75 印张 · 595 千字

定价: 34.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68326294

封面无防伪标均为盗版

教材编写委员会

主任：管殿柱

副主任：宋一兵 米昶

成员：张洪信 吴俊飞 段辉 付本国 田绪东 孙杰 宋琦
温建民 张轩 高丽燕 赵景伟 田东 吴贺荣 宋剑英
石丛刚 赵秋玲 沈孝芹 于复生（排名不分先后）

前 言

本书坚持理论与实践紧密结合的原则，将有限元理论与 ANSYS 操作揉合在一起，以期有助于促进有限元理论与 ANSYS 的学习、应用、推广与普及。

有限单元法是当前工程技术领域中最常用最有效的数值计算方法，已成为现代工程设计技术不可或缺的重要组成部分。ANSYS 软件是融结构、流体、电场、磁场、声场分析于一体的大型通用有限元分析软件。由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国 ANSYS 公司开发，它能与多数 CAD 软件接口，实现数据的共享和交换，如 Pro/ENGINEER、NASTRAN、I-DEAS、AutoCAD 等，是现代产品设计中的高级 CAE 工具之一。

本书是为土木、水利、机械等工科专业本科生、研究生和工程技术人员学习有限单元法和 ANSYS 操作而编写的教材。编者多年从事本科生与研究生有限单元法课程的教学工作，编写时力求深入浅出、概念清晰、思路简明、系统性强。论述以 ANSYS9.0 软件为主，兼顾其他版本；为了能够和其他参考资料相互印证，便于 ANSYS 学习，书中诸多例题以操作过程为主线，有的采用国际单位制单位，有的采用英制单位，尽管 ANSYS 程序中并不特别强调物理量的单位。需要特别指出的是一个分析过程内英制和国际单位制单位不可混用！

本书依次结构静力学问题、结构动力学问题、结构非线性问题、温度场、流体力学及电磁场问题分析的有限元方法及 ANSYS 操作步骤，论述中以 ANSYS9.0 软件为主。为了兼顾缺乏弹性力学知识的读者，附录中对有限单元法涉及的弹性力学基本知识作了简要介绍。第 1 章对有限元法及 ANSYS 分析进行全面概述，以便总体把握个中要点；第 2 章介绍了有限元法的基础知识及应用，涉及结构静力学、结构动力学、结构非线性、温度场分析、流体力学分析、电磁场分析等问题的有限元法理论；第 3~第 7 章主要讲述 ANSYS 操作，第 3 章介绍 ANSYS 建模与网格划分，对连接板、轴类零件、支座类零件、圆柱齿轮等建模过程实例操作；第 4 章介绍结构线性静力分析过程，对连杆受力分析、板中圆孔应力集中分析、内六角扳手受力分析、轮子的受力分析等实例操作；第 5 章介绍动力学分析过程，对机翼模态分析、电动机系统谐响应分析、梁结构瞬态动力学分析等实例操作；第 6 章介绍非线性分析过程，对铜弹冲击刚性壁分析、圆盘塑性变形分析、弹簧卡子的接触分析等实例操作；第 7 章介绍温度场分析、流体力学分析、电磁场分析、结构优化设计等过程与实例操作。书后附录提供了弹性力学的基本方程，以及 ANSYS 程序中常用量和单位的换算关系。

本书主要由张洪信（青岛大学）、吴俊飞（青岛科技大学）、沈孝芹（山东建筑工程学院）编写，另外参加编写的有刘国庆、赵红、霍炜、张翼、田东、杨杰、谈世哲、李仲、杨爱军、许龙、周家庆、温建民、曹立文、张忠林、陈宏、徐祯祥等，全书由管殿

柱主审。

本书根据机械学科教学指导委员会“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神组织编写。

由于写作时间较短，加上水平有限，书中的缺点和错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

本书一些相关资料可以到零点工作室网站 (www.zerobook.net) 上下载。

编 者

2005.10

目 录

前言

第 1 章 有限元法及 ANSYS 概述 1	4.5 轮子受力分析实例182
1.1 发展与现状 1	4.6 本章小结201
1.2 矩阵分析法及有限元法分析 的一般步骤 3	4.7 习题201
1.3 ANSYS 基本操作11	第 5 章 动力学分析203
1.4 本章小结 22	5.1 动力学分析的过程与步骤203
1.5 习题 22	5.2 机翼模态分析实例216
第 2 章 有限单元法基础理论 23	5.3 电动机系统谐响应分析实例227
2.1 结构静力学问题的有限元法 23	5.4 梁结构瞬态动力学分析实例244
2.2 结构动力学问题有限元方法 46	5.5 本章小结257
2.3 结构非线性有限单元法 55	5.6 习题257
2.4 热传导问题有限单元法 67	第 6 章 非线性分析259
2.5 流体力学分析有限元法 78	6.1 基本概念259
2.6 电磁场分析有限单元法 86	6.2 非线性分析的过程与步骤262
2.7 本章小结 92	6.3 铜弹冲击刚性壁的非线性 分析实例269
2.8 习题 93	6.4 圆盘塑性变形分析实例280
第 3 章 ANSYS 建模 95	6.5 本章小结293
3.1 建模基础 95	6.6 习题293
3.2 建立复杂有限元模型103	第 7 章 其他问题分析295
3.3 连接板建模实例105	7.1 热分析295
3.4 轴类零件建模实例 111	7.2 流体动力学分析317
3.5 圆柱齿轮建模实例120	7.3 电磁场分析341
3.6 本章小结130	7.4 结构优化设计359
3.7 习题131	7.5 本章小结378
第 4 章 结构线性静力分析132	7.6 习题379
4.1 结构静力分析过程与步骤132	附录 A 弹性力学的基本方程381
4.2 连杆受力分析实例136	附录 B ANSYS 程序中常用量 和单位385
4.3 圆孔应力集中分析实例153	参考文献387
4.4 内六角扳手静力分析实例163	

第 1 章 有限元法及 ANSYS 概述

CAE 即计算机辅助工程,指工程设计中的分析计算与仿真。CAE 软件可分为专用和通用两类,前者主要是针对特定类型的工程或产品用于产品性能分析、预测和优化的软件。它以在某个领域中的应用深入而见长,如美国 ETA 公司的汽车专用 CAE 软件 LS/DYNA3D 及 ETA/FEMB 等。通用软件可对多种类型的工程和产品的物理力学性能进行分析、模拟、预测、评价和优化,以实现产品技术创新。它以覆盖的应用范围广而著称,如 ANSYS、PATRAN、NASTRAN 和 MARC 等。

目前在工程技术领域内常用的数值模拟方法有:有限单元法(亦称有限元法)(Finite Element Method, FEM)、边界元法(Boundary Element Method, BEM)和有限差分法(Finite Difference Method, FDM)等,但就其实用性和应用的广泛性而言,主要还是有限单元法。作为一种离散化的数值解法,有限单元法首先应用在结构分析,然后又在其他领域中得到广泛应用。

【本章重点】

- 有限元法与 ANSYS 软件的起源与发展;
- 矩阵分析法分析杆件结构的过程与步骤;
- ANSYS 界面组成及分析问题的步骤。

1.1 发展与现状

离散化的思想可以追溯到 20 世纪 40 年代。1941 年 A. Hrennikoff 首次提出用离散元素法求解弹性力学问题,当时仅限于用杆系结构来构造离散模型,但能很好地说明有限元的思想。如果原结构是杆系,这种方法的解是精确的,发展到现在就是大家熟知的矩阵分析法。究其实质,这还不能说就是有限单元法的思想,但结合以后的有限元理论,统称为广义有限单元法。1943 年 R. Courant 在求解扭转问题时为了表征翘曲函数而将截面分成若干三角形区域,在各三角形区域设定一个线性的翘曲函数,这实质上就是有限单元法的基本思想(对里兹法的推广),这一思想真正用于工程中是在电子计算机出现后。

20 世纪 50 年代因航空工业的需要,美国波音公司的专家首次采用三节点三角形单元,将矩阵位移法用到平面问题上。同时,原联邦德国斯图加特大学的 J. H. Argyris 教授发表了一组能量原理与矩阵分析的论文,为这一方法的理论基础作出了杰出贡献。1960 年美国的 R. W. Clough 教授在一篇题为《平面应力分析的有限单元法》的论文中首先使用“有限单元法(the Finite Element Method)”一词,此后这一名称得到广泛承认。

20 世纪 60 年代有限单元法发展迅速,除力学界外,许多数学家也参与了这一工作,

奠定了有限单元法的理论基础,搞清了有限单元法与变分法之间的关系,发展了各种各样的单元模式,扩大了有限单元法的应用范围。

20 世纪 70 年代以来,有限单元法进一步得到蓬勃发展,其应用范围扩展到所有工程领域,成为连续介质问题数值解法中最活跃的分支。由变分法有限元扩展到加权残数法与能量平衡法有限元,由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题,由静力平衡问题扩展到稳定性问题、动力问题和波动问题,由线性问题扩展到非线性问题,分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等,由结构分析扩展到结构优化乃至于设计自动化,从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等领域。它使许多复杂的工程分析问题迎刃而解。

有限单元法的基本思想是将物体(即连续的求解域)离散成有限个且按一定方式相互联结在一起的单元的组合,来模拟或逼近原来的物体,从而将一个连续的无限自由度问题简化为离散的有限自由度问题求解的一种数值分析法。物体被离散后,通过对其中各个单元进行单元分析,最终得到对整个物体的分析。网格划分中每一个小的块体称为单元。确定单元形状、单元之间相互联结的点称为节点。单元上节点处的结构内力为节点力,外力(有集中力、分布力等)为节点荷载。

数值模拟技术通过计算机程序在工程中得到广泛的应用。到 20 世纪 80 年代初期,国际上较大型的面向工程的有限元通用程序达到几百种,其中著名的有:ANSYS, NASTRAN, ABAQUS, ASKA, ADINA, SAP 与 COSMOS 等,它们功能越来越完善,不仅包含多种条件下的有限元分析程序,而且带有功能强大的前处理和后处理程序。由于有限元通用程序使用方便、计算精度高,计算结果已成为各类工业产品设计和性能分析的可靠依据。大型通用有限元分析软件不断吸取计算方法和计算机技术的最新进展,将有限元分析、计算机图形学和优化技术相结合,已成为解决现代工程学问题必不可少的有力工具。

ANSYS 软件是融结构、流体、电磁场、声场和耦合场分析于一体的大型通用有限元分析软件。由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国 ANSYS 公司开发,它能与多数 CAD 软件接口,实现数据的共享和交换,如 Pro/E、UG、I-DEAS、CADDs 及 AutoCAD 等,是现代产品设计中的高级 CAD 工具之一。

ANSYS 公司成立于 1970 年,总部位于美国宾西法尼亚州的匹兹堡,致力于 CAE 技术的研究和发展。ANSYS 软件的创始人是美国匹兹堡大学力学系教授、著名有限元权威 John Swanson 博士。如今,ANSYS 软件已经成功地应用于世界工业的各个领域,它融结构、热、流体、电池、交通、土木工程、电子、造船等一般工业及科学研究于一身。ANSYS 程序是一个功能强大、应用灵活的设计分析及优化软件包,可以浮动运行于从 PC、工作站到巨型计算机的各种计算机及操作系统。

日前,ANSYS 公司发布了 ANSYS 9.0 新版本(本书所述无特别说明外针对该版本),它是世界上第一个在 ANSYS Workbench 产品研发平台上整合了电磁、计算流体动力学以及网格划分技术的软件,从而大大拓展了工程仿真的应用领域。用户可以通过它来完成 CAD 的数据读取、几何处理、网格划分、物理环境设置、求解控制以及后处理,而不再需要在完全不同的产品中切换和处理数据库文件。用户可以通过一个非常直接的、方便的界面完成多载荷步加载、求解以及后处理。此外,增强功能还包括梁应力工具、ANSYS APDL 的自定义命令行、接触建模以及用于提高用户仿真效率的其他工具。ANSYS 9.0 在

Workbench 平台上开辟了整合核心技术的新天地。

1.2 矩阵分析法及有限元法分析的一般步骤

矩阵分析法适用于由连杆或梁等单元组成的杆件结构，是一种具有朴素的有限元思想的非连续介质的力学分析方法，下面以此为例说明有限元分析的一般步骤。

1.2.1 矩阵分析法

杆系结构的矩阵分析方法从广义上说，也可以包括在有限单元法中，并且可以比较形象地说明有限单元法的概念，在实际工程中也有很大的应用价值。

1. 水平杆单元刚度矩阵

如图 1-1 所示桁架，杆的两端都可以产生位移。为了循序渐进，先研究水平直杆 ij ，如图 1-2 所示。

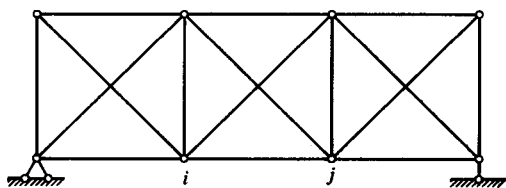


图 1-1 桁架



图 1-2 水平杆单元

杆单元两端各有一个水平节点位移 u_i 和 u_j ，即具有两个自由度。两端结节点力分别为 U_i 和 U_j 。

杆的受力情况可分解为两种状态。

(1) 状态一： $u_i = u_i$ ， $u_j = 0$ 。这时，节点 j 被固定。

$$\text{单元应变: } \varepsilon = -\frac{u_i}{l}$$

$$\text{单元应力: } \sigma = E\varepsilon = -\frac{Eu_i}{l}$$

材料力学中以拉应力为正，而有限单元法中，以向右的节点力为正，所以下式中加一负号。

$$\text{单元左端节点力: } U_i = -A\sigma = \frac{AE}{l}u_i$$

$$\text{单元右端节点力: } U_j = A\sigma = -\frac{AE}{l}u_i$$

(2) 状态二： $u_i = 0$ ， $u_j = u_j$ 。这种状态与状态一正好相反。

$$\text{单元应变: } \varepsilon = \frac{u_j}{l}$$

$$\text{单元应力: } \sigma = \frac{Eu_j}{l}$$

单元左端节点力: $U_i = -A\sigma = -\frac{AE}{l}u_j$

单元右端节点力: $U_j = A\sigma = \frac{AE}{l}u_i$

把以上两种状态的结果叠加起来, 得到左、右两端都可变位情况下单元节点力为

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{AE}{l}u_i - \frac{AE}{l}u_j \\ U_j &= -\frac{AE}{l}u_i + \frac{AE}{l}u_j \end{aligned}$$

写成矩阵形式得到

$$\begin{pmatrix} U_i \\ U_j \end{pmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \mathbf{K}^e \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \quad (1-2-1)$$

其中

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-2-2)$$

式(1-2-2)称为单元刚度矩阵。刚度矩阵在有限单元法中是一个比较重要的概念, 能体现出任何一个自由度方向的节点力与所有节点位移之间的关系。

单元轴力可写为

$$N = \frac{AE}{l} [-1 \quad 1] \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \quad (1-2-3)$$

其中

$$\mathbf{S} = \frac{AE}{l} [-1 \quad 1] \quad (1-2-4)$$

在杆件结构中, 通常以轴力作为广义应力, 因此矩阵 \mathbf{S} 称为单元应力矩阵。

实际, 在节点 i 和 j , 除了水平位移外, 还可产生垂直位移 (但在小变形条件下, 垂直节点位移对铰接杆的内力无影响)。引入垂直节点位移 v_i 、 v_j 和垂直节点力 V_i 、 V_j , 把单元刚度矩阵扩展为四阶形式, 单元节点力为

$$\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{pmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix} \quad (1-2-5)$$

或

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e \quad (1-2-6)$$

其中, $\mathbf{F}^e = [U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j]^T$ 为节点力; $\boldsymbol{\delta}^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]^T$ 为节点位移

单元刚度矩阵

$$K^e = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-2-7)$$

单元轴力

$$N = \frac{AE}{l} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix} = S \delta^e \quad (1-2-8)$$

2. 倾斜杆单元刚度矩阵

如图 1-3 所示，局部坐标 \bar{x} 、 \bar{y} 与整体坐标 x 、 y 之间的位移 $\bar{\delta}$ 与 δ 之间存在如下变换关系

$$\bar{\delta} = \lambda \delta \quad (1-2-9)$$

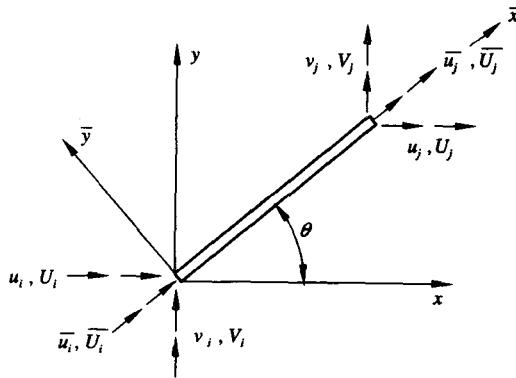


图 1-3 局部坐标与整体坐标

式中，转换矩阵

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

为正交矩阵，其中 $\alpha = \cos\theta$ ， $\beta = \sin\theta$ 。

则局部坐标系中节点力 $\bar{F} = [\bar{U}_i \ \bar{V}_i \ \bar{U}_j \ \bar{V}_j]^T$ 与整体坐标系中的节点力 $F = [U_i \ V_i \ U_j \ V_j]^T$ 之间关系为

$$\bar{F} = \lambda F \quad (1-2-10)$$

局部坐标系中的节点力

$$\bar{F} = \bar{K}^e \bar{\delta} \quad (1-2-11)$$

局部坐标系中的刚度矩阵 \bar{K}^e 见式 (1-2-7)。

将式 (1-2-9) 和 (1-2-10) 代入 (1-2-11) 得

$$F = \lambda^{-1} \bar{K}^e \lambda \delta$$

或记为

$$F = K^e \delta \quad (1-2-12)$$

上式反映了单元节点位移与单元节点力的关系,称为单元刚度方程。其中, $K^e = \lambda^{-1} \bar{K}^e \lambda$, 为整体坐标系中的单元刚度矩阵, 即

$$K^e = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \quad (1-2-13)$$

并将式 (1-2-12) 记为

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{pmatrix} \quad (1-2-14)$$

其中, i 点节点力 $F_i = [U_i \ V_i]^T$, j 点节点力 $F_j = [U_j \ V_j]^T$, i 点节点位移 $\delta_i = [u_i \ v_i]^T$, j 点节点位移 $\delta_j = [u_j \ v_j]^T$, $K_{ii} = K_{jj} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$, $K_{ij} = K_{ji} = -K_{ii}$ 。刚度系数 K_{ij} 的意义是节点 j 的单位节点位移在节点 i 上产生的节点力, 其余类推。

3. 节点平衡方程与整体刚度矩阵

从一个桁架中取一节点 i , 如图 1-4a 所示, 设环绕该点有三个单元, 即 ij 、 im 、 ip 。该节点承受的水平 and 垂直荷载分别为 X_i 和 Y_i , 即节点 i 的荷载 $P_i = [X_i \ Y_i]^T$ 。

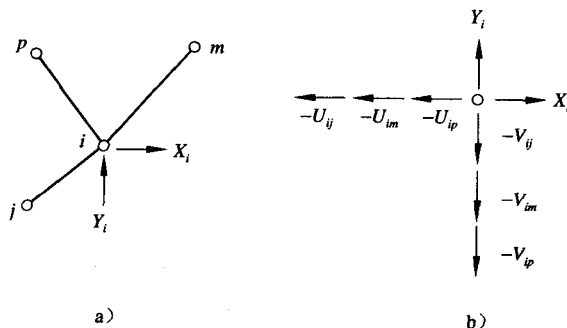


图 1-4 节点 i 的平衡

根据力的平衡，作用于杆单元的节点力与作用于节点的节点力，其大小相等，方向相反。以杆 ij 为例，作用于杆单元的节点力是 $[U_{ij} \ V_{ij}]^T$ ，而作用于节点 i 的节点力是 $[-U_{ij} \ -V_{ij}]^T$ 。将节点脱离出来，受力分析如图 1-4b 所示，在水平和垂直方向的节点受力平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} X_i - U_{ij} - U_{im} - U_{ip} &= 0 \\ Y_i - V_{ij} - V_{im} - V_{ip} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-15)$$

由式 (1-2-14) 知道杆单元 ij 在节点 i 的节点力为

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \end{pmatrix} = K_{ii} \delta_i + K_{ij} \delta_j \quad (1-2-16)$$

其他单元施于节点 i 的节点力同样可以写出，一起代入式 (1-2-15)，得到

$$\left(\sum_e K_{ii} \right) \delta_i + K_{ij} \delta_j + K_{im} \delta_m + K_{ip} \delta_p = P_i \quad (1-2-17)$$

每个节点都有一对平衡方程如上，对于全部节点 $i = 1, 2, \dots, N$ 的结构，得到 $2N$ 阶线性方程组，即结构的节点平衡方程组

$$K \delta = P \quad (1-2-18)$$

其中

$$\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]^T$$

$$P = [P_1, P_2, \dots, P_N]^T$$

式中， δ 为全部节点位移组成的列阵； P 为全部节点荷载组成的列阵； K 为结构的整体刚度矩阵。

4. 总体刚度矩阵的合成

由单元刚度矩阵合成结构的整体刚度矩阵通常采用两种方法，一种为编码法，一种为大域变换矩阵法，前者对自由度较少的结构简单明了，后者特别适合计算机编程运算。下面重点阐述后者。

结构总体刚度矩阵 $[K]$ 与单元刚度矩阵 $[K]^e$ 之间的关系为

$$K = \sum_e (G^e)^T K^e G^e \quad (1-2-19)$$

其中

G^e 为单元大域变换矩阵，对平面桁架结构，单元自由度 $m = 4$ ，节点自由度为 $h = 2$ ，整个结构有 n 个节点，则该单元大域变换矩阵为 $m \times (hn)$ 维。其中 ij 单元假定为全局单元编号中第 3 个，其大域变换矩阵为

$$G^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2i-1 & 2i & \dots & 2j-1 & 2j & \dots & 2n \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1-2-20)$$

另外，总体结构的荷载矢量、位移矢量与单元荷载矢量、位移矢量之间的关系为

$$P = \sum_e (G^e)^T P^e \quad (1-2-21)$$

$$\delta = \sum_e (G^e)^T \delta^e \quad (1-2-22)$$

5. 边界条件的处理

边界条件指结构边界上所受到的外加约束。边界上的节点通常有两种情况。一种可以自由变形，如图 1-5 中的节点 5、6、7、8 等，这时只要让这些节点上的荷载等于零就可以了。如果节点 3 作用着外荷载，可令该点的荷载等于规定的荷载 Q 。另一种是边界上的节点，规定了节点位移的数值，如图 1-5 所示桁架，有

$$u_1 = v_1 = v_4 = 0, \quad v_2 = b$$

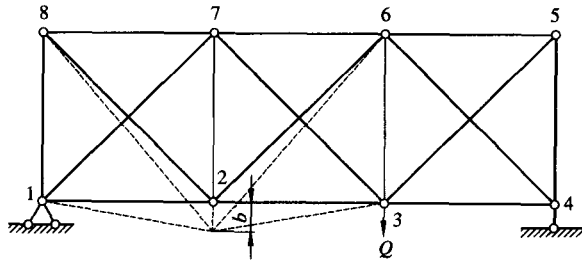


图 1-5 桁架

这时，是否可以把规定的位移数值直接放到平衡方程 $K\delta = P$ 中去呢？当采用迭代法求解时，是可以这样做的。如果采用直接法求解时，就不能这样做了，因为直接法是以全部节点位移都是未知量为基础的。

现在把结构平衡方程组重新排列即，

$$\begin{pmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab}^T & K_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_a \\ P_b \end{pmatrix}$$

式中， δ_b 是已知的节点位移， δ_a 是未知的节点位移。相应地， P_a 是已知的节点荷载，而 P_b 是未知的支点反力。只要已给出的位移 δ_b 足以阻止结构的刚体移动，则子矩阵 K_{aa} 将是非奇异的，可以解出未知的节点位移

$$\delta_a = K_{aa}^{-1} (P_a - K_{ab} \delta_b)$$

进而求出未知支点反力

$$P_b = (K_{bb} - K_{ab}^T K_{aa}^{-1} K_{ab}) \delta_b + K_{ab}^T K_{aa}^{-1} P_a$$

上面我们说明了求解平衡方程组的步骤，但在有限单元法中，未知量的个数通常有几百个，甚至几万个，一般都利用电子计算机求解。给定位移的节点和给定荷载的节点实际上是交错出现的。通常为了程序设计的方便，刚度矩阵 $[K]$ 的行序和列序都不改变，而作下述处理。

设结构的平衡方程为

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & \cdots & k_{1,16} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & \cdots & k_{2,16} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & \cdots & k_{3,16} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & \cdots & k_{4,16} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{16,1} & k_{16,2} & k_{16,3} & k_{16,4} & \cdots & k_{16,16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_8 \end{pmatrix} \quad (1-2-23)$$

对 $u_1=0$, 上式作如下变化: 在刚度矩阵 $[K]$ 中, 把与 u_1 对应的对角线上的刚度系数是 $k_{1,1}$ 换为一个极大的数, 例如可换成 $k_{1,1} \times 10^8$; 把与 u_1 对应的节点荷载换成 $k_{1,1} \times 10^8 \times u_1=0$, 其余保留不变。对其他边界条件可以类推。

通过上述变化, 式 (1-2-23) 中节点位移列阵成为未知量, 荷载列阵成为已知矢量, 两端左乘刚度矩阵的逆阵可以求出节点位移, 进而得到节点力和单元内力。上述以位移作为未知量求解并表示出节点力和单元内力的方法, 称为“位移法”, 相应的有限单元法为“位移法有限元”。以单元内力为未知量的有限元方法称为“力法有限元”, 工程中采用不多。

【例 1-1】桁架结构的平衡方程

如图 1-6 所示桁架结构, 支承条件为: $u_1=v_1=u_4=v_4=0$, $u_3=b$ 。该桁架共有 6 个杆单元, 各单元的尺寸和倾角如表 1-1 所示。试列出该桁架结构的平衡方程。

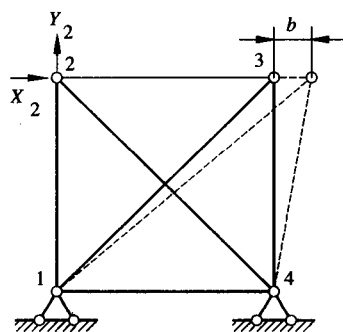


图 1-6 桁架

表 1-1 单元结构尺寸

	i 点	j 点	面积	长度	弹性模量	倾角 $\theta/(^\circ)$	$\alpha=\cos\theta$	$\beta=\sin\theta$	α^2	β^2	$\alpha\beta$
12	1	2	A	l	E	90	0	1	0	1	0
13	1	3	A	$\sqrt{2}l$	E	45	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
14	1	4	A	l	E	0	1	0	0	0	0
23	2	3	A	l	E	0	1	0	0	0	0
24	2	4	A	$\sqrt{2}l$	E	315	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
34	3	4	A	l	E	270	0	-1	0	1	0

求解步骤

(1) 根据前述列出各单元的刚度矩阵

$$\mathbf{K}^{12} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{13} = \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \dots$$

(2) 列出各单元的大域变换矩阵

$$G^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G^{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

(3) 进而计算整体刚度矩阵[K], 写出结构总体平衡方程为

$$\frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 1.914 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix}$$

(4) 引入边界条件后得到

$$\frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 1.914 \times 10^8 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914 \times 10^8 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914 \times 10^8 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914 \times 10^8 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 \times 10^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ 1.914 \times 10^8 \times b \\ Y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 有限单元法分析的一般步骤

1. 结构离散化

结构离散化就是将结构分成有限个小的单元体, 单元与单元、单元与边界之间通过节点连接。结构的离散化是有限单元法分析的第一步, 关系到计算精度与计算效率, 是有限