·高等学校教材·

微积分学

孙家永

西北工业大学出版社

高等学校教材

微 积 分 学

孙家永 著

西北工业大学出版社

1995年6月 西安

(陕)新登字 009 号

【内容简介】 本书原为西北工业大学教改试点班一年级的高等数学教材，是用英文写的。该教材及其使用实践曾获1989年全国优秀教学成果奖。此次作者根据该书修订版，将它译成了中文。本书与一般高等数学或数学分析教材的最大不同是以勒贝格理论讲积分、以 L^2 空间理论为主讲傅里叶级数。讲法新颖、立论严谨、剖析透彻、循序渐进。全书用 208(176+32)学时即可讲完，适用于理工科大学一年级程度较高的学生，也可供研究生和教师参考。

本书由《Calculus with Related Topics》(Revised edition)(西北工业大学出版社 1991年10月版)译出。

高等学校教材
微积分学
孙家永 著
责任编辑 刘国春
责任校对 郑 刚
*

(710072 西安市友谊西路 127 号 5269046)
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0738-7/O·97(课)
*
开本 787×1092 毫米 1/16 印张 27.25 字数 663 千字
1995 年 6 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—1 000 册 定价：19.00 元

中文本前言

本书是根据作者所写的《Calculus with Related Topics》(Revised edition)（西北工业大学出版社出版）译出的。该书为西北工业大学教改试点班及部分提高班的高等数学教材。初版及其使用实践（《Calculus with Related Topics》及其使用实践）曾获 1989 年全国优秀教学成果奖。修订版在可读性及严密性方面对初版作了改进，特别是重积分的换元定理，线、面积分中的 Green 定理、Gauss 定理以及 Stokes 定理几乎全部重写了，但总的风格、体系没有改变，仍保留了对内容更新及注意能力培养的特色。

为了便于某些读者参照英文本阅读此书，翻译时尽量采取直译的形式。因此，出现一些不太符合中文习惯的倒装语句。在中文中接触一些这样的语句，在文化交流日益频繁的今天可能是有益的。

本书特别适宜于希望了解 Lebesgue 积分理论以及古典分析理论的严格论证的教师及科技工作者阅读和参考，也可作为程度较高的理、工科大学一年级学生的数学分析或高等数学课程的教材。

作者深切感谢对编写和出版本书热情支持的西北工业大学的领导与同事们。

孙家永

1993 年 7 月

英文本前言

这本书从 1985 年起已在西北工业大学使用过三遍。

它包含了中国大学一年级学生要学的一切数学内容，并且还增加了少量特别有用的材料，诸如向量值函数及含参变量的积分等。

这本书与其他书的主要区别在于此书中加深了理论推导。在这本书中 Riemann 积分理论为 Lebesgue 积分理论所代替，古典的 Fourier 级数理论为 L^2 空间中的理论所代替，等等。

这本书共有 12 章。前 8 章讨论有关一元函数微分学的问题，可于第一学期用 96 学时（80 节讲课，16 节习题课）学完。其余 4 章讨论一元函数的积分学、无穷级数以及多元函数的微积分学，可于第二学期以 112 学时（96 节讲课，16 节习题课）学完。

这本书是为程度较高的一年级大学生提供的。

孙家永

1988 年 7 月

目　录

绪　言

微积分是由 Newton 及 Leibniz 于 17 世纪各自独立地发明的。Newton 利用微积分解决了一些动力学中的问题，Leibnız 则用它解决了一些几何问题。此后一些有名的数学家，如 Euler，Cauchy，Riemann，Lagrange，Weıerstrass 等又给了微积分以巨大进步。至今人们都深知，绝大多数自然规律都必须通过微积分来描述和研究，所以微积分对于科学工作者和工程师都是非常重要的。

微积分包含两个主要部分：微分学与积分学。这里要讨论的微分学理论是古典的而积分学理论则是近代的，它是由 Lebesgue 及其他数学家于本世纪完成的。

我们将讨论一元及多元函数微积分的理论与应用。此外，一些与之有密切关系的内容，如微分方程初阶、无穷级数以及向量等也将适当地穿插进来讲。

第一章　函　数

函数是微积分所要讨论的主要对象。在这一章里我们将介绍函数概念以及其他的一些基本概念。

1.1　实数与数轴

1°　实数

实数就是有尽或无尽的小数，例如，1.52 及 $\pi = 3.14159\cdots$ 都是实数。$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\sqrt{2}$，…也都是实数，因为它们都可化为小数。今后我们将主要讨论实数。为简单起见，我们将把它们称为数。

2°　数轴

数轴是一条有向的直线，其上有一固定点 O(称为原点)，并且还附有一单位长度(见图1.1.1)。

众所周知，每个数相应于数轴上一个唯一的点，反之亦然。因此，即使不严格区分术语点和数也不致引起混淆。有时我们把相应于某数之点称为某数；有时我们把相应于某点之数称为某点。

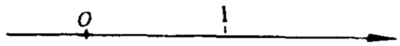

图 1.1.1　数轴

3°　$+\infty$(正无穷大)

$+\infty$ 是一个理想数。它被认为大于任何实数 x，($+\infty > x$)。它相应于数轴右边位于无穷远处之点。必须注意，$+\infty$ 不是一个实数，有关 $+\infty$ 的算术运算是还没有定义的。

4°　$-\infty$(负无穷大)

$-\infty$ 可以像上面一样地讨论。

1.2　数集与数集之界

1°　数集

数集，简称集或集合，是一组具备某种性质的实数。

例 1.2.1　一组实数 x，使 $0 < x < 3$ 成立者是一个数集。

例 1.2.2　一组实数 x，使 $x^2 - 1 = 0$ 成立者是一个数集。

一组数 x，使某种性质 P 成立的集合，记作$\{x|P\}$。依照这样的记法，例 1.2.1 中的集合可记为$\{x|0<x<3\}$，例 1.2.2 中的集合可记为$\{x|x^2-1=0\}$，它也可记为$\{x|x=1,-1\}$或更简单地记为$\{1,-1\}$。

有时，一个集合可不含任何实数。例如$\{x|x^2<0\}$就是一个这样的集合，因为对任何实数 x，$x^2\geqslant 0$。一个不含任何数的集合，称为空集，记为 $\varnothing$。一个集合包含所有实数者记为 R。

2° 数集之界

设 S 为一给定集合，M 为一给定数，如果对任何属于 S 的数 x（记作 $\forall\ x\in S$，"$\forall$ "表示对任一，"$\in$"表示属于），都有 $x\leqslant M$，则称 M 为 S 的一个上界。此时称 S 为上有界。

如果 M 是 S 的一个上界，那么 $M+1$、$M+2$，… 都是上界而 $M-\dfrac{1}{2}$，… 也有可能是上界。亦即若 S 有一个上界则它就会有许多上界。所有 S 的上界里面最小的那个就称为 S 的最小上界。例如，设 $S=\{x|0<x<3\}$，$M=4$ 则 $x\leqslant 4$，$\forall\ x\in S$，所以 4 是 S 的一个上界且 S 是上有界的。同样，5、6、7.2、… 也全部是 S 的上界，实际上，所有 $\geqslant 3$ 的数都是 S 的上界。在所有这些上界中有一个最小的"3"，它就是 S 的最小上界。集合 S 的最小上界可以属于也可以不属于 S。例如，例 1.2.1 中 S 的最小上界不属于 S 而例 1.2.2 中 S 的最小上界就属于 S。

这是一个很重要的性质：如果一个非空的集合 S 有上界，那么它必定有最小上界。这一性质称为 Dedkind 性质。

一个集合 S 的最小上界记作 l.u.b.S 或 $\sup S$。

值得注意，如果集合根本没有上界，那么它当然就不会有最小上界。例如，所有正整数的集合 J 就没有上界，因而也没有最小上界。

如果 S 没有上界，我们就说 l.u.b.S 或 $\sup S$ 是 $+\infty$。

一个集合的下界及最大下界可同样地讨论，我们将这留作练习。

一个集合 S 的最大下界记作 g.l.b.S 或 $\inf S$。

一个既上有界又下有界的集合称为有界集合。

1.3 区间与邻域

1° 区间

集$\{x|x$ 在 a,b 之间$\}$称为区间 a,b。它可用数轴上的一个线段来表示（图 1.3.1）。a 和 b 称为这个区间的端点。当 a 及 b 均含于此区间时，则称此区间为闭区间；亦即闭区间为集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$。我们以$[a,b]$记此闭区间；当 a 及 b 均不含于此区间时，则称此区间为开区间，亦即开区间为集合$\{x|a<x<b\}$。我们记此开区间为(a,b)；区间仅仅只包含一个端点的称为半开区间。一个半开区间记为$[a,b)$或$(a,b]$，视 a 或 b 哪个属于此区间而定。如果我们并不关心端点是否属于此区间，则可说区间 a,b 而记之为 $\langle a,b\rangle$，区间中任何一个异于端点之点 c 称为此区间的内点（图 1.3.2）。它具有性质：总存在一个以 c 为中心的一个小开区间$(c-\delta,c+\delta)$，它落在原区间之内。

图 1.3.1　区间

图 1.3.2　内点

2°　**邻域**

$\forall\ \delta > 0$，$(a-\delta, a+\delta)$ 称为 a 的一个半径为 δ 的邻域（图 1.3.3），它是一个以 a 为中心，δ 为半径的开区间，记之为 $N_\delta(a)$。如果将 a 从 $N_\delta(a)$ 中删去，则我们得到一个所谓 a 的半径为 δ 的空心邻域（图 1.3.4），记之为 $N_\delta^0(a)$。

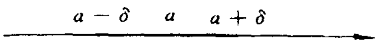

图 1.3.3　a 的邻域

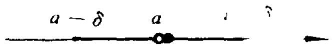

图 1.3.4　a 的空心邻域

例 1.3.1　$(1-2, 1+2)$ 是 1 的一个邻域（半径为 2），记为 $N_2(1)$。

$(1-2, 1+2)$ 中将 1 去掉，即是 1 的一个空心邻域，记为 $N_2^0(1)$。

集合 $\{x \mid x > N\}$ 称为 $+\infty$ 的一个邻域（图 1.3.5），并以 $N(+\infty)$ 来记它。由于 $+\infty$ 并不属于这个邻域，所以我们也可称它为一个 $+\infty$ 的空心邻域而记之为 $N^0(+\infty)$。

集合 $\{x \mid x < -N\}$ 称为 $-\infty$ 的一个邻域（图 1.3.6），并以 $N(-\infty)$ 来记它。它也可称为 $-\infty$ 的空心邻域而记之为 $N^0(-\infty)$。

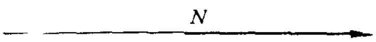

图 1.3.5　$+\infty$ 的邻域

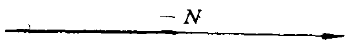

图 1.3.6　$-\infty$ 的邻域

邻域的直观含义是很清楚的。任何数都有无穷多个邻域。

有时我们还把 $[a, a+\delta)$ 及 $(a-\delta, a]$ 称为 a 之右、左邻域而记之为 $N_\delta^+(a)$ 及 $N_\delta^-(a)$。如果将 a 从中剔除，则得所谓的空心右邻域及左邻域，并分别记之为 $N_\delta^{0+}(a)$ 及 $N_\delta^{0}(a)$。

很明显，任何两个 a 的邻域（空心、左、右）之交仍是 a 的一个邻域（空心、左、右）。

1.4　变量与函数

1°　**变量**

在我们的研究过程中一些可取不同值的数是经常出现的。我们称这样的数为可变动的数或变量。

例 1.4.1　假如一辆车子开动着，那么它的运动时间 t（以小时计）是一个变量，它所经过

的路程 d(以千米计)也是一个变量,车内的温度 T(百分度)也是一个变量。

例 1.4.2　一个金环受热时,它的半径长度 r(以厘米计)是一个变量,它的周长 c(以厘米计)也是一个变量。

一个变量通常以 x、y、z 等记之。如果 x、y、$z\cdots$ 是变量,则 x^2,$3y+1$,$z-y$ 等也是变量。

2°　**函数**

当一个量的值由另一个变量在某集合 D 中所取之值而唯一确定时,则称此量为另一个变量在 D 上所确定的函数。

例 1.4.3　$3x+2$ 是变量 x 确定在 R 上的函数,因为它的值是由 x 在 R 中所取的值而唯一确定的。

例 1.4.4　x^2 是变量 x 确定在 R 上的函数。

例 1.4.5　当车速给定时,此车所经过的路程 d(以千米计)是行车时间 t(以小时计)在某区间 $[0,T]$ 上确定的函数。

例 1.4.6　在例 1.4.2 中的 c 是 r 确定在某区间 (L,M) 上的函数。

一个变量 x 的函数通常记之为 $f(x)$,$g(x)$,$\varphi(x)\cdots$。如果它是确定在 D 上的,那么,我们再加一补注 $x\in D$。我们应该用不同的记号来表示不同的函数。

一个变量 x 的函数当然也是一个变量,我们称之为因变量而 x 则称为自变量。集合 D 则称为此函数之定义域。

一个函数 $f(x)$,当 x 取值 a 时所确定之值(或称以 $x=a$ 代入之值)记为 $f(x)|_{x=a}$ 或 $f(a)$。如果 $f(a)=0$,则称 a 为 $f(x)$ 的一个零点。

例 1.4.7　若 $f(x)=3x+2$,则 $f(x)|_{x=-\frac{2}{3}}=3\cdot\dfrac{-2}{3}+2=0$,此即 $-\dfrac{2}{3}$ 是此函数的一个零点。

有时我们也把变量 x 所取得的一个特殊值记作 x。为了区分起见,我们常在 x 之前冠以变量或值来说明。很明显,如果 x 是变量,则 $f(x)$ 是 x 的函数;如果 x 是一个特定值,则 $f(x)$ 是函数的一个特定值。

3°　**值域及图象**

一个确定在 D 上的函数 $f(x)$ 的值域指的是当 x 遍取 D 中之值时,相应 $f(x)$ 之值所组成的集合。

例 1.4.8　$3x+2$ 之值域为 R,因为对任一 $a\in R$,总有一 $x\in R$ 使 $3x+2=a$。x^{-2} 之值域是所有正实数的集合 R^+。因为对任一 $a\in R^+$,总有 $x\in R$ 使 $x^{-2}=a$ 而对非正数 a 就不能有这样的 x。

一个确定在 D 上的函数 $f(x)$ 的图象指的是所有点 (x,y) 之集合,其中 $y=f(x)$ 而 x 则遍取 D 中之值。它亦可记为 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 或 $\{(x,f(x))\mid x\in D\}$。

例 1.4.9　在 R 上确定之函数 $3x+2$ 的图象是所有 (x,y) 之集合,其中 $y=3x+2$,而 x 则遍取 R 中之值,这样,$(-1,-1)$,$(0,2)$、$(1,5)\cdots$ 都是这个图象上的点。整个图象是 xy 平面上的一条直线(图 1.4.1)。

一般地说,点出许多图象上的点,我们就可近似地得出这个图象。点出的点越多,得出的图

象的形状就越精确。

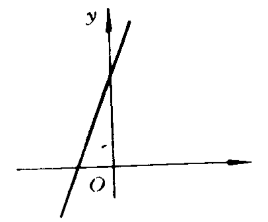

图 1.4.1　$3x+2$ 之图象

4°　关于定义域的一点注记

通常在下列两种情形之下，函数的定义域就不予指明：

1）从上下文看，已很清楚。

例 1.4.10　在例 1.4.5 中，我们可以说 d 是 t 的函数，在例 1.4.6 中，可以说 c 是 r 的函数。

2）从表达式看，已清楚。

这是为什么？因为在数学里我们已有此约定：如果 $f(x)$ 的表达式（从 x 之值以求 $f(x)$ 之值 的法则）已给定，那么，除非另有声明，$f(x)$ 的定义域总理解为所有使这个表达式有意义的 x 的集合。

例 1.4.11　若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$，求它的定义域。

据约定，我们应找出使表达式 $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 有意义的所有 x 的集合。试作如下：

因为我们只考虑实数，所有根号"$\sqrt{\ }$"下之数必须 $\geqslant 0$，否则表达式就没有意义了，因此

$$x-1\geqslant 0,\quad \text{即}\quad x\geqslant 1$$

此外，一个分式的分母永远不能为 0，否则分式就没有意义。因此

$$x-1\neq 0,\quad \text{即}\quad x\neq 1$$

将此两结果综合起来，我们就得出所有使 $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 有意义的 x 的集合为 $\{x\mid x>1\}$，即 $(1,+\infty)$，它就是这个函数的定义域。

1.5　函数之表达

1°　一些例子

在上一节中，我们已经见到了许多函数的例子。在例 1.4.3、例 1.4.4 中，$3x+2$，x^2 都是 x 的函数；在例 1.4.5 中 d 是 t 的函数，例 1.4.6 中 c 是 r 的函数。这些函数有一个主要的差别，在例 1.4.3、例 1.4.4 中如何从自变量之值来确定出函数之值是知道的，而在例 1.4.5、例 1.4.6 中就不是这样。如果如何从自变量的 x 来得出所确定的函数值是知道的，这个函数就称为是表达了的，否则，就称为是未表达的。怎样使一个未表达的函数表达出来在应用中是很重要的。如果我们不能把一个函数表达出来，那么通常就不能对这个函数作更具体的研究。但是，没有一个一般的规律可把任何函数表达出来。我们必须用不同的规律来处理不同的问题。下面给出一些例子：

例 1.5.1　将上面讨论过的两个未表达的函数表达出来。

解　由物理学可知，在例 1.4.5 中

$$d=v_0t\quad\text{（设车以常速 } v_0 \text{ 运动）}$$

由几何学可知，在例 1.4.6 中

$$c=2\pi r$$